

Electrodinámica.

Bernardo García Olmedo ¹

(20 de septiembre de 2005)

¹Dpto. de Electromagnetismo y Física de la Materia -Universidad de Granada

Constantes físicas

c	velocidad de la luz	$2,997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
μ_0	permeabilidad magnética	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \simeq 1,256\,64 \times 10^{-6} \text{ H.m}^{-1}$
ε_0	permitividad eléctrica	$8,854\,187\,8 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
e	carga del protón	$1,602\,189\,2 \times 10^{-19} \text{ C}$
m_e	masa en reposo del electrón	$9,109\,534 \times 10^{-31} \text{ kg}$
m_p	masa en reposo del protón	$1,672\,648 \times 10^{-27} \text{ kg}$
k	constante de Boltzmann	$1,380\,662 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
h	constante de Plank	$6,626\,176 \times 10^{-34} \text{ J.s}$

Conversión de unidades

$1 \text{ eV} = 1,602\,189\,2 \times 10^{-19} \text{ Julios}$
$1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ gauss}$

Índice general

1. Cinemática relativista	1
1.1. Introducción	1
1.2. Revisión histórica	2
1.2.0.1. Electromagnetismo y relatividad	3
1.3. Postulados de la Relatividad Restringida	5
1.4. Ordenación espacial y temporal	5
1.4.1. Simultaneidad local	6
1.4.2. Ordenación espacial de sucesos en un sistema de referencia	7
1.4.3. Simultaneidad no local y puesta en hora de los relojes	7
1.4.4. Relatividad de la simultaneidad	9
1.5. Transformaciones de Lorentz; espacio de Minkowski	10
1.5.1. Invarianza del intervalo; producto escalar y métrica en el espacio de Minkowski	16
1.5.1.1. Clasificación de los intervalos	18
1.6. Medidas	19
1.6.1. Medidas espaciales; longitud propia; Contracción de Lorentz	19
1.6.2. Medidas de tiempo; tiempo propio de un sistema; intervalo de tiempo propio; dilatación temporal	21
1.7. Invariantes	22
1.7.1. Invarianza manifiesta de las leyes	22
1.7.2. Invarianza del elemento de tetravolumen	22
1.7.3. Tiempo propio de una partícula	23
1.8. Tetravectores cinéticos	25

1.8.1. Ley de composición de velocidades; Tetravector velocidad	25
1.8.2. Tetravector aceleración	27
1.9. Problemas	28
1.10. Ejemplos con Mathematica	41
1.10.1. Comienzo de la sesión	42
1.10.2. Transformaciones de Galileo	42
1.10.3. Transformaciones de Lorentz	42
1.10.3.1. Representación matricial de la transformada	44
1.10.3.2. Diagramas de Minkowski	45
1.10.4. Velocidad	46
1.10.5. Aceleración	49
2. Fundamentos de la electrodinámica	51
2.1. Introducción	51
2.1.1. Principios de mínima acción	52
2.2. Acción de un sistema de partículas libres	54
2.2.1. Tetravector energía-cantidad de movimiento	56
2.3. Acción de la interacción	58
2.3.1. Densidades; ecuación de continuidad	59
2.3.2. Acción de la interacción entre un sistema de partículas y un campo electromagnético; tetravector potencial	62
2.3.3. Acción de la interacción para distribuciones	63
2.4. Fuerza de Lorentz; campo electromagnético	65
2.4.1. Transformaciones de contraste y condiciones de contraste	67
2.4.2. El tensor del campo	69
2.4.2.1. Invariantes del campo	71
2.4.3. Tetravectores de fuerza	72
2.4.3.1. Fuerza de Minkowski; ecuaciones del movimiento de una carga . .	72
2.4.3.2. Tetravector densidad de potencia-fuerza	74
2.5. Ecuaciones de Maxwell-Lorentz	75

2.5.1.	Primera ley tensorial de Maxwell	75
2.5.2.	Acción del campo	76
2.5.3.	Segunda ley tensorial de Maxwell	76
2.5.4.	Expresión tridimensional de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz	78
2.6.	Leyes de conservación	79
2.6.1.	Tensor densidad de energía-momento de las partículas	80
2.6.1.1.	Ecuación de continuidad de la energía mecánica	82
2.6.1.2.	Ecuación de continuidad de la cantidad de movimiento mecánica . .	83
2.6.2.	Tensor densidad de energía-momento del campo	84
2.6.2.1.	Ecuación de continuidad de la energía electromagnética	86
2.6.2.2.	Ecuación de continuidad de la cantidad de movimiento electromagnética	87
2.7.	Problemas	88
2.8.	Ejemplos con Mathematica	106
2.8.1.	Comienzo de la sesión	106
2.8.2.	Subida y bajada de índices	106
2.8.3.	Transformación de Lorentz	107
2.8.4.	Operadores tetradimensionales	108
2.8.4.1.	Operadores para funciones con dependencia explícita	108
2.8.4.2.	Operadores para funciones sin dependencia explícita	109
2.8.5.	Invariantes del campo	112
2.8.6.	Tensor energía-momento del campo	113
3.	Medios macroscópicos	115
3.1.	Introducción	115
3.2.	Ecuaciones macroscópicas de Maxwell	115
3.2.1.	Expresión tensorial de las ecuaciones macroscópicas	117
3.2.2.	Teoremas de conservación	119
3.2.2.1.	Interpretación del tensor de Maxwell para campos estáticos	121
3.2.3.	Condiciones de continuidad	122
3.3.	Medios lineales	125
3.3.1.	Ecuaciones de Maxwell para medios lineales	125
3.4.	Problemas	127

4. Propagación de ondas	133
4.1. Introducción	133
4.2. Ecuaciones de onda	133
4.2.1. Ecuaciones de onda para los potenciales	133
4.2.2. Ecuaciones de onda para los campos	135
4.2.2.1. Caso general	135
4.2.2.2. Medios lineales	136
4.3. Solución general	137
4.3.1. Modos TE y TM	140
4.4. Ondas en el vacío	141
4.4.1. Ondas planas homogéneas	141
4.4.1.1. Propiedades relativistas	146
4.4.2. Ondas monocromáticas	147
4.4.3. Ondas monocromáticas planas	148
4.4.3.1. Polarización de las ondas planas monocromáticas	151
4.4.3.2. Propiedades relativistas	153
4.4.4. Ondas monocromáticas esféricas	158
4.5. Ondas en medios materiales	159
4.5.1. Ondas planas, homogéneas y monocromáticas	160
4.5.1.1. Ecuaciones de los campos	160
4.5.1.2. Relaciones de estructura	161
4.5.1.3. Relaciones de dispersión de la onda en el medio; Factor Q	163
4.5.1.4. Velocidades de fase y de grupo	166
4.5.1.5. Almacenamiento, dissipación y propagación de energía	169
4.5.1.6. Buenos dieléctricos y buenos conductores	171
4.6. Problemas	172
4.7. Ejemplos con Mathematica	186
4.7.1. Resolución de las ecuaciones de Maxwell mediante el método FD-TD	186
4.7.1.1. Introducción	186

4.7.1.2. Comienzo de la sesión	188
4.7.1.3. Diferencias finitas centradas	189
4.7.1.4. Aplicación a la solución de las ecuaciones de Maxwell	190
4.7.1.5. Ejemplo 1º	192
4.7.1.6. Ejemplo 2º	194
5. Campos. Radiación	197
5.1. Introducción	197
5.2. Potenciales retardados	197
5.2.1. Potenciales de una distribución continua	198
5.2.2. Potenciales de Lienard-Wiechert	202
5.3. Campo creado por una distribución de cargas	204
5.3.1. Campo creado por una distribución continua	205
5.3.1.1. Campos lejanos de radiación; intensidad y potencia radiadas	209
5.3.1.2. Antenas lineales	213
5.3.1.3. Desarrollo multipolar en coordenadas cartesianas	217
5.3.1.4. Desarrollo multipolar en coordenadas esféricas	229
5.3.2. Campo creado por una carga puntual	229
5.3.2.1. Campo de una carga con movimiento uniforme	233
5.3.2.2. Radiación de una carga acelerada	235
5.4. Movimiento radiativo de las cargas	242
5.4.1. Masa electromagnética	242
5.4.2. Fuerza de reacción	244
5.5. Problemas	247
A. Apéndice del capítulo 1	a-1
A.1. Transformaciones de Lorentz	a-1
A.1.1. Metros perpendiculares	a-1
A.1.2. Dilatación temporal	a-2
A.1.3. Contracción de Lorentz	a-3

A.1.4.	Sincronización de relojes	a-4
A.1.5.	Transformaciones de Lorentz	a-6
A.2.	Transformación de la dirección de movimiento	a-7
A.2.1.	Aberración de la luz	a-7
B.	Apéndice del capítulo 2	b-1
B.1.	Masa inerte	b-1
B.1.1.	Masa en reposo	b-1
B.1.2.	Masa en movimiento	b-2
B.1.3.	Equivalencia entre masa y energía	b-3
B.2.	Movimiento de partículas cargadas	b-5
B.2.1.	Movimiento hiperbólico	b-7
B.2.2.	Movimiento ciclotrónico; deriva ambipolar	b-8
B.3.	Problemas	b-11
C.	Apéndice del capítulo 3	c-1
C.1.	Medios lineales	c-1
C.2.	Relaciones de dispersión	c-5
C.2.1.	Relaciones de dispersión de primero y segundo orden	c-6
C.2.2.	Relación de dispersión de un plasma simple	c-14
C.3.	Electrodinámica de los medios en movimiento	c-24
C.3.1.	Leyes de transformación de los campos en medios materiales	c-24
C.3.2.	Invariantes	c-26
C.3.3.	Ecuaciones constitutivas	c-26
C.4.	Revisión del teorema de Poynting	c-28
C.4.1.	Caso general	c-28
C.4.2.	Medios lineales no dispersivos	c-31
C.4.3.	Medios lineales dispersivos. Teorema complejo de Poynting	c-32
C.5.	Problemas	c-33

D. Apéndice I del capítulo 4	d-1
D.1. Introducción	d-1
D.2. Ondas en medios anisótropos	d-1
D.2.1. Medios uniaxiales	d-2
D.2.2. Medios girótropos	d-6
D.3. Reflexión y refracción	d-10
D.3.1. Leyes de Snell	d-10
D.3.2. Leyes de Fresnel	d-12
D.3.3. Incidencia sobre un buen conductor. Resistencia superficial	d-15
D.3.4. Reflexión total. Ondas superficiales	d-17
D.3.5. Reflexión normal. Ondas estacionarias	d-18
D.4. Problemas	d-21
E. Apéndice II del capítulo 4	e-1
E.1. Propagación guiada	e-1
E.1.1. Potenciales de Debye de las guías	e-3
E.1.1.1. Relaciones de dispersión. Parámetros de corte	e-5
E.1.2. Clasificación de los modos	e-7
E.1.3. Relaciones de estructura	e-9
E.1.4. El modo TEM en la línea coaxial	e-13
E.1.5. Guía rectangular	e-16
E.1.5.1. Modos TE	e-17
E.1.5.2. Modos TM	e-19
E.1.5.3. Ordenación de los modos. Modo TE_{10}	e-20
E.1.6. Guía circular	e-27
E.1.7. Guía dieléctrica	e-27
E.1.8. Transmisión de potencia. Funciones tensión e intensidad	e-31
E.1.9. Pérdidas en las guías	e-36
E.1.10. El segmento de guía como componente	e-40
E.1.10.1. La guía ideal	e-43

E.1.11. Circuitos resonantes. Cavidades	e-50
E.1.11.1. Revisión de los circuitos RLC	e-50
E.1.11.2. El segmento de línea como resonador	e-53
E.1.11.3. Cavidades resonantes	e-54
E.1.11.4. Factor Q de una cavidad	e-56
E.2. Problemas	e-58
F. Apéndice del capítulo 5	f-1
F.1. Ejemplos de multipolos radiantes	f-1
F.1.1. Molécula apolar; dipolo con orientación fija	f-1
F.1.2. Antena dipolar lineal	f-2
F.1.3. Electrón en órbita circular; dipolo que gira	f-4
F.1.4. Radiación de un momento magnético en precesión	f-7
F.1.5. Radiación γ	f-11
F.1.6. Ejemplos de multipolos artificiales	f-11
F.2. Radiación, absorción y dispersión	f-12
F.2.1. Aceleradores de partículas	f-12
I. Tensores	I-1
I.1. Espacios vectoriales	I-1
I.1.1. Definición de espacio vectorial	I-1
I.1.2. Base de un espacio vectorial	I-2
I.1.3. Componentes de un vector	I-3
I.1.4. Espacio vectorial Euclídeo	I-5
I.1.5. Funciones métricas covariantes	I-5
I.1.6. Ortogonalidad	I-6
I.1.7. Base adjunta; funciones métricas contravariantes	I-6
I.1.8. Componentes covariantes de un vector	I-8
I.1.9. Invariantes	I-8
I.2. Espacios tensoriales	I-9

I.2.1.	Definiciones	I-9
I.2.2.	Componentes de un tensor euclídeo	I-10
I.2.3.	Algebra tensorial	I-11
I.2.4.	Regla algebraica de contraste tensorial	I-12
I.3.	Espacios puntuales	I-13
I.3.1.	Definiciones	I-13
I.3.2.	Transformaciones de coordenadas	I-15
I.3.3.	Análisis tensorial en coordenadas rectilíneas	I-15
	I.3.3.1. Derivación de escalares y vectores	I-15
I.3.4.	Expresión de las leyes en forma manifiestamente invariante	I-17
I.4.	Problemas	I-18
II. Mecánica Analítica no relativista		II-1
II.1.	Formalismo lagrangiano	II-1
	II.1.1. Ecuaciones de Lagrange; expresión general	II-1
	II.1.2. Ecuaciones de Lagrange para fuerzas que derivan de un potencial	II-3
II.2.	Formalismo hamiltoniano	II-6
	II.2.1. Ecuaciones de Hamilton	II-6
	II.2.2. Expresiones particulares del hamiltoniano	II-7
II.3.	Principios variacionales	II-8
	II.3.1. Cálculo de variaciones	II-9
	II.3.2. Principio de Hamilton	II-10
III. Formulario de series y transformadas de Fourier		III-1
III.1.	Introducción	III-1
III.2.	Desarrollo en series de Fourier	III-1
III.3.	Transformadas de Fourier	III-3
III.4.	Propiedades	III-6
III.5.	Problemas	III-8
III.6.	Ejemplos con Mathematica	III-12

III.6.1. Transformada analítica	III-12
III.6.1.1. Ejemplo 1º	III-12
III.6.1.2. Ejemplo 2º	III-13
III.6.1.3. Ejemplo 3º	III-14
IV. Relaciones vectoriales y diádicas	IV-1
IV.1. Productos	IV-1
IV.2. Gradiente	IV-1
IV.3. Divergencia	IV-2
IV.4. Rotacional	IV-2
IV.5. Laplaciano	IV-2
IV.6. Teoremas integrales	IV-3

Prólogo

Este libro es una continuación del [García Olmedo] aunque existe alguna diferencia de notación y estilo, así como cierta redundancia en los contenidos de uno y otro. Éste parte de la reposición de las ecuaciones de Maxwell en el marco de la relatividad restringida y desarrolla preferentemente los aspectos dinámicos del electromagnetismo, como los de propagación y radiación, así como la teoría de circuitos de parámetros distribuidos.

El contenido se organiza en cinco capítulos y un cierto número de apéndices. El primer capítulo, que pudiera haberse incluido entre los apéndices, suministra la base relativista. El resto de los capítulos contiene una exposición del núcleo básico de la teoría. Los apéndices son de dos tipos: los que amplían el contenido de los capítulos y cuyo contenido no es necesario para el flujo lógico de los mismos, numerados con letras mayúsculas, y los de tipo matemático, que recuerdan o recopilan información que será de uso frecuente y que están numerados por cifras romanas. Al final de la mayor parte de los capítulos y apéndices se incluyen secciones de problemas, parte de los cuales están resueltos, y programas de Mathematica que ilustran y complementan al resto del texto.

Granada 5 de abril de 2001

Capítulo 1

Cinemática relativista

1.1. Introducción

Este tomo se dedica al estudio del campo electromagnético dentro del marco de la relatividad especial por lo que, a modo de introducción, comienza con una revisión de los aspectos básicos de la cinemática y la dinámica relativistas.

El cuerpo fundamental de la Física está constituido por la Mecánica y el Electromagnetismo, la primera desarrollada principalmente por Galileo y Newton y el segundo por Faraday y Maxwell. La aplicación al electromagnetismo de los conceptos clásicos de espacio y tiempo, concretados en las transformaciones cinemáticas de Galileo, presenta dificultades esenciales que fueron soslayadas por Einstein (1905) al encuadrar ambas disciplinas dentro de su Teoría de la Relatividad Restringida. La Teoría General de la Relatividad, desarrollada posteriormente, incluye a la anterior como caso particular.

- La *Relatividad General* es válida a escala cósmica e incluye al campo gravitatorio además del electromagnético.

- La *Relatividad Especial*, o Restringida, es aplicable a "pequeñas regiones del universo tales que el espacio-tiempo, que en la teoría general es curvo, pueda aproximarse como plano. A diferencia de la anterior, no incluye al campo gravitatorio en su estructura interna.

Ambas teorías imponen un límite¹ $c \equiv 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ a la velocidad de propagación de las interacciones y tienen a la Relatividad de Galileo como límite de baja velocidad ($v \ll c$), como exige el principio de correspondencia.

La teoría de la relatividad suele calificarse de clásica.^{en} cuanto a que no es cuántica y, en consecuencia, basa sus descripciones en el concepto de trayectoria continua (línea del universo de la partícula). No obstante, tiene el mismo grado de modernidad que la cuántica y como ella, dista de ser cerrada y definitiva. A pesar de los esfuerzos realizados, no parece cercana la consecución de

¹ Actualmente el metro se define en función del segundo y de la velocidad de la luz. La definición del segundo se basa en una transición hiperfina del Cesio 133 mientras que para la velocidad de la luz se toma este valor como exacto.

una teoría unificada que contemple de forma coherente a todas las estructuras e interacciones de la naturaleza.

Los textos sobre esta materia [Bergmann, Brédov et al., D'Inverno, Gómez, Jackson, Konopinski, Landau y Lifchitz FT, Matveyev, Panofsky y Phillips] hacen uso de convenios, notaciones y nomenclatura muy diversos . Los utilizados aquí, se establecen en esta revisión y en los apéndices I y II.

1.2. Revisión histórica

La física clásica se ocupa de la descripción de los fenómenos físicos con respecto a referencias adecuadas de espacio y de tiempo — *Sistemas de referencia* — y su correlación mediante leyes físicas. Se entiende genéricamente que un fenómeno físico es un conjunto de sucesos elementales, o acontecimientos, entre los cuales existe una relación causal. Las leyes físicas constituyen la expresión, fundamentalmente en lenguaje matemático, de la evolución básica de dichos fenómenos. En el desarrollo de la Física cabe distinguir a dos tipos de participante, el observador- experimentador y el teórico, aunque a veces se funden en uno solo; el primero prepara las experiencias y describe su evolución, registrando los distintos sucesos con la ayuda de un metro y un reloj y el segundo expresa los fenómenos y su interrelación mediante leyes de carácter "universal". Una forma de expresar esta universalidad es mediante principios de relatividad, los cuales determinan para qué familia de observadores las leyes establecidas son válidas. El principio de relatividad de Galileo — o Galileo-Newton — está basado en conceptos absolutos del espacio y del tiempo. A finales del siglo pasado se pone de manifiesto que este principio, si bien es compatible con las leyes de Newton, no lo es con las de Maxwell, lo que conduce a la siguiente disyuntiva:

- Si las leyes de Newton son válidas en todos los sistemas inerciales y, por lo tanto, las coordenadas se transforman según las transformaciones de Galileo, las ecuaciones del campo electromagnético varían de un sistema inercial a otro, por lo que debe existir un sistema privilegiado, el del *Ether*, en el que las ecuaciones de Maxwell se cumplen en su forma usual y con respecto al cual la velocidad de la luz es precisamente c.

- Si las leyes de la física son invariantes frente a las transformaciones de Galileo, las del electromagnetismo han de ser modificadas en consecuencia.

- Existe un principio de relatividad distinto al de Galileo que mantiene invariantes a las leyes de Maxwell. Es preciso reformular las leyes de la mecánica.

Einstein, de acuerdo con la tercera opción, postula unos nuevos principios de relatividad, el segundo de los cuales establece la invarianza de la velocidad de la luz , que encuadran adecuadamente a las ecuaciones de Maxwell pero que exigen una revisión de la mecánica. El rango de universalidad de las leyes se extiende como consecuencia de una concepción de carácter no absoluto del espacio-tiempo. El observador relativista puede, dentro de este contexto, prescindir de los metros y ordenar espacialmente dos sucesos, ocurridos en dos puntos determinados, midiendo el tiempo invertido por la radiación electromagnética en un viaje de ida y vuelta entre dichos puntos², como se muestra en la figura 1.2.

²Este es el principio empleado por los radares, en la banda de las microondas, y por los taquímetros actuales, en la banda óptica.

Las teorías de la relatividad tratan de como distintos observadores ven el transcurso de una experiencia determinada. Proporcionan, por lo tanto, las leyes de transformación de todos los parámetros y magnitudes físicas que intervienen en la misma. El principio de relatividad de Galileo establece que las leyes de la mecánica son expresadas de una forma única por una familia de observadores que están en reposo con respecto a unos sistemas de referencia privilegiados denominados *Sistemas Inerciales*. Estos son los sistemas en los que se cumplen las leyes de Newton de inercia, fuerza y reacción. Las inconsistencias que resultan del intento de adaptación de la relatividad de Galileo al electromagnetismo llevan a Einstein a proponer sus principios de relatividad restringida, sustentados sobre el mismo conjunto de sistemas de referencia inerciales que los de Galileo. Más adelante, en su teoría general, eliminará todo privilegio entre sistemas de referencia.

Como principios previos a los de relatividad deben citarse los de HOMOGENEIDAD e ISOTROPÍA, según los cuales *el espacio es isótropo y homogéneo y el tiempo homogéneo*. Esto significa que una cierta experiencia, realizada en las mismas condiciones iniciales y de contorno, transcurre de la misma manera cualquiera que sea el lugar, orientación e instante inicial de su ejecución.

1.2.0.1. Electromagnetismo y relatividad

Como se vió en el tomo anterior, el electromagnetismo en el vacío puede expresarse mediante un conjunto de ecuaciones de campo, las de Maxwell, más la ley de fuerza de Lorentz. Maxwell deduce en principio dichas ecuaciones basándose en un modelo mecánico del *Ether luminífero*, medio hipotético a través del cual se supone que se propaga la interacción electromagnética, aunque más tarde, en vista a las dificultades conceptuales impuestas por los modelos posibles del ether, prescinde de éste para enunciar sus leyes de forma análoga a como hoy la conocemos. En el vacío, estas ecuaciones son

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.1a)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.1c)$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.1d)$$

y la ley de fuerza

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (1.2)$$

Dentro del marco de la relatividad de Galileo, las leyes de transformación de los campos son

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \quad (1.3a)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} \quad (1.3b)$$

3

Pero estas leyes de transformación, aunque aplicables y útiles en el rango ya mencionado de bajas velocidades, no dejan de presentar dificultades conceptuales porque son el resultado de imponer a los campos un principio de relatividad que las ecuaciones de Maxwell necesariamente incumplen⁴. Efectivamente, la ecuación de onda para cualquier componente cartesiano ϕ de los campos, en regiones en las que $\rho = 0$ y $\vec{j} = 0$, es

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0 \quad , \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (1.4)$$

La forma de esta ecuación, como es fácil comprobar, no es invariante frente a las transformaciones de Galileo, debido a que en ella aparece la velocidad de la luz c (Véanse los problemas 1-1 y 1-2). Como cualquier otra velocidad, ésta se transforma según la ley de composición de velocidades, $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{V}$, al pasar a otro sistema de referencia. Si las transformaciones de Galileo son aplicables a las leyes de Maxwell, la forma de estas últimas es variable y debe ser posible la medida de los distintos valores de c cuando se cambia de sistema inercial. En particular, debe ser posible medir la velocidad de la Tierra con respecto al sistema privilegiado del Ether, o sistema absoluto, en el cual dichas ecuaciones tienen la forma canónica usual y con respecto al cual la luz se propaga con velocidad c .

La controversia suscitada en su tiempo es objeto ya de la historia y puede verse en [Jackson, Panofsky y Phillips, Whittaker]. La primera experiencia encaminada a determinar la velocidad de la Tierra con respecto al sistema del Ether se debe a Michelson y son muy numerosas y variadas las realizadas desde entonces. A pesar de que la Tierra circula alrededor del Sol con una velocidad de unos 30 km.s^{-1} los resultados indican que la velocidad de la luz es invariante hasta límites del orden del cm.s^{-1} [Ohanian].

De las hipótesis emitidas para justificar el resultado negativo de dichas experiencias, aferrándose sin embargo a la concepción absoluta del espacio y del tiempo, citaremos solamente la de Lorentz, según la cual los metros se contraen como consecuencia de su movimiento a través del Ether, debido a la resistencia material del mismo, y la de Poincaré, que postula una ralentización de los

³En las transformaciones en las que el orden cíclico de los vectores de base se invierte, $\vec{B}' = -\vec{B}$.

⁴Si se aproxima hasta el primer orden en $\beta \equiv V/c$ a la ley de Einstein para la transformación del campo magnético, se obtiene $\vec{B}' \simeq \vec{B} - \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}$ (2.60); para obtener el resultado galileano es necesario, además, suponer que $c \rightarrow \infty$. No se debe olvidar que las ecuaciones de Maxwell no son compatibles con las transformaciones de Galileo. Esto hace que, en el límite de baja velocidad, sea a veces más apropiada la utilización de esta expresión que la galileana.

relojes en movimiento. La primera hipótesis justifica el resultado negativo de la experiencia de Michelson con interferómetros de brazos iguales y la segunda el de la misma experiencia pero con brazos desiguales. Entrambas dan lugar a las transformaciones cinemáticas que hoy se conocen como *Transformaciones de Lorentz*, las cuales coinciden formalmente con las utilizadas en el contexto de la relatividad especial aunque responden a una concepción del espacio-tiempo radicalmente distinta. Einstein analiza críticamente las nociones tradicionales del tiempo y del espacio y eleva al rango de postulado el resultado experimental de que la medida de la velocidad de la luz es independiente del observador.

1.3. Postulados de la Relatividad Restringida

Einstein se cuestiona la aplicabilidad de la relatividad de Galileo al campo electromagnético. Piensa, además, que ninguna experiencia es puramente electromagnética ya que en la misma, de una forma u otra, se hace uso de todas las ramas de la física y, por supuesto, el campo electromagnético es parte esencial de las mismas. En este sentido, puede decirse que la teoría de la relatividad empieza a fraguarse a partir de la cuestión de cómo es posible en la práctica determinar si dos sucesos son o no simultáneos. El resultado de este análisis se concreta en dos postulados, el de *Relatividad* y el de la *Constancia de la velocidad de la luz*, que pueden enunciarse de la forma:

1º - Relatividad: LAS LEYES DE LA FÍSICA TIENEN FORMA INVARIANTE PARA TODOS LOS OBSERVADORES INERCIALES.

2º - Constancia de la velocidad de la luz: LA VELOCIDAD DE LA LUZ ES UNA CONSTANTE INVARIANTE PARA TODOS LOS OBSERVADORES INERCIALES.

A partir de estos postulados y de otros, que se recabarán en su caso, se reformulará la mecánica y el electromagnetismo. Aunque este último seguirá siendo válido en la forma previamente conocida, al situarse en un nuevo contexto relativista su interpretación y potencialidad se verán fuertemente realzadas.

1.4. Ordenación espacial y temporal

En este apartado, previo al desarrollo formal de las trasformaciones de Lorentz, se introducen de forma cualitativa, con ayuda de *Experiencias pensadas*, los fundamentos de la nueva concepción del espacio y del tiempo introducida por Einstein. En el apéndice A se puede ver como los postulados permiten diseñar otras experiencias pensadas de las que se deducen cuantitativamente dichas transformaciones y los conceptos básicos de la dinámica relativista.

Idealmente, un *Suceso* elemental es algo que ocurre en un punto y en un instante. La definición de una magnitud física lleva consigo el establecimiento de un proceso operacional para su medida. La definición operacional correspondiente lo delimitaría en un entorno de espacio y de tiempo de dimensiones inapreciables para los instrumentos de medida empleados. La ordenación espacial y temporal de estos sucesos es la tarea primaria de un observador inercial.

1.4.1. Simultaneidad local

No se puede definir y medir el tiempo si no se especifica de forma inequívoca un proceso para la determinación de si dos sucesos guardan entre sí una relación de anterioridad, posterioridad o *Simultaneidad*: son necesarios mecanismos prácticos para poner en hora y acordar el ritmo de los relojes.

No es difícil imaginar instrumentos que determinen la *Simultaneidad local* de dos sucesos A y B: si han ocurrido simultáneamente y en el mismo punto para un cierto observador inercial (Por ejemplo, uno del sistema \mathcal{S}). Todos los inscritos en el Registro Civil como nacidos en un día determinado pueden considerarse como nacidos en simultaneidad local, en el mismo día y en la localidad en que reside el Registro. Los procesos de medida clásicos tienen incertidumbres y errores que, idealmente, pueden refinarse cuanto sea necesario. Un instrumento con estas características recibe el nombre de *Detector de coincidencias* y típicamente sería un dispositivo de pequeñas dimensiones, Δl^3 , que se activa cuando dos fotones inciden en su interior en un mismo intervalo temporal Δt , como se muestra en la figura 1.1. En la figura 1.1-a se muestra al detector de coincidencias, el cual se activa cuando los fotones correspondientes a los sucesos A y B inciden dentro del mismo intervalo temporal de dimensión Δt . En 1.1-b se representa a la señal que divide al tiempo en intervalos Δt ; el suceso A es anterior al B y al C y estos últimos son simultáneos dentro de la incertidumbre establecida. Se supone que A, B y C han tenido lugar en la posición del detector de coincidencias. La simultaneidad local tiene carácter absoluto puesto que las activaciones de un detector de coincidencias son objetivas e independientes del observador.

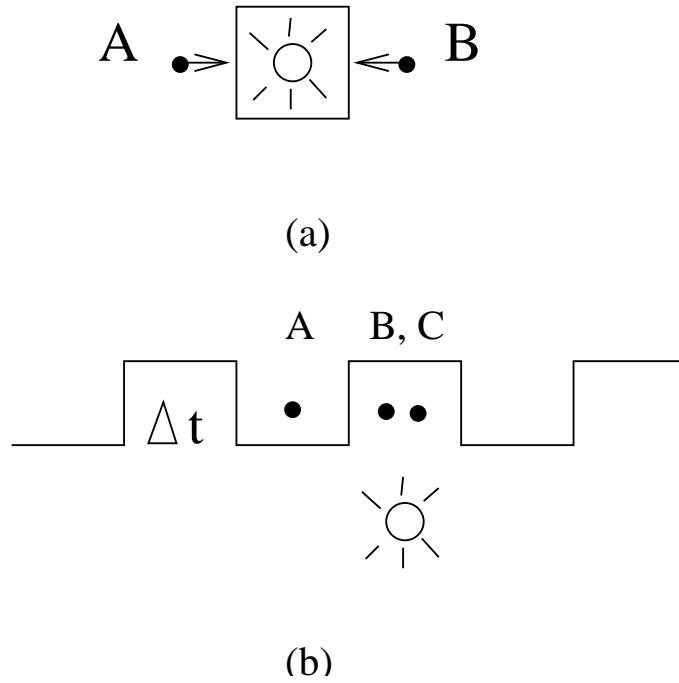


Figura 1.1: Detector de coincidencia

1.4.2. Ordenación espacial de sucesos en un sistema de referencia

Supondremos que en todos los puntos de un sistema inercial \mathcal{S} en que sea necesario se encontrará un observador inercial de dicho sistema. La posición que ocupa cada uno de ellos puede fijarse por el que está situado en el origen con la ayuda de un metro ordinario, pero el segundo postulado le ofrece una mejor herramienta. Esta es la radiación electromagnética, que viaja en línea recta con una velocidad exacta c . La figura 1.2 representa a un observador galileano, que se sirve de un reloj y un metro, y otro einsteniano que ha sustituido a este último por un radar con el que mide el tiempo invertido por la luz en un viaje de ida y vuelta.

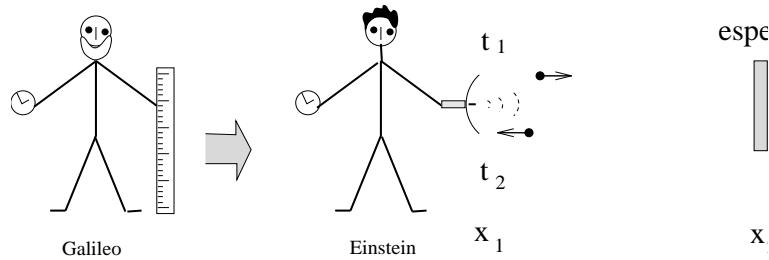


Figura 1.2: Observadores

El radar lanza un fotón en t_1 , desde x_1 , hacia el espejo colocado en la posición x_2 en la que ha ocurrido el suceso y lo recibe, después de ser reflejado, en el instante t_2 . La distancia Δx entre el observador y el punto x_2 es

$$\Delta x = \frac{c}{2} \Delta t \quad (1.5)$$

El tiempo puede ser medido en metros-luz o el espacio en segundos-luz. Como se verá más adelante, el espacio y el tiempo se ligan de una forma más íntima que en la relatividad de Galileo por lo que resulta natural representar al tiempo con dimensiones espaciales a través de la coordenada ct .

1.4.3. Simultaneidad no local y puesta en hora de los relojes

Como se muestra en la figura 1.3, entre dos sucesos A, ocurrido en x_a , y B, ocurrido en x_b , según los observadores de un sistema \mathcal{S} concreto, puede establecerse una relación de simultaneidad. Entre estos sucesos se da una *Simultaneidad no local*, cuando dos fotones, el a, emitido en simultaneidad local con el suceso A, y el b, emitido en simultaneidad local con el B, llegan en simultaneidad local al punto $x_c = (x_b + x_a)/2$, equidistante de x_a y x_b . Cuando dos sucesos ocurren en dos puntos distintos de un sistema de referencia, se hace imprescindible el uso de mensajeros y de reglas que permitan establecer un orden de precedencia temporal. Si el mensajero poseyera velocidad infinita, el detector de coincidencias podría colocarse en cualquier punto y el tiempo tendría el carácter absoluto que le asigna la relatividad de Galileo. Ese mensajero infinitamente veloz no existe, que se sepa, por lo que resulta afortunado que, aunque con velocidad finita, la luz sea un mensajero perfectamente fiable.

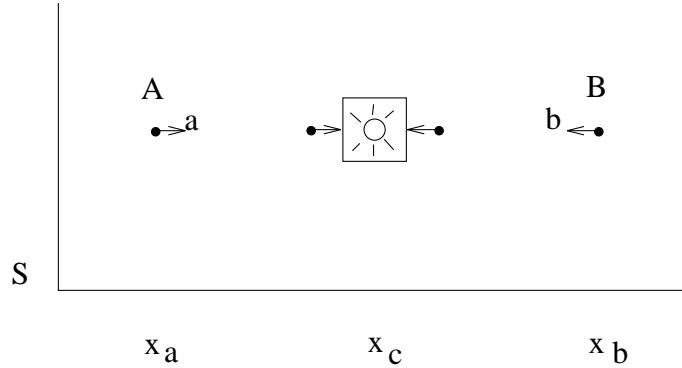


Figura 1.3: Simultaneidad no local

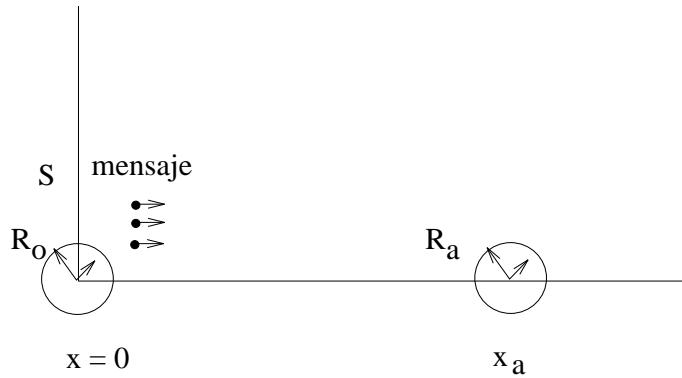


Figura 1.4: Sincronización de relojes

Una alternativa para la ordenación temporal de los sucesos consiste en que los observadores que detectan los sucesos en las posiciones que ocupan, emitan un mensaje, identificando su posición, en simultaneidad local con la ocurrencia de los mismos. El observador patrón, situado en el origen de S , podrá corregir el tiempo de llegada de los mensajes, de acuerdo con 1.5, y ordenar a todos los sucesos en el espacio y en el tiempo. Procediendo a la inversa, según se muestra en la figura 1.4, es suficiente con que en cada sistema de referencia exista un reloj patrón que radie la hora: el observador situado en x_a la recibirá con el retraso correspondiente, que es conocido para él. En la práctica, cada observador tiene su propio reloj que, de cuando en cuando, regula con respecto al reloj patrón. Si le atrasa puede acelerar el ritmo, ajustando la tensión del muelle, o variando la capacidad de condensador que está en paralelo con el cuarzo, y adelantar la fase mediante la corona del reloj. En adelante supondremos que todos los observadores de un mismo sistema de referencia inercial poseen un reloj puesto en hora con respecto al patrón, con el que puede ordenar temporalmente a los sucesos locales.

1.4.4. Relatividad de la simultaneidad

Hasta ahora se ha visto como, con ayuda del postulado de la constancia de la velocidad de la luz, los sucesos observados desde un cierto sistema de referencia pueden ser ordenados espacial y temporalmente. En la relatividad de Galileo, las distancias espaciales y temporales entre los lugares e instantes en que ocurren dos sucesos tienen carácter absoluto, son independientes del sistema inercial desde el que se miden. De lo tratado anteriormente se desprende que ahora, en particular, el tiempo no podrá considerarse como absoluto: no es posible extender el concepto de simultaneidad a los demás sistemas inerciales. Solo los sucesos localmente simultáneos, lo son para cualquier otro observador. La siguiente experiencia pensada [Bergmann] pondrá de manifiesto el carácter relativo de la simultaneidad.

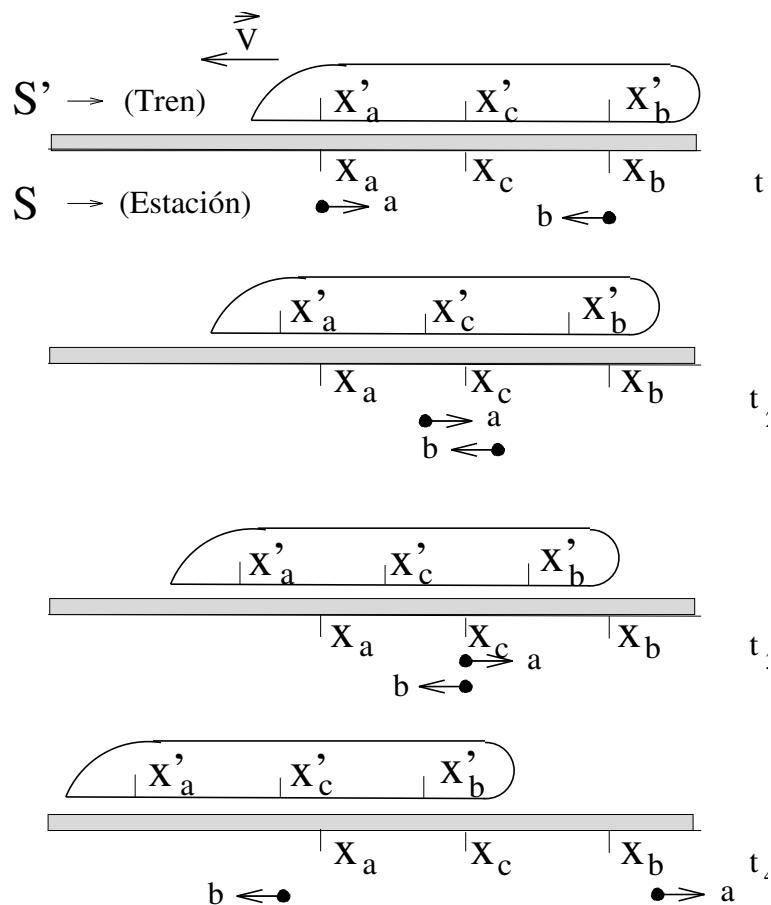


Figura 1.5: Relatividad de la simultaneidad

En la figura 1.5 se representan distintos instantes del paso de un tren por una estación. En la estación, sistema \mathcal{S} , se marcan los puntos x_a y x_b así como el punto medio entre ambos x_c . En una pasada previa se marcan los puntos homólogos x'_a , x'_b y x'_c de \mathcal{S}' , que son aquellos que, en un instante determinado t de \mathcal{S} , se encuentran justo en las posiciones de x_a , x_b y x_c respectivamente.

(caben diversas formas de efectuar la operación anterior como, por ejemplo, disparar simultáneamente en \mathcal{S} tres láseres situados en x_a , x_b y x_c , cuyos haces marcarán las señales correspondientes en x'_a , x'_b y x'_c). Invocando el principio de homogeneidad espacial puede asegurarse que los observadores del tren encontrarán que el punto x'_c está a igual distancia de x'_a y x'_b . Una vez preparada la experiencia, se procede a un segundo pase del tren cuya descripción desde \mathcal{S} es la que sigue:

t_1 - En este instante tienen lugar los sucesos de la coincidencia de los puntos $x_a-x'_a$ y $x_b-x'_b$. En simultaneidad local con $x_a-x'_a$ se emite el fotón a y en simultaneidad local con $x_b-x'_b$ el b.

t_2 - El fotón a llega a x'_c . Como los dos fotones viajan a velocidad finita c y el tren lo hace hacia la izquierda con velocidad V , el fotón b aún no ha llegado a dicho punto.

t_3 - Los fotones, que partieron simultáneamente en \mathcal{S} desde x_a y x_b , llegan al punto medio x_c .

t_4 - El fotón b llega a x'_c .

La conclusión de esta experiencia es que los sucesos $x_a-x'_a$ y $x_b-x'_b$, que son simultáneos en \mathcal{S} , no lo son desde \mathcal{S}' porque el fotón a, que parte de x'_a , equidistante de x'_c con respecto a x'_b , llega antes que el b a x'_c . El postulado de la constancia de la velocidad de la luz exige que la velocidad de a y b, medida en \mathcal{S}' , sea c , luego $x_a-x'_a$ ha ocurrido antes que $x_b-x'_b$, según se aprecia desde este sistema. Luego la ordenación temporal no es absoluta y debe renunciarse a la ley de transformación de coordenadas de Galileo. Mediante experiencias de este tipo pueden deducirse las nuevas transformaciones, como puede verse en el apéndice A.

1.5. Transformaciones de Lorentz; espacio de Minkowski

Una vez comprobado que los postulados de Einstein no concuerdan con las transformaciones de Galileo, se procede a la búsqueda de unas nuevas transformaciones que sean compatibles con éstos y con los principios de homogeneidad e isotropía. Dada la relatividad de la simultaneidad, las variables espaciales y temporales deberán aparecer mezcladas en un espacio-tiempo tetradimensional.

Previamente conviene precisar algunos conceptos. De acuerdo con lo expuesto en el apéndice I sobre espacios puntuales, se buscan las leyes de transformación de coordenadas para los puntos X_4 de un espacio puntual \mathcal{M}_4 , que se denominará espacio de Minkowski. Este está asociado a un espacio vectorial euclidiano M_4 de cuatro dimensiones, como se muestra en la figura 1.6. Sin otro objeto que el de facilitar la exposición, se denominará transformación *Directa* a la $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$, donde el sistema de referencia \mathcal{S} está constituido por un punto origen O_4 y una base vectorial \vec{e}_i , $i = 0, 1, 2, 3$ ⁵, para las coordenadas contravariantes, o su adjunta \vec{e}^i para las covariantes.

$$\mathcal{S} \equiv \begin{cases} (O_4, \vec{e}_i) \\ (O_4, \vec{e}^i) \end{cases}, \quad \mathcal{S}' \equiv \begin{cases} (O'_4, \vec{e}'_j) \\ (O'_4, \vec{e}'^j) \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3$$

Una descripción de este tipo es innecesaria para poner de manifiesto los fundamentos físicos del problema, por lo que, también en este caso, es preferible limitarse a las transformaciones estándar

⁵Se utilizarán índices latinos para enumerar las cuatro dimensiones y griegos para las tres espaciales.

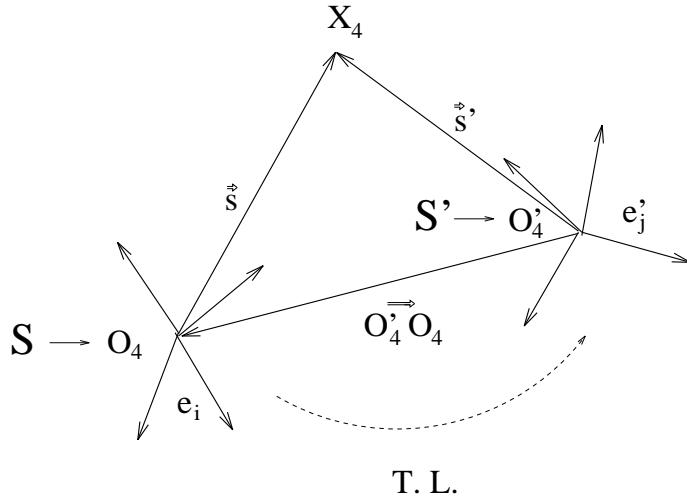


Figura 1.6: Transformaciones generales de Lorentz

que se representan de forma tridimensional en la figura 1.7. Estas transformaciones cumplen las siguientes condiciones:

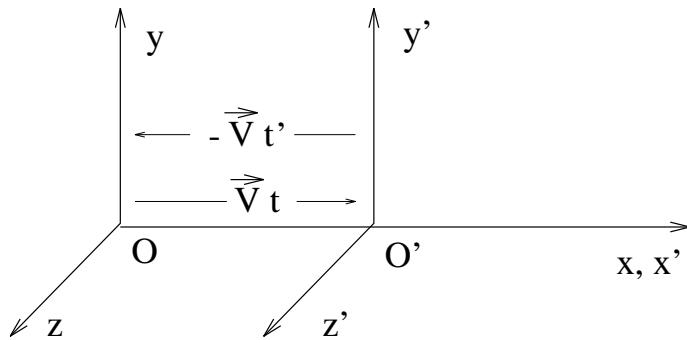


Figura 1.7: Transformaciones estándar de Lorentz

A - Las coordenadas espaciales son cartesianas, los ejes x y x' coinciden y los y , y' y z , z' son paralelos y tienen la misma dirección.

B - Las escalas empleadas en ambos sistemas son las mismas.

C - El origen espacial de S' , $O' = (x' = 0, y' = 0, z' = 0)$, se mueve con respecto a S , en la dirección positiva del eje x , con velocidad V . De acuerdo con el principio de relatividad, el origen espacial de S , $O = (x = 0, y = 0, z = 0)$, se mueve con velocidad V en la dirección negativa del eje x' .

D - O y O' coinciden en $t = t' = 0$, luego los orígenes tetradimensionales permanecen invariantes, $O'_4 = O_4$ ⁶. Esta circunstancia hace que las transformaciones de coordenadas esténdar presenten una

⁶Las transformaciones de Galileo se desdoblan en dos, la del tiempo, monodimensional, y la del espacio, tridimensional.

forma análoga a la de las transformaciones de base, por lo que cualquier vector tetradimensional, o *Tetravector*, será invariante vectorial frente a las mismas.

Para representar a los puntos del espacio de Minkowski, también llamados *Puntos del Universo*, se definirán las siguientes coordenadas contravariantes⁷:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (1.6)$$

En lo sucesivo, el cuadrado de una coordenada se indicará de la forma $(x^i)^2$ y el vector de posición tetradimensional se representará por \vec{s} . Con la expresión

$$\vec{s} \rightarrow \begin{cases} (x^0, x^1, x^2, x^3) & \rightarrow (ct, \vec{r}) \\ (x_0, x_1, x_2, x_3) & \rightarrow (ct, -\vec{r}) \end{cases} \quad (1.7)$$

se indica que el tetravector de posición puede representarse mediante coordenadas contravariantes o covariantes⁸ y que las tres últimas contravariantes coinciden con las del "vector" tridimensional de posición⁹. Con la métrica que se utiliza en este texto, las coordenadas covariantes espaciales son iguales a las contravariantes pero de signo contrario.

De acuerdo con I.36, las leyes de transformación son

$$x'^j = o'^j + a_i^j x^i, \quad i, j = 0, 1.., 3 \quad (1.8)$$

donde se tiene en cuenta que las coordenadas o'^j del O_4 con respecto a O'_4 son nulas. Según ésto, \vec{s} no es invariante frente a las transformaciones generales de coordenadas, pero sí frente a las estándar. Sin embargo, el vector de posición mutua entre dos puntos y el vector de desplazamiento elemental en el espacio de cuatro dimensiones

$$\Delta \vec{s}_{21} = \vec{s}_2 - \vec{s}_1, \quad d \vec{s} \quad (1.9)$$

si son vectores invariantes. En lo sucesivo, cuando se hable de magnitudes tensoriales se dará por supuesto que son invariantes tensoriales frente a las trasformaciones de coordenadas, por lo que se estará excluyendo a magnitudes como \vec{s} que no lo son.

La aplicación de los principios y postulados propuestos permitirá la determinación de los coeficientes a_i^j que, según se ha visto, juegan aquí el doble papel de coeficientes de la transformación de base vectorial y de la transformación de coordenadas.

La homogeneidad del espacio y del tiempo exige que los coeficientes de la transformación sean independientes de las coordenadas ya que, en caso contrario, ésta sería distinta para cada punto. Luego los coeficientes solo pueden depender de la velocidad relativa entre los dos sistemas.

sional. En esta última, los orígenes se trasladan en función del tiempo.

⁷En la bibliografía pueden encontrarse definiciones distintas a las que aquí se emplean.

⁸Las coordenadas covariantes solo podrán introducirse adecuadamente cuando se establezca la métrica del espacio de Minkowski, lo cual se hará más adelante. Se adelanta su mención a este lugar como mera referencia.

⁹ \vec{r} no es un vector del espacio de Minkowski, pero se seguirá denominándolo como vector.

$$a_i^j = a_i^j(V) \quad (1.10)$$

Esto implica que las transformaciones son lineales y conservan el carácter rectilíneo de las trayectorias iniciales, de acuerdo con la ley de inercia. En primer lugar se determinarán los coeficientes correspondientes a las coordenadas transversales $y = x^2$ y $z = x^3$ y a continuación los de las dos primeras $ct = x^0$ y $x = x^1$.

Coeficientes de las coordenadas transversales :

Para $y = x^2$

$$x'^2 = y' = a_0^2 ct + a_1^2 x + a_2^2 y + a_3^2 z$$

Puesto que en las transformaciones estándar coinciden los planos $y = 0$ e $y' = 0$ y en dichos planos el resto de las coordenadas son arbitrarias

$$a_0^2 = a_1^2 = a_3^2 = 0 \Rightarrow y' = a_2^2 y$$

Dado que no se contemplan cambios de escala ni inversión de ejes, $= a_2^2 = +1$.

El principio de isotropía establece la equivalencia de las coordenadas y y z , por lo que éstas se transforman según las expresiones

$$\begin{aligned} y' &= y &&,, \\ x'^2 &= x^2 &&,, \\ &&& x'^3 = x^3 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Coeficientes de las dos primeras coordenadas :

Para las dos primeras coordenadas se tiene

$$x'^0 = ct' = a_i^0 x^i = a_0^0 ct + a_1^0 x + a_2^0 y + a_3^0 z \quad (1.12a)$$

$$x'^1 = x' = a_i^1 x^i = a_0^1 ct + a_1^1 x + a_2^1 y + a_3^1 z \quad (1.12b)$$

Los planos $x' = cte$ se mueven con respecto a los $x = cte$ con velocidad V ¹⁰. En particular, el plano $x' = 0$ está definido por la coordenada $x = \beta ct$ en \mathcal{S} , siendo arbitrarias las coordenadas transversales. De 1.12b se deduce que

$$a_2^1 = a_3^1 = 0 \quad , \quad \beta = -\frac{a_0^1}{a_1^1}$$

¹⁰En lo que sigue se hará uso preferente de la velocidad normalizada $\beta = V/c$.

Dejando para más adelante la determinación de a_1^1 y anotándolo como γ .

$$a_1^1 \equiv \gamma, \quad a_0^1 = -\gamma\beta$$

y

$$x'^1 = x' = -\gamma\beta ct + \gamma x$$

Si se elimina ct entre esta ecuación y 1.12a, se tiene que

$$ct' = a_0^0 \frac{\gamma x - x'}{\gamma\beta} + a_1^0 x + a_2^0 y + a_3^0 z$$

Por el principio de relatividad, los puntos de los planos $x = cte$ (las coordenadas y y z de este plano son arbitrarias), en particular del $x = 0$, se mueven con respecto al sistema S' con velocidad $-V$, por lo que, visto desde S' , la coordenada x' de este plano viene dada por la ecuación $x' = -\beta ct'$, de donde resulta que

$$a_2^0 = a_3^0 = 0, \quad a_0^0 = \gamma$$

Reescribiendo lo obtenido hasta ahora y simplificando la notación

$$ct' = \gamma ct + A x \tag{1.13a}$$

$$x' = -\gamma\beta ct + \gamma x \tag{1.13b}$$

El segundo postulado exige que la velocidad de la luz en cualquiera de los dos sistemas sea c , por lo que la trayectoria de un fotón, emitido en el origen espacio-temporal ($t = t' = 0, \vec{r} = \vec{r}' = \vec{0}$) en la dirección del eje x , tiene por ecuaciones

$$x' = ct', \quad x = ct$$

Sustituyendo 1.13a y 1.13b en la primera de las ecuaciones e identificando los coeficientes de x y t en la segunda, resulta

$$A = -\gamma\beta$$

y

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \tag{1.14a}$$

$$x' = \gamma(-\beta ct + x) \quad (1.14b)$$

Las transformadas inversas pueden obtenerse resolviendo el sistema de ecuaciones anteriores para ct y x

$$ct = \frac{\gamma}{\Delta} (ct' + \beta x') \quad (1.15a)$$

$$x = \frac{\gamma}{\Delta} (\beta ct' + x') \quad (1.15b)$$

donde $\Delta = \gamma^2(1 - \beta^2)$ es el determinante de los coeficientes. Pero estas transformaciones también pueden deducirse de las directas, de acuerdo con el postulado de relatividad, intercambiando las variables de \mathcal{S} con las de \mathcal{S}' y cambiando el signo a β . Comparando el resultado con las ecuaciones anteriores, se tiene que $\Delta = 1$ y

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 1 \quad (1.16)$$

donde se considera $\beta < 1$ y $\gamma > 1$ porque para $\beta \rightarrow 1$, $\gamma \rightarrow \infty$ y γ se hace imaginario para $\beta > 1$. Se ha elegido la raíz positiva para γ porque las transformaciones estándar no invierten el sentido de los ejes.

Resumiendo lo anterior, las transformaciones de Lorentz pueden escribirse con diversas notaciones¹¹

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \frac{V}{c^2}x) \\ x' &= \gamma(-Vt + x) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (1.17)$$

o, de forma general, según 1.8 y el apéndice I,

$$x'^j = a_i^j x^i \quad (1.18a)$$

$$x^i = b_j^i x'^j \quad (1.18b)$$

La transformación directa 1.18a puede ser expresada en forma matricial, utilizando al índice superior para las filas y al inferior para las columnas,

¹¹Véase en el problema 1-4 la expresión de estas transformaciones cuando la velocidad relativa entre sistemas tiene dirección arbitraria.

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ \vdots \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^3 \end{pmatrix} , , \quad \begin{pmatrix} a_i^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

La matriz $\begin{pmatrix} b_j^i \end{pmatrix}$ de la transformación inversa se obtiene sin más que cambiar β por $-\beta$.

Las propiedades básicas de las transformaciones son las que siguen:

- Los coeficientes son independientes de las coordenadas y, por lo tanto, la transformación es lineal y conserva la forma de las trayectorias rectilíneas.

- Puesto que $\Delta = 1$, $|a_j^i| = |b_j^i| = 1$.

- γ es real para $V < c$ ($\beta < 1$) e imaginaria en caso contrario. Para $\beta = 1$ la transformación es singular puesto que $\gamma \rightarrow \infty$. Aunque se especula con la existencia de partículas con velocidad superior a la de la luz (superlumínicas o taquiones), éstas conducen a paradojas ¹² incompatibles con el principio de causalidad, por lo que aquí solamente se consideran partículas *Lumínicas* ($\beta = 1$) y *Sublumínicas* ($\beta < 1$) o tardones.

- La velocidad de la luz en el vacío c aparece como límite de la velocidad de interacción entre cuerpos materiales.

- Para $\beta \ll 1$ y $c \rightarrow \infty$ las transformaciones de Lorentz equivalen a las de Galileo ¹³.

1.5.1. Invarianza del intervalo; producto escalar y métrica en el espacio de Minkowski

El segundo postulado de Einstein hace posible el establecimiento de una métrica en el espacio de Minkowski.

Para cualquier par de sucesos A y B, ocurridos respectivamente en $X_a = (t_a, \vec{r}_a)$ y $X_b = (t_b, \vec{r}_b)$

$$\Delta s_{ba}^2 \equiv c^2 (t_b - t_a)^2 - (x_b - x_a)^2 - (y_b - y_a)^2 - (z_b - z_a)^2 = c^2 \Delta t_{ba}^2 - \Delta r_{ba}^2 \quad (1.20)$$

es un invariante escalar, como puede comprobarse mediante las transformaciones de Lorentz ¹⁴. En particular, si A y B corresponden al paso de un fotón por los puntos del universo X_a y X_b , su valor será 0 puesto que el fotón viaja a la velocidad de la luz. En particular, para puntos próximos

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - dr^2 \quad (1.21)$$

¹²Un individuo podría viajar al pasado y matar a su progenitor antes de que lo engendrara.

¹³Problema 1-3. La relatividad de Galileo presupone que la velocidad límite de propagación de las interacciones es ilimitada.

¹⁴Problema 1-13.

también es invariante escalar.

Esto permite definir un producto escalar en el espacio de Minkowski y, por consiguiente, una métrica.¹⁵:

$$ds^2 \equiv d\vec{s} \cdot d\vec{s} = g_{ij} dx^i dx^j = g^{ij} dx_i dx_j = dx_i dx^j \quad (1.22)$$

El tensor métrico resultante es \tilde{G} , cuyas componentes son

$$(g_{ij}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

lo que le presta al espacio de Minkowski el carácter de euclídeo. Al mismo tiempo, las coordenadas covariantes de un punto y las componentes covariantes de un vector se obtienen, a partir de las contravariantes, según

$$x_i = g_{ij} x^j \quad (1.24)$$

y

$$x_0 = ct, \quad x_1 = -x, \quad x_2 = -y, \quad x_3 = -z \quad (1.25)$$

Así, pues, el desplazamiento elemental en el espacio de cuatro dimensiones, como cualquier tetrávector (cuadrivector), podrá expresarse en función de las coordenadas covariantes o contravariantes, según convenga:

$$d\vec{s} \rightarrow \begin{cases} (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) & \rightarrow (c dt, d\vec{r}) \\ (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) & \rightarrow (c dt, -d\vec{r}) \end{cases} \quad (1.26)$$

Se define como *Intervalo espacio-temporal* entre dos sucesos cualesquiera a

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2}, \quad ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dr^2} \quad (1.27)$$

cuyo cuadrado es invariante.

¹⁵Vease el apartado I.1.4.

1.5.1.1. Clasificación de los intervalos

La invarianza del cuadrado del intervalo permite establecer una clasificación absoluta del tipo de intervalo según Δs^2 sea mayor, menor o igual a cero.

$$\Delta s^2 \rightarrow \begin{cases} > 0 & , c^2 \Delta t^2 > \Delta r^2 \rightarrow \text{Tipo temporal} \\ = 0 & , c^2 \Delta t^2 = \Delta r^2 \rightarrow \text{Tipo lumínico} \\ < 0 & , c^2 \Delta t^2 < \Delta r^2 \rightarrow \text{Tipo espacial} \end{cases} \quad (1.28)$$

- En los intervalos de tipo temporal, la distancia temporal entre los dos sucesos $c|\Delta t|$ es mayor que la espacial Δr : un fotón emitido en simultaneidad local con el suceso que ocurre primero, tiene tiempo de llegar al lugar donde ocurrirá el segundo suceso antes de que éste ocurra. Es posible, aunque no necesario, que entre ellos exista una relación causal directa. Dada la invarianza del cuadrado del intervalo, no será posible verlos simultáneamente desde ningún sistema inercial, pero es fácil comprobar que existe un sistema inercial desde el cual ambos sucesos pueden ser vistos ocurriendo en el mismo punto¹⁶.

- Los sucesos conectados por un intervalo de tipo lumínico solo pueden estar relacionados directamente a través de partículas lumínicas.

- Los intervalos de tipo espacial corresponden a sucesos sin relación causal directa. Existe un sistema de referencia desde el que se ven ocurrir simultáneamente, pero no es posible verlos ocurrir en el mismo lugar¹⁷.

La figura 1.8 representa, en dos dimensiones, la relación entre un suceso A_0 , ocurrido en el punto del universo $P_0 = (t_0, x_0)$, y los ocurridos en los demás puntos del universo. A estas representaciones bidimensionales se les conoce como *Diagramas de Minkowski*¹⁸.

Como puede verse en la figura, el suceso A_0 está conectado por intervalos de tipo temporal con sucesos tales como el A_p y el A_f que se hallan en el interior del *Cono de luz* y de tipo lumínico con los que están en la superficie del mismo, como el A_c . Con A_{op} está conectado por un intervalo de tipo espacial y, por lo tanto, no existe relación causal directa entre ambos.

Si A_0 corresponde al paso por P_0 de una partícula que tiene velocidad v y cuya trayectoria, o línea del universo, es la indicada en la figura, A_p corresponde al pasado de la partícula y A_f al futuro de la misma, de forma que, viajando a velocidades adecuadas $\beta_p \equiv (V/c) \leq 1$ son alcanzables todos los puntos del semicono superior, donde se encuentra el *Futuro posible de la partícula*. De forma análoga, desde el *Possible pasado* de la partícula puede alcanzarse el punto P_0 . La trayectoria de ésta forma con el eje ct un ángulo $\arctg \beta_p \leq 45^\circ$, donde $\beta_p \equiv \frac{v_p}{c}$ es su velocidad normalizada, por lo que la partícula no podrá nunca acceder a la parte exterior del cono.

¹⁶Problema 1-16.

¹⁷Problema 1-17.

¹⁸Problema 1-14.

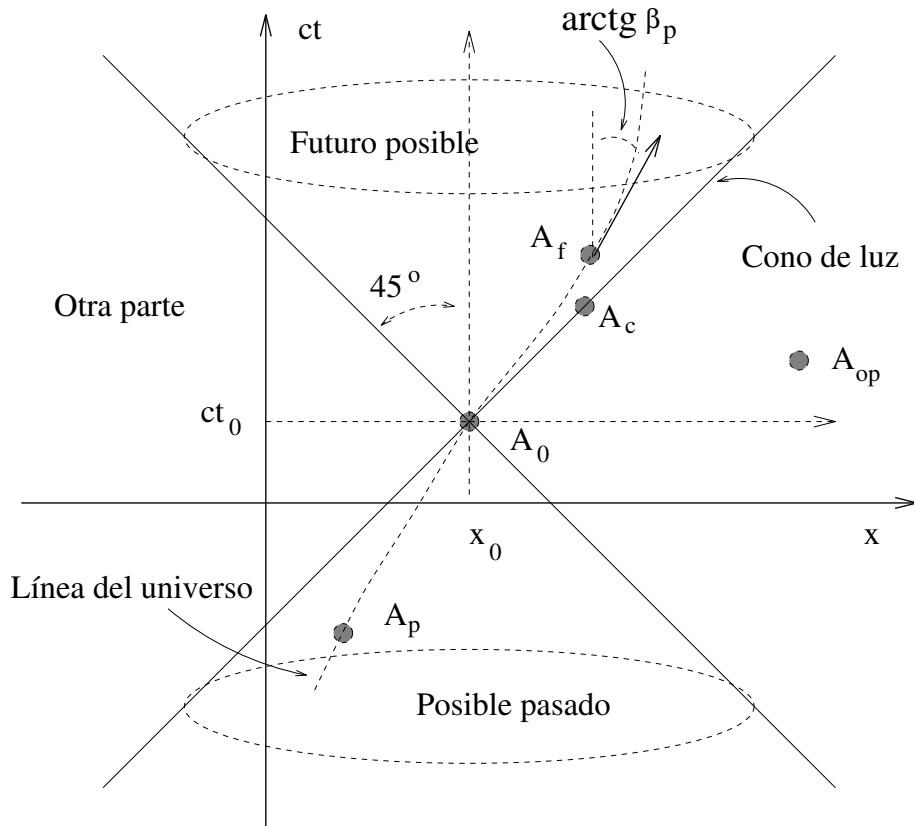


Figura 1.8: Cono de luz

1.6. Medidas

En esta sección se definirán los términos relativos a la medición del espacio-tiempo en el marco de la relatividad. Las dificultades encontradas para establecer un orden espacio-temporal con carácter universal se debe a que la métrica es necesariamente tetradiimensional. A pesar de ésto, es conveniente extender los conceptos de longitud espacial e intervalo temporal, aunque ahora carezcan del carácter absoluto que poseen en el marco de Galileo.

1.6.1. Medidas espaciales; longitud propia; Contracción de Lorentz

Ya se ha visto que la medida de distancias entre puntos de un sistema determinado de referencia no ofrece ninguna dificultad. Se considera ahora cual será la medida de un objeto unidimensional, que se denominará *Metro*, según ésta se efectúe desde un sistema u otro. Si el metro está en reposo con respecto al observador, su longitud puede determinarse únicamente, con independencia del tiempo, como la distancia que existe entre los puntos en que se hallan sus extremos. Si el metro está en movimiento, debe admitirse que la única forma razonable de definir su longitud es:

Definición 1 (Longitud de un metro medida en un sistema \mathcal{S}) Es la distancia entre los puntos P_a y P_b ocupados simultáneamente en \mathcal{S} por sus extremos.

$$l = \sqrt{(\vec{r}_b(t) - \vec{r}_a(t))^2} \quad (1.29)$$

definición que incluye como caso particular a

Definición 2 (Longitud propia de un metro) Es la longitud Λ de un metro medida en un sistema inercial Propio (sistema con respecto al cual el metro está en reposo).

Del postulado de relatividad se deduce que la longitud propia de un metro es una magnitud característica del mismo, es decir, la medida de un objeto realizada en reposo con respecto a un sistema inercial es independiente del sistema en cuestión. Como corolario del postulado de relatividad, suele invocarse el *Principio de reproducibilidad de las magnitudes propias*, según el cual, el mismo metro y el mismo reloj pueden ser utilizados para marcar intervalos espaciales y temporales propios en cualquier sistema inercial; basta con colocarlos en reposo sobre el sistema correspondiente.

Longitud de metros perpendiculares al movimiento :

La medida de un metro colocado perpendicularmente a la dirección del movimiento, la z por ejemplo, es invariante. Si Λ es la longitud propia de un metro cuyo sistema propio es \mathcal{S}'

$$\Lambda = z'_b - z'_a = z_b - z_a = l \quad (1.30)$$

Longitud de metros paralelos al movimiento :

En el caso de que dicho metro se encuentre colocado paralelamente al movimiento

$$\Lambda = x'^b - x'^a = \gamma (x_b(t) - x_a(t)) = \gamma l$$

De acuerdo con ésto, dado que $\gamma > 1$, la *Longitud no propia* (longitud medida desde un sistema no propio) resulta contraída según la relación

$$l = \frac{\Lambda}{\gamma} < \Lambda \quad (1.31)$$

por lo que la mayor longitud medida a un objeto es la propia. Este efecto se conoce como *Contracción de Lorentz-Fitzgerald*. Esta misma ley rige para intervalos elementales

$$dl = \frac{d\Lambda}{\gamma} \quad (1.32)$$

También los volúmenes no propios \mathcal{V} se verán contraídos en la misma proporción.

$$d\mathcal{V} = dx dy dz = \frac{d\mathcal{V}_0}{\gamma} \quad , \quad \mathcal{V} = \frac{\mathcal{V}_0}{\gamma} \quad (1.33)$$

donde \mathcal{V}_0 es el volumen propio.

1.6.2. Medidas de tiempo; tiempo propio de un sistema; intervalo de tiempo propio; dilatación temporal

En primer lugar se darán las siguientes definiciones asociadas a la medida del tiempo en un sistema de referencia determinado

Definición 3 (Reloj propio de un sistema) *Aquel que está en reposo con respecto al sistema.*

Definición 4 (Tiempo propio de un sistema) *El marcado por los relojes propios puestos en hora.*

Definición 5 (Intervalo de tiempo propio) *El intervalo $\Delta\tau$ marcado por un mismo reloj propio. La medida del tiempo es independiente de las coordenadas transversales, z e y , por lo que un intervalo propio puede ser medido por distintos relojes situados en un mismo plano $x = x_0$.*

Definición 6 (Intervalo de tiempo impropio) *Intervalo Δt cuyo comienzo y final está marcado por dos relojes propios situados en distintos planos $x = \text{cte}$.*

Relatividad de la simultaneidad :

Las transformaciones temporales reflejan el carácter relativo de la simultaneidad. Dos sucesos que son simultáneos en \mathcal{S}' , el B , ocurrido en (t', x'_b) , y el A , ocurrido en (t', x'_a) , no se ven simultáneamente desde \mathcal{S} . De acuerdo con 1.17, estos dos sucesos se ven desde \mathcal{S} con una diferencia de sincronismo

$$\delta t \equiv t_b - t_a = \gamma \frac{\beta}{c} (x'_b - x'_a) = \gamma \frac{\beta}{c} \Delta x' \quad (1.34)$$

En \mathcal{S} , el orden de los sucesos depende del signo de $\Delta x'$: solo la simultaneidad local tiene carácter absoluto. Los sucesos que han ocurrido en posición más avanzada se verán como posteriores. Un conjunto de relojes puestos en hora en el sistema \mathcal{S}' se verán desde \mathcal{S} tanto más atrasados cuanto mayor es su coordenada x' . Supóngase que el suceso B consiste en que el reloj R'_b marca la hora $t' = 1^{00}$ y el A en que R'_a marca la misma hora. Desde \mathcal{S} se verá que R'_b marca esa hora en su esfera a una hora t_b posterior en δt a la t_a en que la esfera de R'_a marcó la una. Las medidas de t_b y t_a las realizan los observadores de \mathcal{S} que detectan los sucesos A y B .

Dilatación temporal :

Si $\Delta\tau$ es un intervalo propio de \mathcal{S}' ,

$$\Delta\tau = t'_b(x') - t'_a(x')$$

luego

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau \quad , \quad dt = \gamma d\tau \quad (1.35)$$

Estas expresiones corresponden al efecto de la dilatación temporal de los intervalos temporales no propios, propuesta en su día bajo otro contexto por Poincaré.

1.7. Invariantes

1.7.1. Invarianza manifiesta de las leyes

El establecimiento de la invarianza de una cierta ley frente al cambio de sistema inercial es complejo puesto que no basta con transformar las coordenadas de las ecuaciones que la expresan, lo cual se sigue de las transformaciones de Lorentz, sino que también es necesario saber como se transforman las magnitudes físicas que intervienen en ella.

La forma más directa de encontrar posibles expresiones de las leyes que cumplen el principio de relatividad es mediante la propuesta de expresiones manifiestamente invariantes¹⁹.

Una expresión tensorial no es necesariamente invariante frente a transformaciones entre sistemas inertiales, puesto que el cambio de origen implica que al vector de posición se le añade el de traslación de dicho origen. Sí serán invariantes todas aquellas expresiones en las que los tensores sean independientes de dicha traslación. Las leyes de Newton cumplen el principio de relatividad porque se expresan de forma independiente del origen de coordenadas: la de inercia equipara a todas las velocidades uniformes y la de fuerza es función de la aceleración.

Dado que las transformaciones de Lorentz son tetradimensionales, las traslaciones del origen son independientes del tiempo. El postulado de relatividad no se refiere solo a las transformaciones estándar, representadas en la figura 1.7, sino a las transformaciones generales entre sistemas inertiales, como las de la figura 1.6. Se entenderá que una ley tiene forma *Manifiestamente Invariante* si está expresada en la forma $\tilde{T} = \tilde{0}$, donde \tilde{T} es un tensor invariante. Un tensor será invariante si se genera a partir de tensores invariantes mediante las reglas de contraste tensorial de la sección I.2.4.

De acuerdo con el segundo postulado, c es un invariante escalar y, por definición, $d\vec{s}$ es un invariante vectorial; como consecuencia de ésto ds^2 resulta ser un invariante escalar. A partir de estos invariantes tensoriales básicos se deducen otros, de tipo cinemático, que serán útiles para construir expresiones manifiestamente invariantes. Para completar la teoría relativista, será necesario postular entidades tensoriales adicionales de las que deducir las leyes dinámicas²⁰.

1.7.2. Invarianza del elemento de tetravolumen

En general, cuando se pretende evaluar la integral de volumen

$$I = \int_{q^n} \Phi(q_1, \dots, q_n) dq_1 \cdots dq_n$$

, de una magnitud $\Phi(q_1, \dots, q_n)$, en otro sistema de coordenadas , el elemento de volumen del primer sistema ha de ser sustituido por el producto del jacobiano por el nuevo elemento de volumen

$$I = \int_{q'^n} \Phi(q_1, \dots, q_n) \frac{\partial(q_1, \dots, q_n)}{\partial(q'_1, \dots, q'_n)} dq'_1 \cdots dq'_n$$

¹⁹En otras fuentes se encontrará el término “expresión covariante”.

²⁰En adelante, de acuerdo con los usos más comunes, se sobreentiende que todos los tensores mencionados, salvo \vec{s} , son invariantes.

donde $q_i = q_i(q'_1, \dots, q'_n)$.

En particular, en el espacio de Minkowski, el elemento volumen tetradiimensional, o tetravolumen,

$$dx'^4 \equiv dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 = c dt' d\mathcal{V}' = c dt d\mathcal{V} \quad (1.36)$$

es un invariante escalar puesto que el jacobiano de la transformación

$$\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} = 1$$

es igual a la unidad ²¹. Puesto que, al cambiar de sistema de referencia, no solo cambian las coordenadas sino también las magnitudes físicas, la integral

$$I = \int_{x^4} \Phi(x^0, x^1, x^2, x^3) dx^4 \Rightarrow I' = \int_{x'^4} \Phi'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) dx'^4$$

I' se obtiene a partir de I mediante las mismas reglas de transformación de Φ . La integral de volumen tiene, pues, el mismo carácter tensorial que el integrando.

1.7.3. Tiempo propio de una partícula

El diferencial del tiempo propio de una partícula es un invariante escalar, de especial importancia, cuyo significado se mostrará plenamente durante la reformulación de las leyes de la dinámica. Como se vió en la figura 1.8, la trayectoria de una partícula puede describirse como un conjunto de sucesos, los pasos de la partícula por los distintos puntos del espacio, ligados por intervalos de tipo temporal; en este caso la relación causal existe, puesto que para pasar por un punto es necesario haber estado en el pasado de la trayectoria. Si la trayectoria tridimensional de la partícula en \mathcal{S} , como se muestra en la figura 1.9, es $\vec{r}(t)$ y su velocidad es $\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt$, puede escribirse

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr(t)^2 \equiv c^2 d\tau_p^2 > 0 \quad (1.37)$$

Por ser de tipo temporal, ds^2 , y el nuevo término $d\tau_p^2$, son escalares positivos. La raíz cuadrada de éste último, el diferencial $d\tau_p$ del *Tiempo propio de la partícula*, es real y puede definirse como

²¹Véase el problema 1-18 y [Landau y Lifchitz FT] acerca de las leyes de transformación de las diversas integrales en el espacio de Minkowski.

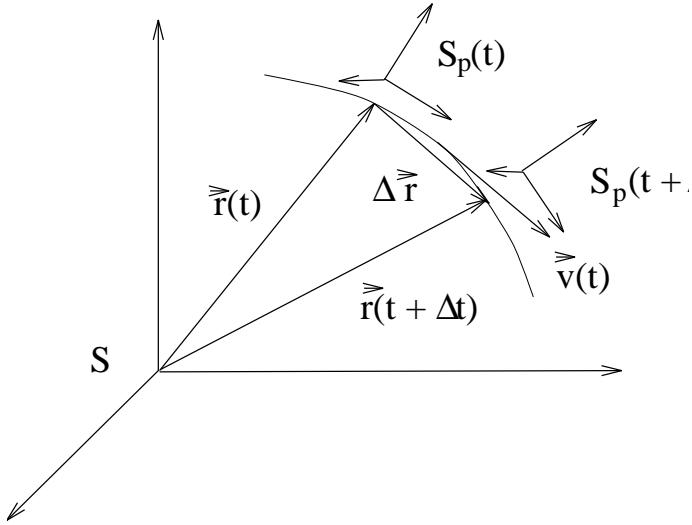


Figura 1.9: Trayectoria de una partícula

$$d\tau_p \equiv \frac{dt}{\gamma_p} , , \quad \gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_p^2}} , \quad \beta_p = \frac{v(t)}{c} \quad (1.38)$$

$d\tau_p$ tiene el mismo signo que dt , con lo que adquiere el carácter de invariante escalar ya que, como es fácil comprobar²², el signo de Δt , entre sucesos que están relacionados entre sí por medio de un intervalo de tipo temporal, es invariante²³.

Cabe también interpretar $d\tau_p$ como el intervalo temporal elemental que se mide en un reloj del *Sistema propio instantáneo de la partícula* $\mathcal{S}_p(t)$. Este se define como aquel con respecto al cual ésta se encuentra en reposo en el instante t . Una partícula acelerada cambia continuamente de sistema propio. Como en el instante t la partícula se halla en reposo con respecto a $\mathcal{S}_p(t)$, la distancia espacial dr_p recorrida durante el intervalo propio $d\tau_p$ es nula y el cuadrado del intervalo espacio-temporal correspondiente, medido en $\mathcal{S}_p(t)$, es $ds_p^2 = ds^2 = c^2 d\tau_p^2$.

Integrando la ecuación 1.38 se obtiene el intervalo finito de tiempo propio de una partícula, transcurrido entre los instantes t_1 y t_2 de \mathcal{S}

$$\Delta\tau_p = \int_{t_1}^{t_2} d\tau_p \leq \Delta t \quad (1.39)$$

el cual, como puede verse, cumple el principio de correspondencia para $\beta_p \ll 1$. Ignorando efectos debidos a la relatividad general, puede decirse que el tiempo propio es el que mide un reloj solidario con la partícula, o, mejor dicho, el contabilizado por la integral anterior como suma de intervalos

²²Problema 1-16.

²³La relación temporal entre dos sucesos relacionados mediante intervalos de tipo espacial no es invariante.

temporales elementales medidos por infinitos relojes, cada uno de ellos en reposo con respecto a los sucesivos sistemas propios de la partícula.

En la extensión de la dinámica al dominio de la relatividad, el tiempo propio de la partícula viene a regir la evolución y, en consecuencia, la vida de la partícula y la marcha de los relojes. A pesar de la similitud formal de las ecuaciones 1.38 y 1.35, la segunda se refiere a la relación entre las medidas realizadas con relojes propios de sistemas inerciales que se mueven, por lo tanto, con velocidad uniforme unos con respecto a los otros, mientras que la primera se refiere a una partícula cuyo movimiento es arbitrario. Esta última definición generaliza a la primera, a la que incluye como caso particular. El tiempo propio de una partícula es, por lo tanto, un concepto primario y fundamental para el desarrollo de la dinámica. Existen hoy en día numerosas pruebas experimentales que confirman su profundo significado físico, la primera de las cuales es la que constata el alargamiento de la vida media de los mesones μ cósmicos que se detectan en la superficie terrestre. Puesto que la vida media en reposo de estas partículas es $\simeq 2\ \mu s$, según Galileo, a la velocidad de la luz solo pueden recorrer unos $600m$ por término medio. Sin embargo, se producen por impacto de Π^+ en la alta atmósfera y recorren unos 10 o $20\ km$ antes de llegar a la tierra. Mayores detalles de esta y otras confirmaciones de la dilatación temporal pueden encontrarse en [Ohanian] y [Jackson].

1.8. Tetra vectores cinéticos

Para completar la cinemática relativista es necesario establecer las leyes de transformación de la velocidad y de la aceleración de una partícula.

1.8.1. Ley de composición de velocidades; Tetra vector velocidad

Se dispone fundamentalmente de dos caminos para encontrar la ley de transformación, o composición, de la velocidad de una partícula y la de un sistema inercial. La forma más directa consiste en derivar las expresiones de las transformaciones de Lorentz 1.17 con respecto a t' ²⁴

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - V}{1 - \beta \frac{v_x}{c}} \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \beta \frac{v_x}{c})} \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z}{\gamma(1 - \beta \frac{v_x}{c})} \end{array} \right\} \vec{v}' = \frac{\left(v_x - V, \frac{v_y}{\gamma}, \frac{v_z}{\gamma}\right)}{1 - \beta \frac{v_x}{c}} \quad (1.40)$$

Es inmediato comprobar que estas ecuaciones se reducen a las galileanas $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$ para $\beta \rightarrow 0$. En el caso en que la velocidad relativa del sistema S' se aproxime a la de la luz $V \rightarrow c$, $\beta \rightarrow 1$, $\gamma \rightarrow \infty$,

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \vec{v}' = (-c, 0, 0)$$

²⁴De la primera ecuación se obtiene dt/dt' .

y si, por el contrario, es la velocidad de la partícula la que se aproxima a la de la luz ,

$$\lim_{\vec{v} \rightarrow c \vec{n}} \vec{v}' = c \vec{n}'$$

por lo que c tiene carácter de velocidad límite ²⁵.

En ambos casos se confirma el carácter de c como límite de velocidad de una partícula y, en general, de la propagación de energía y de información.

El procedimiento que se acaba de emplear para la obtención de la ley de transformación de la velocidad no es siempre el más adecuado. Puesto que $d \vec{s}$ es un tetravector y $d\tau_p$ un escalar, ambos invariantes, el *Tetravector velocidad* definido como

$$\vec{u} \equiv \frac{d \vec{s}}{d\tau_p} \rightarrow \begin{cases} u^i = \frac{dx^i}{d\tau_p} & \rightarrow \quad u^i = \gamma_p(c, \vec{v}) \\ u_i = \frac{dx_i}{d\tau_p} & \rightarrow \quad u_i = \gamma_p(c, -\vec{v}) \end{cases} \quad (1.41)$$

será también un tetravector invariante y sus componentes se transforman de acuerdo con 1.19. \vec{v} , no es realmente un vector pero sus leyes de transformación pueden obtenerse despejando en las de \vec{u} . De esta manera, no solo se obtiene la ley de transformación de \vec{v} , que está incluida en las tres últimas componentes, sino, también, la del factor γ_p de la partícula

$$\gamma'_p = \gamma_p \gamma (1 - \beta \beta_{px}) \quad (1.42)$$

donde $\beta_{px} \equiv v_x/c$.

La mayor parte de los tetravectores que se definirán más adelante engloban en su primera componente a un antiguo .escalar” galileano y en sus tres últimas a un ”vector” galileano.

Dado que \vec{u} es un vector invariante, su norma es un escalar invariante. En este caso

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = c^2 \quad (1.43)$$

por lo que es manifiesta dicha invarianza.

Como consecuencia del distinto tratamiento que la ley de composición de velocidades da a las componentes transversales y a la longitudinal, la dirección del movimiento no es invariante. En el apéndice A se estudian las consecuencias más características de este efecto, como la aberración de la luz y el aumento de la directividad de los sistemas radiantes.

²⁵Problema 1-21.

1.8.2. Tetravector aceleración

De forma análoga a la utilizada en el párrafo anterior, puede definirse el *Tetravector aceleración* de la forma

$$\vec{\vec{w}} \equiv \frac{d\vec{\vec{u}}}{d\tau_p} = \gamma_p \frac{d\vec{\vec{u}}}{dt} \rightarrow \begin{cases} w^i = \gamma_p \frac{du^i}{dt} \\ w_i = \gamma_p \frac{du_i}{dt} \end{cases} \quad (1.44)$$

Operando se obtienen las siguientes expresiones para las componentes de $\vec{\vec{w}}$

$$w^0 = c \gamma_p^4 (\vec{\beta}_p \cdot \dot{\vec{\beta}}_p) \quad (1.45a)$$

$$w^1 = c \gamma_p^2 \{ \dot{\beta}_{px} + \gamma_p^2 \beta_{px} (\vec{\beta}_p \cdot \dot{\vec{\beta}}_p) \} \quad (1.45b)$$

$$w^2 = c \gamma_p^2 \{ \dot{\beta}_{py} + \gamma_p^2 \beta_{py} (\vec{\beta}_p \cdot \dot{\vec{\beta}}_p) \} \quad (1.45c)$$

$$w^3 = c \gamma_p^2 \{ \dot{\beta}_{pz} + \gamma_p^2 \beta_{pz} (\vec{\beta}_p \cdot \dot{\vec{\beta}}_p) \} \quad (1.45d)$$

donde $\vec{\beta}_p = (\beta_{px}, \beta_{py}, \beta_{pz})$ es la velocidad y $\dot{\vec{\beta}}_p$ la aceleración tridimensional de la partícula normalizada a la de la luz ²⁶.

La norma de $\vec{\vec{w}}$ es también invariante escalar y puede escribirse de la forma ²⁷

$$\vec{\vec{w}} \cdot \vec{\vec{w}} = c^2 \gamma_p^6 [(\vec{\beta}_p \wedge \dot{\vec{\beta}}_p)^2 - \dot{\beta}_p^2] \quad (1.46)$$

Por último, es interesante notar que, derivando 1.43 con respecto al tiempo propio de la partícula

$$\vec{\vec{u}} \cdot \vec{\vec{w}} = 0 \quad (1.47)$$

por lo que estos dos tetravectores son ortogonales.

²⁶Problema 1-26.

²⁷Problema 1-27.

1.9. Problemas

1-1. La ecuación unidimensional de onda en el vacío es:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = 0$$

donde Ψ es cualquier componente cartesiana del campo.

- a) Demostrar que admite soluciones del tipo $f(x \pm ct)$.
- b) Hágase uso de las transformaciones de Galileo para encontrar las ecuaciones de onda que deberían cumplir los campos en el sistema S' , que se mueve con respecto al S con la velocidad $\vec{V} = V \hat{x}$, y comprobar que la velocidad de propagación de sus soluciones es $V \pm c$.

SOLUCION :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = 0 \quad , \quad \square \Phi = 0$$

(a) - Basta con substituir en la ecuación anterior.

(b) - Hay que transformar \square y Φ

$$\square' \Phi' = 0$$

No se conoce aún como transformar a Φ , pero basta con saber que $\Phi = f(x', t')$, y que las coordenadas se transforman de acuerdo con las leyes de Lorentz estándar

$$\begin{aligned} x' &= x - V t = x'(x, t) \\ t' &= t = t'(t) \end{aligned}$$

Para transformar el Dalambertiano, se deriva $f(x', t')$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t'} - V \frac{\partial f}{\partial x'} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'} - V \frac{\partial}{\partial x'}$$

con lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &\rightarrow \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + V^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2V \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \right) \end{aligned} \tag{1.48}$$

De ésto resulta que

$$\square' \Phi' = \left\{ \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{2V}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right\} \Phi'$$

Si ahora se ensaya una solución del tipo $\Phi' = \Phi'(x' - v't') = \Phi'(\alpha)$, donde α es la fase y $v' = \left(\frac{dx'}{dt'}\right)_{\alpha=cte}$

$$\frac{\partial \Phi'(\alpha)}{\partial x'} = \frac{d\Phi'(\alpha)}{d\alpha}$$

$$\frac{\partial \Phi'(\alpha)}{\partial t'} = \frac{d\Phi'(\alpha)}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t'} = -v' \frac{d\Phi'(\alpha)}{d\alpha}$$

y, substituyendo en 1.48, se tiene que

$$v'^2 + 2Vv' + V^2 - c^2 = 0 \Rightarrow v' = -V \pm c$$

, por lo que la velocidad de la luz dependería del sistema de referencia del observador:

$$\alpha_1 = x' - (c - V)t' , , \quad \alpha_1 = x' + (c + V)t'$$

La primera fase corresponde a las ondas que viajan en el sentido positivo del eje x y la segunda a las que lo hacen en el sentido contrario.

1-2. Supóngase que las transformaciones de coordenadas desde un sistema de referencia inercial S a otro S' cumplen las siguientes condiciones:

- a) El segundo sistema se mueve con velocidad $\vec{V} = V\hat{x}$ con respecto al primero y éste lo hace con velocidad $-\vec{V}$ con respecto al segundo.
- b) La forma general de la transformación es:

$$x' = a_1x + a_2t; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = a_3x + a_4t$$

- c) La forma del d'Alambertiano

$$\square \equiv \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

es invariante.

Hallar las relaciones necesarias entre V , a_1 , a_2 , a_3 y a_4 para que ésto sea cierto.

1-3. Comprobar que las transformaciones de Galileo no son las aproximaciones de primer orden en β de las de Lorentz y que para que las primeras se deduzcan de las segundas es necesario suponer que la velocidad de la luz es infinita.

SOLUCION :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

Luego $\gamma \simeq 1$ en primer orden de β y la aproximación de primer orden de las transformaciones es

$$\begin{aligned} ct' &\simeq ct - \beta x \\ x' &\simeq -\beta ct + x \end{aligned}$$

Las transformaciones de Galileo se obtienen hallando el límite $c \rightarrow \infty$ de las expresiones anteriores

$$\begin{aligned} t' &\simeq t \\ x' &\simeq -Vt + x \end{aligned}$$

- 1-4. Demostrar que las transformaciones de Lorentz entre dos sistemas de referencia S y S' , cuyos ejes espaciales son paralelos y coinciden en $t = t' = 0$ y cuya velocidad relativa \vec{V} tiene dirección arbitraria, pueden expresarse de la forma

$$ct' = \gamma ct - \gamma \vec{\beta} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{r}' = \overset{\leftrightarrow}{\alpha} \cdot \vec{r} - \gamma \vec{\beta} ct$$

donde

$$\overset{\leftrightarrow}{\alpha} = \overset{\leftrightarrow}{I} + (\gamma - 1) \frac{\vec{\beta}\vec{\beta}}{\beta^2}$$

y

$$(\overset{\leftrightarrow}{I})_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (\vec{\beta}\vec{\beta})_{\alpha\beta} = \beta_\alpha \beta_\beta$$

SOLUCION : Las transformaciones de Lorentz estándar pueden escribirse de la forma

- $$\begin{aligned} (1) \quad ct' &= \gamma ct - \gamma \beta x \\ (2) \quad x'\hat{x} &= -\gamma \beta ct \hat{x} + \gamma x \hat{x} \\ (3) \quad y'\hat{y} &= y \hat{y} \\ (4) \quad z'\hat{z} &= z \hat{z} \end{aligned}$$

donde $\vec{V} = V \hat{x}$.

También pueden generalizarse para velocidades arbitrarias $\vec{\beta} \equiv \frac{\vec{V}}{c}$, $\hat{\beta} \equiv \frac{\vec{\beta}}{\beta}$. Con este fin, basta con tener en cuenta que ²⁸

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} \\ \vec{r}_{\parallel} &= x \hat{x} \\ \vec{r}_{\perp} &= y \hat{y} + z \hat{z} \end{aligned}$$

y que la proyección del vector de posición en la dirección del movimiento es

$$\vec{r}_{\parallel} = (\vec{r} \cdot \hat{\beta}) \hat{\beta} = (\hat{\beta} \hat{\beta}) \cdot \vec{r}, \quad x = |\vec{r}_{\parallel}| = (\vec{r} \cdot \hat{\beta}), \quad \hat{x} = \hat{\beta}$$

²⁸La notación de subíndice (\parallel) denota a la componente paralela al movimiento y la de subíndice (\perp) a la perpendicular al mismo.

De acuerdo con ésto,

$$(1) \quad ct' = \gamma ct - \gamma\beta(\vec{r} \cdot \hat{\beta})$$

$$(2) \quad \vec{r}'_{||} = -\gamma\beta ct + \gamma\hat{\beta}(\hat{\beta} \cdot \vec{r}) = -\gamma\beta ct + \gamma(\hat{\beta}\hat{\beta}) \cdot \vec{r}$$

$$(3) + (4) \quad \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{||} = (\tilde{I} - \hat{\beta}\hat{\beta}) \cdot \vec{r}$$

Sumando (2) + (3) + (4) queda resuelto el problema.

- 1-5. Mientras un tren pasa por delante de una estación, el revisor del mismo presencia dos partos simultáneos, uno de ellos en el vagón de cabeza y otro en el de cola. ¿En qué orden inscribirá el registrador civil a los recién nacidos? (Este recibe la información de los observadores de la estación).
- 1-6. Para medir la longitud de un metro en movimiento con respecto al sistema \mathcal{S} se propone, como alternativa a la medida propuesta en 1.29, la determinación de la distancia entre los puntos que ocupan los extremos de dicho metro en \mathcal{S} pero en simultaneidad con respecto al sistema propio \mathcal{S}' del metro. Discutir el resultado.
- 1-7. ¿Cuál es la contracción del diámetro de la tierra en la dirección de su movimiento alrededor del Sol desde el punto de vista de un observador en reposo con respecto al mismo? (Radio de la Tierra = $6,4 \times 10^3$ Km. Velocidad de la Tierra alrededor del Sol: 30 Km.s^{-1}).
- 1-8. En un sistema de coordenadas en el cual un mesón μ^+ está en reposo, su vida media es igual a 2×10^{-6} s. Hallar la velocidad a la que habrá que acelerar a un paquete de N_0 muones para que después de recorrer 20 km sobrevivan N_0/e partículas.

SOLUCION :

La ley de desintegración de un paquete de partículas es de tipo exponencial $N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, donde τ es su vida media en el sistema del laboratorio. Luego $N(\tau) = \frac{N_0}{e}$. La longitud recorrida en ese tiempo es $L = v\tau$, ó, dada la ley de dilatación temporal, $L = c\beta\gamma\tau_0$, siendo τ_0 la vida media propia (medida en el sistema con respecto al cual las partículas están en reposo). De ésto resulta que

$$\beta\gamma = \frac{L}{c\tau_0} \equiv \frac{1}{\sqrt{x}}$$

A partir de los datos del enunciado se comprueba que

$$x = \left(\frac{c\tau_0}{L} \right)^2 = 9 \times 10^{-4}$$

es muy inferior a la unidad, lo que permite hallar un valor aproximado de la velocidad:

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{1+x}} \simeq \sqrt{1-x} \simeq 1 - \frac{1}{2}x$$

por lo que las partículas son ultrarelativistas (tienen una velocidad próxima a la de la luz).

- 1-9. Supuesto que una partícula μ^+ sobreviva a su vida media, ¿que velocidad debería de comunicársele en el sistema de referencia de nuestra galaxia, cuyo diámetro es de unos 10^5 años luz, para que pueda atravesarla? ¿Cuál será el tamaño de la galaxia medida desde el sistema de la partícula?

SOLUCION :

Solo se indicará que, de acuerdo con el resultado del problema anterior, $\beta = 1 - \frac{1}{2}x$.

- 1-10. Sean dos gemelos terrícolas, Uno de ellos hace un viaje de ida y vuelta a la próxima estrella (α -centauro) distante de la Tierra 4 años luz. Se supone que el vehículo viaja a $0,5c$ la mayor parte del trayecto. Hallar:

- a) Diferencia de edad entre los gemelos a la vuelta.
 - b) Distancia a la que se encontraría el astronauta de la próxima estrella justo después de alcanzar la velocidad crucero.

- 1-11. Una partícula gira alrededor de un campo magnético con un radio de 1 m y a una frecuencia de $3 \times 10^7 \text{ rev} \cdot \text{s}^{-1}$. Hallar la frecuencia propia de giro de la partícula (aquella medida en función del tiempo propio de la misma).

- 1-12. Un reloj R' , situado en un punto del eje x' del sistema S' , marca el tiempo mediante la alternancia del encendido de un piloto rojo y otro verde cada intervalo de tiempo $\Delta\tau$. Hallar:

- a) El intervalo de tiempo Δt entre el encendido y apagado de los pilotos según los dos observadores de \mathcal{S} que se encuentran en la posición de R' en dichos instantes.

b) El intervalo de tiempo Δt_D medido por un observador único, situado en un punto del eje x de \mathcal{S} , que transcurre entre la llegada a dicho punto de los fotones que anuncian dos commutaciones sucesivas. Este resultado corresponde al **efecto Doppler longitudinal**.

SOLUCION :

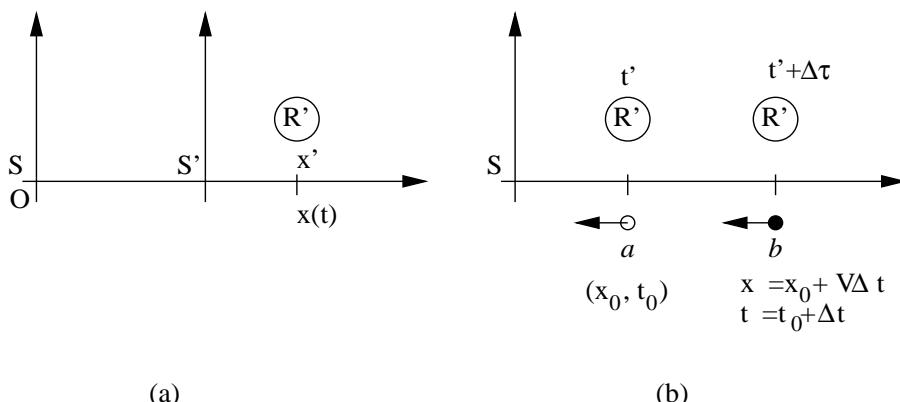


Figura 1.10:

(a) - El intervalo $\Delta\tau$ es propio en S' , véase la figura 1.10-a, porque se mide con un solo reloj propio de dicho sistema de referencia. La medida desde S es no propia y, por lo tanto, el intervalo se dilata

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau$$

(b) - La diferencia de tiempo Δt_D entre la llegada a O de ambos fotones es el retraso en la emisión del (b), con respecto al instante de emisión del (a) medido en S (Δt), más el tiempo invertido por el fotón en recorrer la distancia $\Delta x = x_1 - x_0 = V \Delta t$ (véase la figura 1.10-b). Luego

$$\Delta t_D = \Delta t + \frac{\Delta x}{c} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Delta\tau$$

y la frecuencia es

$$f_D = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_0$$

1-13. Demostrar, mediante la aplicación de las transformaciones de Lorentz, que el cuadrado del intervalo espacio-temporal es invariante.

1-14. En el diagrama de Minkowski se representan ortogonalmente y con la misma escala a los ejes ct y x . Representar en dicho diagrama a:

- a) Los ejes x' ($ct' = 0$) y ct' ($x' = 0$) y las rectas $ct' = cte$ y $x' = cte$.
- b) Los lugares geométricos de aquellos puntos del diagrama para los cuales el valor absoluto de su intervalo espacio-temporal con respecto al origen es $\Delta s^2 = \pm 1, \pm 4 \dots$
- c) Las escala sobre los ejes de S y S' (aquellos puntos para los cuales $|x|, |x'| = 1, 2 \dots, |ct|, |ct'| = 1, 2 \dots$

SOLUCION :

(a) - Las leyes de transformación de las dos primeras coordenadas son

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma x^0 - \gamma \beta x^1 \\ x'^1 &= -\gamma \beta x^0 + \gamma x^1 \end{aligned}$$

luego el eje temporal $x'^0 = ct'$ y el espacial $x'^1 = x'$ vienen dados por las rectas

$$\begin{aligned} x'^1 = 0 &\Rightarrow ct = \frac{1}{\beta} x \\ x'^0 = 0 &\Rightarrow ct = \beta x \end{aligned}$$

Como se muestra en la figura 1.11, las pendientes de los ejes de S' son $\frac{1}{\beta}$ y β , por lo que éstos forman ángulos $\alpha_t = \alpha_x = \arctg \beta$ con los correspondientes del sistema S .

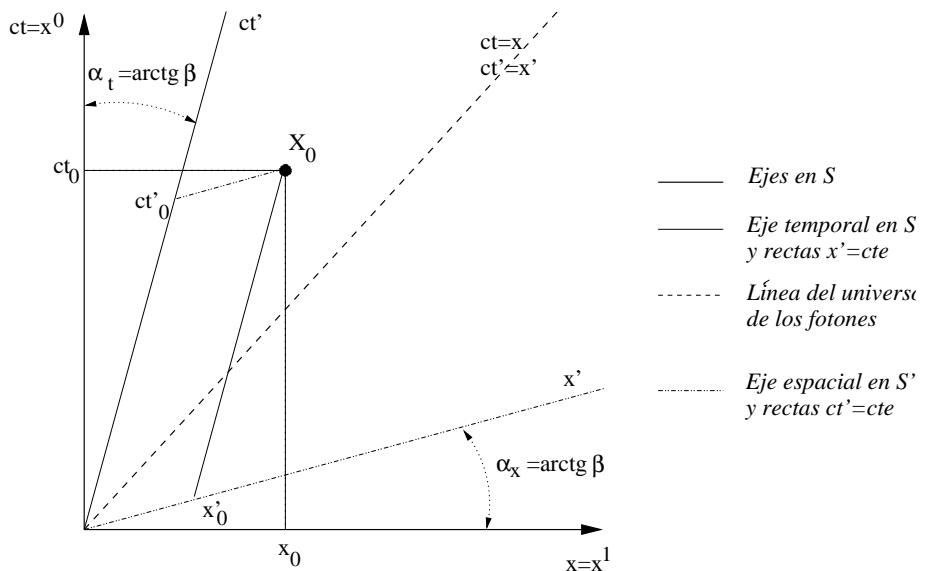


Figura 1.11: Diagrama de Minkowski

Las rectas $ct' = cte = A$ son paralelas al eje espacial y se describen mediante la ecuación

$$ct = \frac{A}{\gamma} + \beta x$$

y las $x = cte = B$, paralelas al eje temporal, se describen mediante la ecuación

$$ct = \frac{x}{\beta} - \frac{B}{\gamma \beta}$$

En la figura anterior se muestra como las coordenadas de un punto X_0 son (ct_0, x_0) en \mathcal{S} y (ct'_0, x'_0) en \mathcal{S}' .

(b)+(c) - Los lugares geométricos de aquellos puntos del universo para los cuales el cuadrado del intervalo espacio-temporal $\Delta s^2 = \pm n^2$, , $n = 1, 2 \dots$ son las hipérbolas

$$ct^2 - x^2 = ct'^2 - x'^2 = \begin{cases} n^2 & \text{Intervalo de tipo temporal} \\ -n^2 & \text{Intervalo de tipo espacial} \end{cases}$$

Estas curvas cortan a los ejes, temporal y espacial, en los puntos $\pm n$ y marcan, por lo tanto, las escalas de \mathcal{S} y de los \mathcal{S}' que se mueven con respecto al anterior. En la figura 1.12 se representa al primer cuadrante del espacio de Minkowski.

- 1-15. Discutir la relatividad de la simultaneidad, la contracción de Lorentz y la dilatación temporal sobre el diagrama anterior.

SOLUCION :

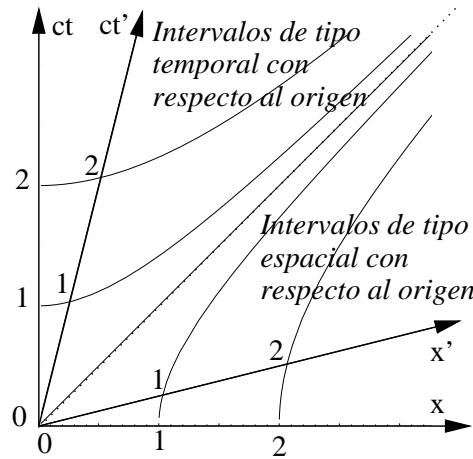


Figura 1.12: Escalas en el diagrama de Minkowski

En la figura 1.13 se representan los lugares en los cuales han ocurrido los sucesos A , B y C .

- Para un observador del sistema \mathcal{S} , los dos primeros han ocurrido simultáneamente, en t_0 , pero en distinto lugar. Para los observadores de \mathcal{S}' , sin embargo, los sucesos no son simultáneos: han ocurrido en los instantes $t'_A > t'_B$ puesto que $x'_A < x'_B$.
- Análogamente a lo anterior, los dos últimos sucesos, que han ocurrido en el mismo lugar desde el punto de vista de los observadores de \mathcal{S} , ocurren en distinto sitio según los observadores de \mathcal{S}' .

En la figura 1.14 se ilustra la contracción de Lorentz de las medidas de longitud y la dilatación de las de tiempo cuando se observa desde sistemas no propios.

- El metro de la figura está en reposo con respecto al sistema \mathcal{S} , el extremo A en la posición $x_A = 0$ y el B en la x_B . Su longitud propia es, por lo tanto, $\Lambda = x_B$. Desde el sistema no propio \mathcal{S}' , su longitud se mide determinando la posición simultánea de sus extremos: en $t' = 0$ dichas posiciones son $x'_A = 0$ y x'_B . Dado que, de acuerdo con las intersecciones de la hipérbola de escala, $x'_B < x_B$, $l < \Lambda$, lo que muestra la contracción de los metros en movimiento.
- En la misma figura se representa a dos relojes, el R , propio del sistema \mathcal{S} , y R' , propio del sistema \mathcal{S}' . Ambos se encuentran en el origen para $t = t' = 0$ y sus líneas universales son los ejes temporales. En $t'_0 = t_0$, R' se encuentra en el punto P_0 , cuya coordenada temporal en el sistema \mathcal{S} es $t_0 + \delta t > t_0 = t'_0$, según indican las intersecciones de la hipérbola de escala. Luego los relojes en movimiento muestran un ritmo más lento que los relojes propios.

1-16. Sean dos sucesos, A y B , que observados desde \mathcal{S} están separados por un intervalo Δs de tipo

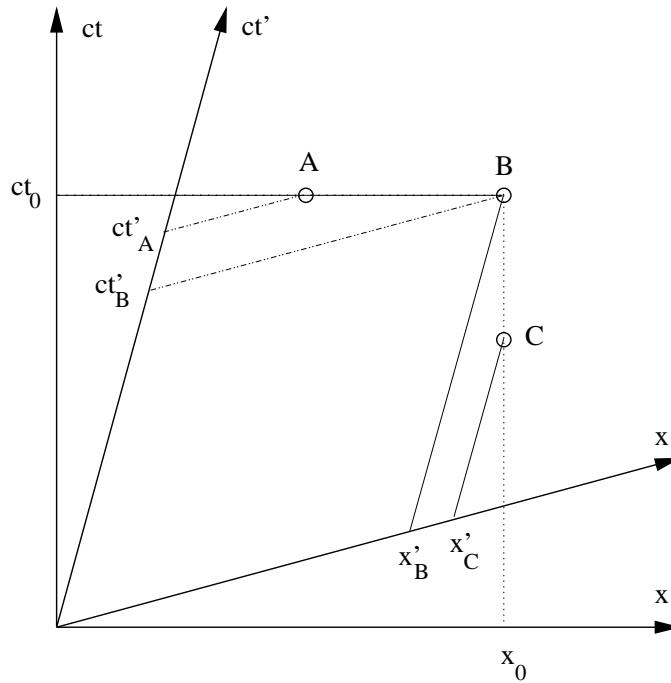


Figura 1.13: Relatividad de la simultaneidad

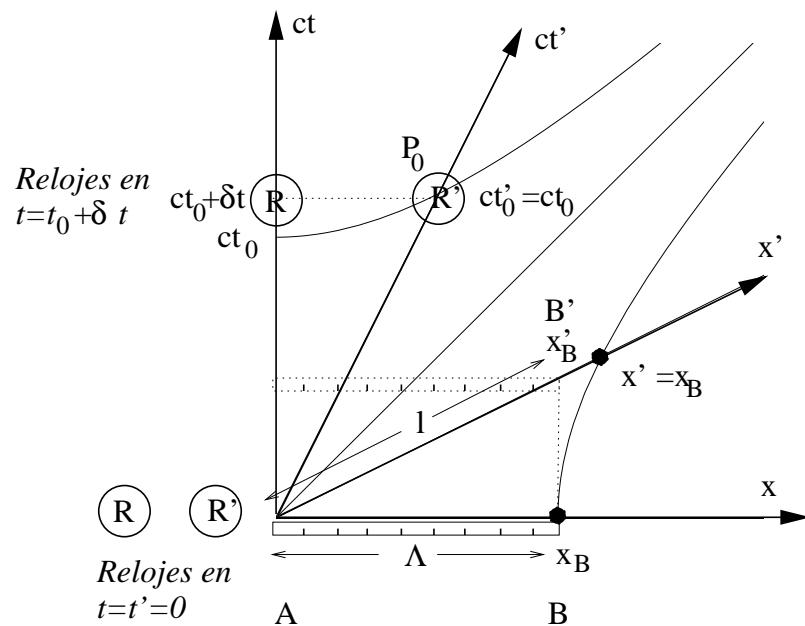


Figura 1.14: Contracción de Lorentz y dilatación temporal

temporal. Demostrar que:

- a) Dicho intervalo es también de tipo temporal en cualquier otro sistema de referencia.
- b) Entre ambos sucesos puede existir una relación de causalidad.
- c) Existe un sistema de referencia con respecto al cual ambos sucesos ocurren en un mismo lugar.
- d) La ordenación temporal de los dos sucesos tiene carácter absoluto.

SOLUCION :

Puede simplificarse el problema eligiendo a un sistema coordenado tal que ambos sucesos ocurran en el eje x . Supóngase que los sucesos ocurren en los puntos respectivos: $A \rightarrow (t_a, x_a)$ y $B \rightarrow (t_b, x_b)$.

Por ser el intervalo de tipo temporal,

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 > 0 \Rightarrow c|\Delta t| > |\Delta x| \quad (1.49)$$

Se empezará por el apartado

(c) - Se busca en sistema \mathcal{S}' en el cual los dos sucesos ocurran en el mismo lugar: $\Delta x' = x'_b - x'_a = 0$, lo que implicará que el intervalo temporal correspondiente será propio.

De acuerdo con la ley de transformación de la coordenada x ,

$$x' = \gamma x - \gamma \beta ct$$

y dado que en \mathcal{S}' $\Delta x' = 0$,

$$\Delta x = \beta c \Delta t \Rightarrow V = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

De acuerdo con 1.49 $|V| < c$ por lo que la solución encontrada es válida, corresponde a un sistema que se mueve con velocidad sublumínica con respecto a \mathcal{S} .

Como en este sistema de referencia los dos sucesos ocurren en el mismo lugar, el intervalo de tiempo correspondiente es un intervalo propio y, de acuerdo con la ley de dilatación temporal,

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \gamma \Delta t' \Rightarrow \text{sig}(\Delta t) = \text{sig}(\Delta \tau)$$

Al ser γ positiva, el signo de los intervalos temporales es el mismo en ambos sistemas, lo que hace posible, aunque no necesaria, la existencia de un relación causal entre ambos sucesos.

- 1-17. Sean dos sucesos, A y B , que observados desde \mathcal{S} están separados por un intervalo Δs de tipo espacial. Demostrar que:

- a) Entre ambos sucesos no existe una relación causal.
- b) Existe un sistema de referencia con respecto al cual ambos sucesos ocurren simultáneamente.
- c) La ordenación temporal de los dos sucesos tiene carácter relativo.

1-18. Demostrar que dx^4 es un invariante calculando el jacobiano de la transformación.

1-19. Considérese a los sistemas \mathcal{S} , \mathcal{S}_1 , que se mueve con respecto al anterior con velocidad $\vec{V}_1 = V_1\hat{x}$, y \mathcal{S}_2 , que se mueve con velocidad $\vec{V}_2 = V_2\hat{x}$ con respecto a \mathcal{S} y $\vec{V}_{12} = V_{12}\hat{x}$ con respecto a \mathcal{S}_1 . Aplicar sucesivamente las transformaciones de Lorentz para demostrar que V_1 , V_2 y V_{12} se relacionan entre sí según la regla de composición de velocidades.

SOLUCION :

Sean $(x^0)_1, \dots, (x^3)_1$ y $(x^0)_2, \dots, (x^3)_2$, las coordenadas contravariantes de un punto relativas a los sistemas \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 respectivamente. Las leyes de transformación entre el primero y el último de los sistemas pueden expresarse de forma directa o escalonada:

$$\begin{pmatrix} (x^0)_2 \\ (x^1)_2 \\ (x^2)_2 \\ (x^3)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{12} & -\gamma_{12}\beta_{12} & 0 & 0 \\ -\gamma_{12}\beta_{12} & \gamma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las dos matrices de transformación de la última igualdad e identificando con los coeficientes de la de la primera, se comprueba que

$$\gamma_2 = \gamma_1 \gamma_{12} (1 + \beta_1 \beta_{12}) \quad , \quad \beta_2 = \frac{\beta_1 + \beta_{12}}{1 + \beta_1 \beta_{12}}$$

Es fácil de verificar que este resultado está de acuerdo con la ley de composición de velocidades.

- 1-20. Dos naves espaciales viajan en dirección opuesta y alejándose ambas de la tierra a la velocidad de $0.7 c$ medida por un observador en la Tierra. ¿Cuál es la velocidad de una de las naves observada desde la otra?
- 1-21. Demostrar que si la velocidad de un fotón con respecto al sistema de referencia \mathcal{S} es $\vec{v} = c\vec{n}$, donde \vec{n} es el vector unitario en la dirección de propagación, la velocidad de dicho fotón medida desde \mathcal{S}' es $\vec{v}' = c\vec{n}'$. Establecer la ley de transformación para la dirección de propagación de los fotones.

SOLUCION :

Para un fotón en el sistema de referencia \mathcal{S} , $\vec{v} = c(n_x, n_y, n_z)$. La ley de composición de velocidades es

$$\vec{v}' = v'(n'_x, n'_y, n'_z) = \frac{c}{1 - \beta n_x} \left(n_x - \beta, \frac{n_y}{\gamma}, \frac{n_z}{\gamma} \right)$$

Elevando al cuadrado esta expresión se comprueba que $v'^2 = c^2$, por lo que, dividiendo por c ambos miembros de la ecuación de partida, se tiene que

$$\vec{n}' = \frac{1}{1 - \beta n_x} \left(n_x - \beta, \frac{n_y}{\gamma}, \frac{n_z}{\gamma} \right)$$

- 1-22. Hallar la ley de composición de velocidades para un fotón en función del angulo polar θ , con respecto al eje x , y el azimutal φ , con respecto al eje y .
- 1-23. En un sistema de coordenadas S' , moviéndose con velocidad V próxima a la de la luz con respecto a otro sistema S , dos rayos de luz son emitidos en la dirección positiva y negativa del eje Y' . Determinar el ángulo entre los rayos en el sistema de coordenadas S .
- 1-24. Una astronave experimental se prueba en un vuelo que transcurre con velocidad uniforme entre las bases de control A y B . Según el observador de la nave, el recorrido dura 10 días. Las medidas realizadas desde el sistema de referencia de las bases detectan una diferencia de duración de $1\ \mu s$. Hallar la distancia entre las bases, según la mide el piloto de la nave y según lo hacen los observadores de las bases (en los cálculos puede hacerse uso de la aproximación para $\beta \ll 1$).
- 1-25. Considérese que la tierra efectúa, en su traslación alrededor del Sol, un movimiento circular de radio $a = 1,5 \times 10^{11}\ m$ en un año ($3,16 \times 10^7\ s$). Sea el plano XY el de la órbita. Supongamos que se tiene una estrella situada en el infinito a lo largo del eje Z (sistema propio del Sol).
- ¿En qué dirección se observará la estrella desde la tierra ?
 - ¿Deducir el cambio en la dirección de observación que se produce seis meses más tarde (aberración).
- 1-26. Demostrar las expresiones 1.45 de las leyes de transformación de las componentes del tetravector aceleración.²⁹
- 1-27. Comprobar que la norma del tetravector aceleración viene dada por la expresión 1.46.³⁰
- 1-28. Se define como movimiento **Uniformemente acelerado** de una partícula a aquél para el cual la aceleración es constante cuando se mide en los sistemas propios instantáneos de dicha partícula. Supóngase que la partícula se mueve a lo largo del eje x y que parte del reposo de la posición $x = x_0$. Calcúlese la velocidad y la posición de la misma en función del tiempo.

²⁹ $\beta^2 = \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}$.

³⁰ Téngase en cuenta que $(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

Demostrar que a baja velocidad el movimiento resultante es el uniformemente acelerado no relativista.

SOLUCION :

Considérese a una partícula que se mueve en la dirección del eje x e inicialmente está en reposo en $x = x_0$.

En el sistema propio instantáneo \mathcal{S}' , $\vec{\beta}_p = 0$, $\gamma_p = 1$ y las componentes contravariantes del tetravector aceleración son $w'^i = (0, a_0, 0, 0)$

Desde el sistema de referencia \mathcal{S} , con respecto al cual la partícula se mueve (Transformada inversa)

$$\begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_p & \gamma_p \beta_p & 0 & 0 \\ \gamma_p \beta_p & \gamma_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w'^0 \\ w'^1 \\ w'^2 \\ w'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_p \beta_p a_0 \\ \gamma_p a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con la definición de estas componentes y con el resultado anterior

$$w^1 = \begin{cases} \gamma_p \frac{du^1}{dt} \\ \gamma_p a_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{du^1}{dt} = a_0$$

El movimiento no es, pues, el uniformemente acelerado prerelativista. Es un movimiento en el cual u^1 varía uniformemente y que corresponde al anterior en el límite $\beta_p \rightarrow 1$ ($\lim_{\beta_p \rightarrow 1} \gamma_p \frac{du^1}{dt} = \frac{dv}{dt}$).

Si se parte del reposo ($v(t = 0) = 0$)

$$u^1 = \gamma_p v = a_0 t$$

Si se define la constante de tiempo $T \equiv \frac{c}{a_0}$ y se normaliza el el tiempo, $\tau \equiv \frac{t}{T}$, y el espacio, $\kappa \equiv \frac{x}{cT}$, y se parte de la posición $\kappa(\tau = 0) = 1$, $\kappa - 1 = \int_0^\tau \frac{\tau d\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} = \sqrt{1+\tau^2} - 1 \Rightarrow \kappa^2 - \tau^2 = 1$

Se trata de un movimiento rectilíneo que en el diagrama de Minkowski describe la trayectoria hipérbólica $x^2 - c^2 t^2 = c^2 T^2$ y que suele también denominarse *Movimiento hiperbólico*.

1.10. Ejemplos con Mathematica

31

Para realizar los ejercicios de esta sección, se recomienda la consulta del resto del capítulo y la de un manual de *Mathematica*. El alumno debe introducir las órdenes numeradas " $M \dots \tau$ " ejecutarlas. Estos ejemplos no pretenden ser ejemplares por lo que se refiere al uso de *Mathematica*; con un poco de experiencia se sabrá como mejorar y potenciar el uso de esta herramienta. Existen también paquetes comerciales para el tratamiento específico de tensores y de problemas de electrodinámica.

Las órdenes de *Mathematica* se distinguirán de las ecuaciones ordinaria porque se escribirán en letra negrita (salvo algunos símbolos, como las letra griegas).

Algunas de las órdenes encadenadas que se proponen, como, por ejemplo,

MatrixForm[Simplify[alorentz.blorentz]]

pueden entenderse mejor si se ejecutan independientemente

aa = alorentz.blorentz

bb = Simplify[aa]

MatrixForm[bb]

y se analiza cada uno de los resultados.

También es aconsejable la experimentación con distintos valores de los argumentos de las órdenes, el uso de caminos alternativos de resolución para los problemas propuestos y el planteamiento de otros nuevos.

Uso de versiones anteriores a la 3 :

Si la versión disponible de *Mathematica* es anterior a la versión 3, o no se dispone del frontal adecuado, será necesario modificar algunas de las expresiones:

- El número π deberá ser escrito de la forma **Pi**.
- Las letras griegas deberán ser substituidas por otros nombres: ej.: γ por **ga**.
- La flecha \rightarrow deberá ser substituida por los caracteres $->$.
- El símbolo de infinito ∞ deberá ser substituido por **Infinity**.
- Ciertas operaciones que vienen indicadas en notación tradicional deben ser modificadas de acuerdo con el manual de la versión en uso. A continuación se indican otras posibles modificaciones de las expresiones de esta sección:

³¹Basados en un programa de A.Salinas .

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a} &\rightarrow \text{Sqrt}[a] \\
 \frac{a}{b} &\rightarrow \mathbf{a}/\mathbf{b} \\
 a^b &\rightarrow \mathbf{a}^b \\
 \int_a^b f dx &\rightarrow \text{Integrate}[f, \{\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}]
 \end{aligned}$$

1.10.1. Comienzo de la sesión

Si una sesión de trabajo se comienza a continuación de otra previa con la que ésta no guarda una relación estricta, conviene anular todas las definiciones anteriores

1.10.2. Transformaciones de Galileo

Pueden definirse haciendo uso de una regla de sustitución de variables

$$\mathbf{galileo} = \{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{V} t, t \rightarrow t\} \quad (\text{M.1.1})$$

Esta transformación no deja invariante al intervalo espacio-temporal

$$\mathbf{s2} = \mathbf{c}^2 t^2 - \mathbf{x}^2; \quad (\text{M.1.2})$$

$$\mathbf{s2p} = \mathbf{s2}/.\mathbf{galileo} \quad (\text{M.1.3})$$

Agrupando términos

$$\text{Collect}[\mathbf{s2p}, \{\mathbf{x}, t\}] \quad (\text{M.1.4})$$

1.10.3. Transformaciones de Lorentz

El factor γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad (\text{M.1.5})$$

Representación de la parte real (en rojo) y de la imaginaria (en verde) del factor *gamma*. Este factor es real para partículas sublumínicas, singular para las lumínicas e imaginario para los taquiones.

$$\mathbf{r}\gamma = \text{Re}[\gamma]; \quad \mathbf{i}\gamma = \text{Im}[\gamma]; \quad (\text{M.1.6})$$

$$\text{Plot}[\{\mathbf{r}\gamma, \mathbf{i}\gamma\}, \{\beta, 0, 2\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\{\text{RGBColor}[1, 0, 0]\}, \{\text{RGBColor}[0, 1, 0]\}\}] \quad (\text{M.1.7})$$

La transformada en forma de función :

Una forma más potente de definir las transformadas es como funciones de argumentos simbólicos

$$\text{lorentz}[\mathbf{x}_-, \mathbf{ct}_-] := \{\mathbf{x} \rightarrow (\mathbf{x} - \beta \mathbf{ct}) \gamma, \mathbf{ct} \rightarrow (\mathbf{ct} - \beta \mathbf{x}) \gamma\}; \quad (\text{M.1.8})$$

En este caso, las coordenadas no tienen por que escribirse con una notación determinada; en vez de ct y x puede utilizarse la notación $x0$ y $x1$:

$$\begin{aligned} &\text{lorentz}[\mathbf{x1}, \mathbf{x0}] \\ &\text{lorentz}[\mathbf{x}, \mathbf{ct}] \end{aligned} \quad (\text{M.1.9})$$

El intervalo espacio-temporal es invariante frente a las transformaciones de Lorentz:

$$\mathbf{s2r} = \mathbf{ct}^2 - \mathbf{x}^2; \quad (\text{M.1.10})$$

$$\text{Simplify}[\mathbf{s2r}/.\text{lorentz}[\mathbf{x}, \mathbf{ct}]] \quad (\text{M.1.11})$$

Las transformaciones parciales para las coordenadas x' (xp) y ct' (ctp) en \mathcal{S}' , pueden extraerse de la forma

$$\mathbf{xp} = \mathbf{x}/.\text{lorentz}[\mathbf{x}, \mathbf{ct}] \quad (\text{M.1.12})$$

$$\mathbf{ctp} = \mathbf{ct}/.\text{lorentz}[\mathbf{x}, \mathbf{ct}] \quad (\text{M.1.13})$$

A partir de las expresiones generales xp y ctp , pueden obtenerse los valores concretos de las coordenadas en \mathcal{S}' de un punto P_1 que en \mathcal{S} tiene por coordenadas ($x = 1$, $ct = 1$), supuesto que la velocidad relativa entre los sistemas de referencia corresponde a $\beta = 0,5$ (la orden siguiente incluye a las coordenadas en \mathcal{S}' dentro de una lista):

$$\{\mathbf{xp}, \mathbf{ctp}\}/.\{\mathbf{x} \rightarrow 1, \mathbf{ct} \rightarrow 1, \beta \rightarrow 0,5\} \quad (\text{M.1.14})$$

Dado que la asignación de valores a x , ct y β tiene carácter local, podemos repetir la orden para obtener las coordenadas de cualquier otro punto y para cualquier otra β

$$\{\mathbf{xp}, \mathbf{ctp}\}/.\{\mathbf{x} \rightarrow 2, \mathbf{ct} \rightarrow 3, \beta \rightarrow 0,2\} \quad (\text{M.1.15})$$

Aproximación de primer orden en β de la transformada expresada en función de V :

$$\mathbf{xp1} = \text{Normal}[\text{Series}[\mathbf{xp}, \{\beta, 0, 1\}]]/. \{\beta \rightarrow \frac{V}{c}, \mathbf{ct} \rightarrow \mathbf{ct}\} \quad (\text{M.1.16})$$

$$\mathbf{xp0} = \text{Normal}[\text{Series}[\mathbf{ctp}, \{\beta, 0, 1\}]]/. \{\beta \rightarrow \frac{V}{c}, \mathbf{ct} \rightarrow \mathbf{ct}\} \quad (\text{M.1.17})$$

Aproximación de Galileo :

$$\mathbf{Gxp1} = \text{Limit}[\mathbf{xp1}, \mathbf{c} \rightarrow \infty] \quad (\text{M.1.18})$$

$$\mathbf{Gxp0} = \text{Limit}\left[\frac{\mathbf{xp0}}{\mathbf{c}}, \mathbf{c} \rightarrow \infty\right] \quad (\text{M.1.19})$$

1.10.3.1. Representación matricial de la transformada

Definición de la matriz de los coeficientes a_j^i (*alorentz*[[*i, j*]]) de la transformación directa:

$$\mathbf{alorentz} = \{\{\gamma, -\gamma\beta, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}, \{-\gamma\beta, \gamma, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}, \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, \mathbf{0}\}, \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1\}\}; \quad (\text{M.1.20})$$

$$\text{MatrixForm}[\mathbf{alorentz}] \quad (\text{M.1.21})$$

Comprobación de que el determinante de la matriz es la unidad:

$$\text{Simplify}[\text{Det}[\mathbf{alorentz}]] \quad (\text{M.1.22})$$

Cálculo de la matriz de los coeficientes b_j^i (*blorentz*[[*i, j*]]) de la transformación inversa:

$$\mathbf{blorentz} = \text{Simplify}[\text{Inverse}[\mathbf{alorentz}]]; \quad (\text{M.1.23})$$

$$\text{MatrixForm}[\mathbf{blorentz}] \quad (\text{M.1.24})$$

Comprobación de que las matrices son recíprocas entre sí:

$$\text{MatrixForm}[\text{Simplify}[\mathbf{alorentz}.\mathbf{blorentz}]] \quad (\text{M.1.25})$$

Definición de la matriz *xcn* de las componentes contravariantes del vector de posición en \mathcal{S} :

$$\mathbf{xcn} = \{\mathbf{xcn0}, \mathbf{xcn1}, \mathbf{xcn2}, \mathbf{xcn3}\}; \quad (\text{M.1.26})$$

Obtención, a partir de los anteriores, de la matriz *xcnp* de las componentes contravariantes del vector de posición en \mathcal{S}' :

$$\mathbf{xcnp} = \mathbf{alorentz}.\mathbf{xcn}; \quad (\text{M.1.27})$$

$$\text{MatrixForm}[\mathbf{xcnp}] \quad (\text{M.1.28})$$

Pueden extraerse los elementos (componentes) del vector

$$\mathbf{xcnp0} = \mathbf{xcnp}[[1]] \quad (\text{M.1.29})$$

$$\mathbf{xcnp1} = \mathbf{xcnp}[[2]] \quad (\text{M.1.30})$$

$$\mathbf{xcnp2} = \mathbf{xcnp}[[3]] \quad (\text{M.1.31})$$

$$\mathbf{xcnp3} = \mathbf{xcnp}[[4]] \quad (\text{M.1.32})$$

1.10.3.2. Diagramas de Minkowski

Representación en el diagrama del eje temporal $w' \equiv ct'$ (wt) y el espacial x' (wx) del sistema \mathcal{S}' y de la línea del Universo $x = ct$ (wc) de un fotón que pasa por el origen :

$$wt = \frac{x}{\beta} / .\beta \rightarrow 0,25; \quad wx = \beta x / .\beta \rightarrow 0,25; \quad wc = x; \quad (\text{M.1.33})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{ejes} = & \mathbf{Plot}[\{wt, wc, wx\}, \{x, 0, 3,5\}], \\ & \mathbf{PlotStyle} \rightarrow \{\{\mathbf{RGBColor}[1, 0, 0], \mathbf{Thickness}[0,006]\}}, \\ & \{\mathbf{RGBColor}[0, 1, 0], \mathbf{Dashing}[\{0,05, 0,05\}]\}, \\ & \{\mathbf{RGBColor}[0, 0, 1], \mathbf{Thickness}[0,006]\}\}, \\ & \mathbf{PlotRange} \rightarrow \{0, 3,5\}, \\ & \mathbf{AspectRatio} \rightarrow \mathbf{Automatic}, \mathbf{AxesLabel} \rightarrow \{"x", "w = ct"\}] \end{aligned} \quad (\text{M.1.34})$$

Representación (en rojo) de las rectas $w' = cte = 1, 2, 3$ (ctp), lugar geométrico de sucesos simultáneos en \mathcal{S}'

$$\mathbf{ctp} = \mathbf{Table}[(\frac{i}{\gamma} + \beta x) / .\beta \rightarrow 0,25, \{i, 3\}] \quad (\text{M.1.35})$$

Una vez ejecutada la orden anterior, copiar el resultado y pegarlo en la posición indicada como "ctp" en la orden que sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{equit} = & \mathbf{Plot}["ctp", \{x, 0, 3,5\}], \\ & \mathbf{PlotStyle} \rightarrow \{\mathbf{RGBColor}[1, 0, 0]\}, \mathbf{PlotRange} \rightarrow \{0, 3,5\}, \\ & \mathbf{AspectRatio} \rightarrow \mathbf{Automatic} \end{aligned} \quad (\text{M.1.36})$$

Representación de las rectas $x' = cte = 1, 2, 3$ (exp), lugar geométrico de sucesos que ocurren en la misma posición espacial de \mathcal{S}'

$$\mathbf{exp} = \mathbf{Table}[(\frac{-i}{\gamma \beta} + \frac{x}{\beta}) / .\beta \rightarrow 0,25, \{i, 3\}] \quad (\text{M.1.37})$$

Proceder como en la gráfica anterior

```
equix = Plot["cxp", {x, 0, 3,5},
  PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1]}, PlotRange -> {0, 3,5},
  AspectRatio -> Automatic]
```

(M.1.38)

Representación de las hipérbolas a cuyos puntos corresponde un intervalo espacio-temporal $|\Delta s| = 1, 2, 3$ con respecto al origen

$$\text{ht} = \text{Table}[\sqrt{x^2 + i^2}, \{i, 3\}] \quad (\text{M.1.39})$$

$$\text{hx} = \text{Table}[\sqrt{x^2 - i^2}, \{i, 3\}] \quad (\text{M.1.40})$$

Proceder como en las gráficas anteriores

```
equiin = Plot[{"ht", "hx"}, {x, 0, 3,5}, PlotRange -> {0, 3,5},
  AspectRatio -> Automatic]
```

(M.1.41)

Representaciones conjuntas de las gráficas anteriores:

$$\text{ejeqteqx} = \text{Show}[\text{ejes}, \text{equit}, \text{equix}, \text{GridLines} \rightarrow \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}] \quad (\text{M.1.42})$$

$$\text{ejeqteqx} = \text{Show}[\text{ejes}, \text{equiin}] \quad (\text{M.1.43})$$

$$\text{ejeqteqx} = \text{Show}[\text{ejes}, \text{equit}, \text{equix}, \text{equiin}, \text{GridLines} \rightarrow \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}] \quad (\text{M.1.44})$$

1.10.4. Velocidad

Definiciones de las componentes :

Definición de las componentes y del módulo de la velocidad en \mathcal{S} (v_3 y v) y en \mathcal{S}' (v_{3p} y v_p):

$$\mathbf{v3} = \{vx, vy, vz\}; \quad v = \sqrt{\mathbf{v3} \cdot \mathbf{v3}}; \quad \beta p = \frac{\mathbf{v}}{c}; \quad (\text{M.1.45})$$

$$\mathbf{v3p} = \{vxp, vyp, vzp\}; \quad v_p = \sqrt{\mathbf{v3p} \cdot \mathbf{v3p}}; \quad \beta pp = \frac{\mathbf{v3p}}{c}; \quad (\text{M.1.46})$$

Definición de las componentes contravariantes de los tetravectores velocidad $\vec{\hat{u}}$ y $\vec{\hat{u}}'$ ($\gamma p \equiv \gamma_p$ y $\gamma pp \equiv \gamma'_p$)

$$\mathbf{u4} = \gamma p \{c, vx, vy, vz\}; \quad \mathbf{u4p} = \gamma pp \{c, vxp, vyp, vzp\}; \quad (\text{M.1.47})$$

Definición de la matriz de las funciones métricas doblemente covariantes

$$\text{gcov} = \{\{1, 0, 0, 0\}, \{0, -1, 0, 0\}, \{0, 0, -1, 0\}, \{0, 0, 0, -1\}\}; \quad (\text{M.1.48})$$

Cálculo de la norma del tetravector velocidad

$$\text{Simplify}[\mathbf{u4}. \text{gcov}. \mathbf{u4} / . \gamma p \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \beta p^2}}] \quad (\text{M.1.49})$$

Definición de las transformadas :

Definición de las matrices de los coeficientes:

$$\mathbf{a00} = \gamma; \mathbf{a01} = -\gamma \beta; \mathbf{a10} = \mathbf{a01}; \mathbf{a11} = \mathbf{a00}; \mathbf{a22} = 1; \mathbf{a33} = 1; \quad (\text{M.1.50})$$

$$\text{alorentz} = \{\{\mathbf{a00}, \mathbf{a01}, 0, 0\}, \{\mathbf{a10}, \mathbf{a11}, 0, 0\}, \{0, 0, \mathbf{a22}, 0\}, \{0, 0, 0, \mathbf{a33}\}\}; \quad (\text{M.1.51})$$

$$\text{blorentz} = \{\{\mathbf{a00}, -\mathbf{a01}, 0, 0\}, \{-\mathbf{a10}, \mathbf{a11}, 0, 0\}, \{0, 0, \mathbf{a22}, 0\}, \{0, 0, 0, \mathbf{a33}\}\}; \quad (\text{M.1.52})$$

Transformadas directa e inversa:

$$\text{veclorentzd}[\mathbf{x}_-] := \text{alorentz}. \mathbf{x} \quad (\text{M.1.53})$$

$$\text{veclorentzi}[\mathbf{x}_-] := \text{blorentz}. \mathbf{x} \quad (\text{M.1.54})$$

Obtención de v' , v'_x , v'_y , v'_z y γ'_p :

Primero se obtiene la matriz del tetravector transformado (*loru4*)

$$\text{loru4} = \text{veclorentzd}[\mathbf{u4}]; \quad (\text{M.1.55})$$

$$\text{MatrixForm}[\text{loru4}] \quad (\text{M.1.56})$$

y se despeja de sus componentes la lista γ'_p , v'_x , v'_y y v'_z

$$\text{tr} = \text{Simplify}[\text{Solve}[\mathbf{u4p} == \text{loru4}, \{\gamma pp, vxp, vyp, vzp\}]]; \quad (\text{M.1.57})$$

Como alternativa, se expresa tr en función de $\beta_x = v_x/c$...

$$\text{trb} = \text{Simplify}[\text{tr} /. \{\mathbf{vx} \rightarrow \mathbf{c} \beta \mathbf{x}, \mathbf{vy} \rightarrow \mathbf{c} \beta \mathbf{y}, \mathbf{vz} \rightarrow \mathbf{c} \beta \mathbf{z}\}] \quad (\text{M.1.58})$$

Se calcula \vec{v}'

$$\mathbf{v3p} /. \text{trb} \quad (\text{M.1.59})$$

que aparece como una lista de un solo elemento que, a su vez, es una lista de cuatro elementos.

Por último se extrae v'_x , como lista de un solo elemento,

$$\mathbf{vxp/.trb} \quad (\text{M.1.60})$$

y se obtienen las expresiones concretas de las componentes de la velocidad y del factor γ

$$\mathbf{vxpr} = \mathbf{vxp/.trb[[1]]} \quad (\text{M.1.61})$$

$$\mathbf{vypr} = \mathbf{vyp/.trb[[1]]} \quad (\text{M.1.62})$$

$$\mathbf{vzpr} = \mathbf{vzp/.trb[[1]]} \quad (\text{M.1.63})$$

$$\mathbf{gamapr} = \gamma \mathbf{pp/.trb[[1]]} \quad (\text{M.1.64})$$

c como velocidad límite :

Se muestra gráficamente que la velocidad de una partícula en S' tiene por límite a c , tanto si $v \rightarrow c$ como si $V \rightarrow c$ ³². Para ello se definen los valores absolutos de las velocidades normalizadas β , β_p y β'_p .

Sin pérdida de generalidad, se supone que la partícula se mueve en el plano xz y se expresa β'_p en función del ángulo θ que forma la velocidad \vec{v} con el eje x

$$\beta \mathbf{fa} = \left(\sqrt{\frac{\mathbf{vxpr}^2}{\mathbf{c}^2} + \frac{\mathbf{vzpr}^2}{\mathbf{c}^2}} \right) /. \{ \gamma \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \beta \mathbf{x} \rightarrow \beta \mathbf{a} \cos[\theta], \beta \mathbf{z} \rightarrow \beta \mathbf{a} \sin[\theta] \}; \quad (\text{M.1.65})$$

Para esta gráfica se tomará el valor $\theta = \pi/6$

$$\beta \mathbf{f} = \beta \mathbf{fa} /. \theta \rightarrow \frac{\pi}{6}; \quad (\text{M.1.66})$$

$$\mathbf{Plot3D}[\beta \mathbf{f}, \{\beta, 0, 1\}, \{\beta \mathbf{a}, 0, 1\}, \mathbf{AxesLabel} \rightarrow \{"\beta", "\beta p", "\beta f"\}] \quad (\text{M.1.67})$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{ContourPlot}[\beta \mathbf{f}, \{\beta, 0, 1\}, \{\beta \mathbf{a}, 0, 1\}, \\ & \mathbf{FrameLabel} \rightarrow \{"\beta", "\beta p"\}, \mathbf{PlotPoints} \rightarrow 60, \mathbf{Contours} \rightarrow 20] \end{aligned} \quad (\text{M.1.68})$$

$$\beta \mathbf{fg} = \mathbf{Table}[\beta \mathbf{f} /. \beta \rightarrow (0, 1 \mathbf{i} - 0, 1), \{\mathbf{i}, 1, 1\}]; \quad (\text{M.1.69})$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{Plot}["\beta \mathbf{fg}", \{\beta \mathbf{a}, 0, 1\}, \\ & \mathbf{PlotStyle} \rightarrow \{\mathbf{RGBColor}[1, 0, 0], \mathbf{RGBColor}[0, 1, 0], \mathbf{RGBColor}[0, 0, 1]\}, \\ & \mathbf{AxesLabel} \rightarrow \{"\beta p", "\beta f"\}, \mathbf{GridLines} \rightarrow \mathbf{Automatic}] \end{aligned} \quad (\text{M.1.70})$$

³²Problema 1-21.

1.10.5. Aceleración

$$\text{Clear}[\beta, \gamma] \quad (\text{M.1.71})$$

A continuación se resuelve el problema 1-28:

Según el enunciado, las componentes del tetravector aceleración son:

$$\mathbf{w4pr} = \{\mathbf{0}, \mathbf{a0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\} \quad (\text{M.1.72})$$

Se aplica la transformada inversa para obtener el tetravector aceleración $w4$ en \mathcal{S}

$$\mathbf{w4} = \text{veclorentzi}[\mathbf{w4pr}] \quad (\text{M.1.73})$$

y se extrae la primera componente espacial $w1 = w^1 = \gamma_p \frac{du^1}{dt}$ (el segundo elemento de la matriz $w4$)

$$\mathbf{w1} = \mathbf{w4}[[2]] \quad (\text{M.1.74})$$

Se obtiene u^1 integrando y se expresa en función del tiempo normalizado $\tau \equiv t/(c/a_0)$

$$\mathbf{u1} = \left\{ \int \left(\frac{1}{\gamma} \mathbf{w1} dt \right) \right\} / .t \rightarrow \frac{\mathbf{a0} \tau}{c} \quad (\text{M.1.75})$$

Por otra parte, la definición de u^1 es

$$\mathbf{u1d} = (\mathbf{c} \beta \gamma) / .\gamma \rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \beta^2}} \quad (\text{M.1.76})$$

Se obtiene la expresión $\beta(\tau)$ resolviendo la ecuación

$$\beta \mathbf{a} = \text{Solve}[\mathbf{u1d} == \mathbf{u1}, \beta] \quad (\text{M.1.77})$$

y se selecciona la solución positiva

$$\beta \mathbf{b} = \beta / .\beta \mathbf{a}[[2, 1]] \quad (\text{M.1.78})$$

La posición normalizada $\kappa \equiv x/(c^2/a_0)$ de la partícula se obtiene por integración de la velocidad entre los límites $[0, \tau]$

$$\kappa = \kappa \mathbf{0} + \int_0^\tau \beta \mathbf{b} d\tau \quad (\text{M.1.79})$$

Representación de β , κ y la recta $\beta = \kappa = 1$ frente a τ

```
Plot[{\beta b, \kappa /. \kappa == 1, 1}, {\tau, 0, 3},  
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]},  
AxesLabel -> {"\u03c4 = t/T", "\u03b2 = v/c, \u03ba = x/cT"}] (M.1.80)
```

Capítulo 2

Fundamentos de la electrodinámica

2.1. Introducción

En este capítulo se establecen los fundamentos de la interacción entre partículas cargadas, sin espín¹, y el campo electromagnético. Para ello se emplea un modelo discreto de tipo microscópico clásico, correspondiente a una descripción detallada en la cual, conocidas la carga y masa de cada una de las N partículas del sistema de cargas, así como sus posiciones y velocidades iniciales, puede establecerse con toda exactitud el futuro del mismo². Esta descripción se resume en el conjunto de ecuaciones que se conoce como de Maxwell-Lorentz. Desde el punto de vista práctico, su utilidad se limita al caso en que N es relativamente pequeño, por ejemplo $N \sim 10^6$, pero es el punto de partida teórico más adecuado y el contexto dentro del cual las interpretaciones de las magnitudes son más claras. En el capítulo 3 y en su apéndice C se hará una breve introducción a los modelos macroscópicos de los medios electromagnéticos, los cuales, por su diversidad y complejidad, son el objetivo de una ciencia multidisciplinar, en la que un enfoque unitario queda fuera de lugar. En principio, la necesidad de reducir el elevado número de variables implícitas en las ecuaciones microscópicas exige la realización de promedios espacio-temporales y la existencia de estructuras moleculares con fundamento cuántico obliga a la introducción, de una u otra forma, de estos aspectos en la descripción. Ambos procesos llevan consigo la proposición de hipótesis fuertes que en cierto modo difuminan y hacen imprecisa la interpretación de las magnitudes electromagnéticas.

Como herramienta básica para la reconstrucción de la electrodinámica, de forma compatible con los postulados de la relatividad restringida, se emplearán los principios de mínima acción. Estos principios son extraordinariamente potentes para el desarrollo de la teoría física y se adaptan especialmente bien a la formulación invariante de las leyes. Es interesante que el alumno, que ya ha construido una electrodinámica galileana mediante una encadenación de postulados de tipo histórico y ha hecho uso de los principios de mínima acción en otras disciplinas, compruebe que no hay un

¹El espín juega un papel importante en el electromagnetismo. En el capítulo tercero se indica como puede ser introducido en las ecuaciones macroscópicas de Maxwell.

²La introducción de efectos cuánticos, como son los de creación y destrucción de carga, complican en alguna medida el panorama.

único camino para la descripción física de la realidad y que la que aquí se ofrece es una alternativa útil y coherente.

2.1.1. Principios de mínima acción

En el apéndice II se muestra como las trayectorias de un sistema de partículas, sometidas a un campo de fuerzas externo (preestablecido), pueden ser determinadas a partir de las leyes de Newton II.1 o, alternativamente, del principio de mínima acción de Hamilton II.32

$$\delta\mathcal{A} = 0 \quad , , \quad \mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.1)$$

$\delta\mathcal{A}$ es la primera variación de la acción hamiltoniana y L el lagrangiano del sistema de partículas en interacción con el campo. Según los casos, L se expresa de las formas

$$L(q, \dot{q}, t) = \mathcal{E}_c(q, \dot{q}, t) - W(q, t) \quad , , \quad L(q, \dot{q}, t) = \mathcal{E}_c(q, \dot{q}, t) - U(q, \dot{q}, t) \quad (2.2)$$

donde \mathcal{E}_c es la energía cinética de las partículas, W la energía potencial independiente de la velocidad y U la que depende de la misma.

Desde el punto de vista de la relatividad, las energías potenciales independientes de la velocidad no son admisibles porque implican la propagación de la interacción a velocidad infinita. En lo que sigue, solo se consideran aquellos potenciales en los cuales, o bien existe dependencia explícita de la velocidad de las partículas o, por ser de corto alcance, el retraso de propagación de la interacción es despreciable. Dentro de la relatividad especial no se dispone de una descripción adecuada del campo gravitatorio, por lo que la teoría que aquí se expone es fundamentalmente una *Electrodinámica relativista* en la que, como en el marco galileano, la energía potencial de una carga en campo externo viene dada por la expresión II.13

$$U(q, \dot{q}, t) = e(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (2.3)$$

En la discusión introductoria del capítulo anterior se dijo que las leyes de la electrodinámica siguen siendo válidas en el nuevo contexto, pero que las de la mecánica no lo son. En realidad, aunque las leyes de la electrodinámica sean válidas en cualquier sistema inercial, la definición de un nuevo concepto de espacio-tiempo, a través de las transformaciones de Lorentz, hace también necesario el establecimiento de nuevas reglas de transformación para las magnitudes físicas que describen a la interacción. Los principios de mínima acción constituyen una alternativa muy fructífera en el desarrollo de las leyes físicas, especialmente para el establecimiento de leyes invariantes, por lo que aquí se hará uso de ellos para reposutar a la electrodinámica en su conjunto, entendiendo como incluidos en ella los aspectos puramente mecánicos de la misma.

Si se quiere estudiar el movimiento de partículas bajo la influencia de un campo externo, la ecuación 2.1 puede escribirse de la forma

$$\delta\mathcal{A}_p + \delta\mathcal{A}_i = 0 \quad (2.4)$$

\mathcal{A}_p es la acción de las partículas libres, partículas que no actúan entre sí ni con cualquier otro campo, y \mathcal{A}_i la de la interacción con el campo preestablecido. Es decir

$$\mathcal{A}_p = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}_c dt \quad , , \quad \mathcal{A}_i = - \int_{t_1}^{t_2} U dt \quad (2.5)$$

Pero el problema electromagnético más general, el *Problema autoconsistente*, es aquel en el que un conjunto de partículas cargadas está sometido a un campo que ha sido creado por las propias partículas y que, por consiguiente, no está preestablecido sino que es función de la posición y la velocidad de dichas cargas. Por otra parte, si una partícula transporta energía y cantidad de movimiento, en conexión con su masa inerte, se verá que el campo electromagnético transporta asimismo energía y cantidad de movimiento, por lo que posee los mismos atributos "materiales" que las partículas. De hecho, partículas y campos son manifestaciones distintas de una misma entidad física, la *Materia*, y deben considerarse en pie de igualdad. Las partículas y los campos interactúan mutuamente, por lo que, si hasta ahora se ha considerado una acción \mathcal{A}_p de la que se deduce el movimiento libre de las partículas, aquél para el que $\delta\mathcal{A}_i = 0$, en el problema autoconsistente debe incluirse un término de acción \mathcal{A}_c que de cuenta del movimiento, o evolución, libre de los campos³.

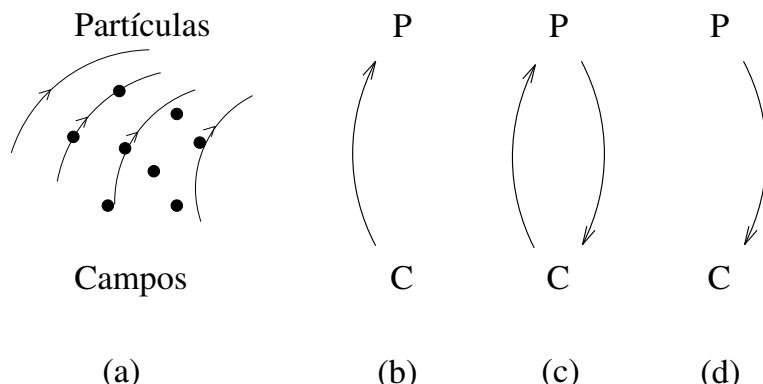


Figura 2.1: El problema electrodinámico

Como se muestra en la figura 2.1(a), el problema electromagnético fundamental concierne a la interacción entre cargas y corrientes. No obstante pueden considerarse tres casos importantes descritos por los principios de mínima acción

$$\delta\mathcal{A}_p + \delta\mathcal{A}_i = 0 \quad (2.6a)$$

$$\delta\mathcal{A}_p + \delta\mathcal{A}_i + \delta\mathcal{A}_c = 0 \quad (2.6b)$$

³En este contexto, las partículas aparecen como entidades puntuales, mientras que los campos son eminentemente continuos. Esta dificultad se eludirá expresando las discontinuidades como formalmente continuas, mediante el uso de la delta de Dirac.

$$\delta\mathcal{A}_i + \delta\mathcal{A}_c = 0 \quad (2.6c)$$

- La primera ecuación 2.6a, figura 2.1 (b), describe la interacción de las partículas con un campo preestablecido ($\delta\mathcal{A}_c = 0$).

- La segunda 2.6b, figura 2.1 (c), corresponde al problema más general, el autoconsistente, en el cual las partículas interactúan con el campo que ellas mismas crean. Este problema no puede plantearse de forma rigurosa y solo es posible resolverlo aproximadamente, hasta el segundo orden de β , para partículas lentas. La dificultad reside en que el lagrangiano es función de las coordenadas y las velocidades de las partículas, evaluadas en el instante actual, mientras que la interacción entre partículas se propaga con velocidad finita. Véase [Landau y Lifchitz FT, Konopinski, Jackson]

- La última 2.6c, figura 2.1 (d), describe la evolución del campo electromagnético debida a su interacción con un conjunto de partículas cargadas en posiciones y con velocidades preestablecidas ($\delta\mathcal{A}_p = 0$).

El problema general puede resolverse, al menos, de forma numérica para un número limitado de partículas. Partiendo de sus posiciones iniciales y de los campos producidos por las mismas en dichas posiciones, se resuelven alternativamente problemas del primero y del último tipo. A continuación se tratará del primero y del último de estos problemas.

Puesto que el postulado de relatividad asigna a las leyes un carácter invariante, es evidente que, si estas se van a expresar igualando a cero la primera variación de una suma de acciones, cada una de estas variaciones por separado deba tener carácter escalar.

Se empezará por repostular la acción de las partículas libres, lo que conduce a la modificación del concepto de cantidad de movimiento. A continuación se introduce la acción de la interacción con el campo electromagnético, esencialmente en la forma definida por 2.5 y 2.3 aunque con una nueva interpretación, y se plantea el problema 2.6a para encontrar las ecuaciones que describen la trayectoria de las partículas en campo externo (Al calcular la variación de la acción, a la trayectoria se le considera como variable, salvo en los puntos extremos, y al potencial como fijo). Este problema resulta equivalente al descrito por la ley de fuerza de Lorentz, aunque ésta aparece expresada en función del potencial. El campo electromagnético, a su vez, surge como definición derivada de este último, comprobándose que cumple la ley de Faraday y la de ausencia de monopolos magnéticos.

Para plantear el problema 2.6c, se postula la acción del campo y se expresa la de la interacción en función de variables continuas sobre un tetravolumen del espacio de Minkowski. Considerando al potencial como a un conjunto de coordenadas generalizadas, variables salvo en la frontera del problema, y a la trayectoria del sistema de partículas como fija, se obtienen las ecuaciones del movimiento del campo en presencia de una distribución de cargas y corrientes preestablecida. Estas ecuaciones corresponden a las leyes de Poisson y Ampére.

2.2. Acción de un sistema de partículas libres

Dentro de la teoría de Newton, el lagrangiano correspondiente a una partícula libre es

$$L(\vec{r}, \vec{v}, t) = L(v) = T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.7)$$

Según se ha visto, es necesario postular una acción compatible con las transformaciones de Lorentz: la invarianza de las leyes se asegura buscando a una acción cuya primera variación sea invariante escalar. En concreto, se propone una acción escalar, generada a partir de los invariantes asociados a la trayectoria de la partícula, que cumple el principio de correspondencia. Como la partícula es libre, el único invariante conocido para la trayectoria entre los puntos $P_1 = (\vec{r}_1, t_1)$ y $P_2 = (\vec{r}_2, t_2)$ es el intervalo de tiempo propio $\Delta\tau_p$.^{1.39}

$$\Delta\tau_p = \int_1^2 \frac{dt}{\gamma_p}$$

Con objeto de poder cumplir el principio de correspondencia, se ensaya una acción proporcional al intervalo

$$\mathcal{A}_p = \alpha \int_1^2 \frac{dt}{\gamma_p}$$

donde α es una constante escalar. Esto equivale a proponer un lagrangiano

$$L_p = \alpha \sqrt{1 - \beta_p^2}$$

Hallando el límite del anterior para pequeñas velocidades, $\beta_p \ll 1$, $v \ll c$,

$$L_p \simeq \alpha - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c^2} v^2$$

y teniendo en cuenta que el lagrangiano, en general, y la energía cinética, en particular, están indeterminados por una constante arbitraria, el principio de correspondencia exige la identificación de α con $-m c^2$ donde m es, por lo tanto, un escalar que se denomina *Masa en reposo* y que coincide con la masa inerte galileana de la partícula.

Así pues, se POSTULA como lagrangiano de una partícula libre a

$$L_p \equiv -\frac{m}{\gamma_p} c^2 = -m c^2 \sqrt{1 - \beta_p^2} \quad (2.8)$$

donde m es un escalar.

Este postulado y el de la acción de la interacción, establecen al tiempo propio como la variable que describe la evolución, o "vida", de una partícula con movimiento arbitrario. Las leyes que explican la existencia de partículas con propiedades determinadas y las fuerzas que mantienen en equilibrio a sus componentes elementales son en gran parte desconocidas y, en todo caso, quedan fuera del esquema de la presente teoría. Sin embargo, sus manifestaciones externas se ajustan globalmente a

la predicción relativista. Es el intervalo propio de la partícula denominado "vida media."^{el} que mide la probabilidad de supervivencia de la misma, como lo demuestra la experiencia de los muones, ya mencionada, y otras muchas que están descritas en la bibliografía [Ohanian].

Considerando que $ds/dt = c/\gamma_p$, el lagrangiano anterior puede escribirse también de la forma

$$L_p = -m c \frac{ds}{dt} \quad (2.9)$$

La generalización de lo anterior al caso de un sistema de N partículas, de masa m_ν y velocidad normalizada β_ν es inmediata:

$$L_p = -c \sum_\nu m_\nu \frac{ds_\nu}{dt} = -c^2 \sum_\nu m_\nu \sqrt{1 - \beta_\nu^2}, \quad \nu = 1, \dots, N \quad (2.10)$$

2.2.1. Tetravector energía-cantidad de movimiento

Dado que la partícula libre no está sometida a fuerza, su *Cantidad de movimiento* ordinaria o cinética coincide con el momento conjugado definido en II.18

$$\mathcal{P}_\alpha = p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} \quad , , \quad \alpha = x, y, z$$

por lo que

$$\vec{p} = m \gamma_p \vec{v} = m \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta_p^2}} = M(v) \vec{v} \quad (2.11)$$

donde se ha definido como *Masa en movimiento*^{4, 5} a

$$M(\beta_p) \equiv m \gamma_p \quad (2.12)$$

De 2.8 se deduce que $\partial L/\partial x_\alpha = 0$ y, de acuerdo con las ecuaciones de Lagrange II.17, $d\vec{p}/dt = 0$: como en el caso no relativista, una partícula en movimiento libre, conserva su cantidad de movimiento, aunque ahora ésta aparece definida de forma diferente.

En este caso, $\partial L/\partial t = 0$, por lo que, de acuerdo con II.22 el hamiltoniano es una constante del movimiento que puede ser identificada con la *Energía de la partícula libre* \mathcal{E} . De la definición II.21 de H se tiene que

$$\mathcal{E} = \vec{p} \cdot \vec{v} - L \quad (2.13)$$

⁴En otros textos se prefiere no definir esta magnitud, reservando el nombre de *masa* a lo que aquí se denomina *masa en reposo*.

⁵En el apéndice B se expone una experiencia pensada que conduce a estas mismas conclusiones.

Sustituyendo 2.11 y 2.8 en la expresión anterior se obtiene la relación

$$\mathcal{E} = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \beta_p^2}} = \gamma_p m c^2 = M c^2 \quad (2.14)$$

que enuncia la *Equivalencia entre la masa y la energía*; una y otra difieren solamente en el factor universal c^2 .

Tomando $v = 0$ se comprueba que la partícula posee una *Energía en reposo*

$$\mathcal{E}_0 \equiv (\mathcal{E})_{v=0} = m c^2 \quad (2.15)$$

Cabe redefinir el concepto de *Energía cinética* de una partícula libre como aquella parte de su energía total \mathcal{E} que se debe a su movimiento:

$$\mathcal{E}_c \equiv \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 \quad (2.16)$$

La interpretación completa de \mathcal{E}_0 queda fuera del alcance de la presente teoría, puesto que dentro de la misma éste podría ser un mero término aditivo que se anula al calcular los incrementos de energía en un determinado proceso, pero la experiencia muestra que la equivalencia expresada en 2.14 implica el posible intercambio de energía en reposo, además del de energía cinética. Aunque solo es necesario tenerlo en cuenta cuando en una experiencia cambian las masas en reposo, como es bien sabido y ha sido sobradamente experimentado, la masa en reposo es intercambiable con cualquier otra forma de energía, como la cinética y la potencial, lo que es tan novedoso como transcendente⁶.

De 2.11 y 2.14 se deduce una relación simple entre la energía de una partícula libre y su cantidad de movimiento.

$$\vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \vec{v} \quad (2.17)$$

Hasta ahora se han obtenido expresiones relativistas para la cantidad de movimiento y la energía de una partícula libre pero no se han investigado las reglas de transformación de estas magnitudes. Dichas reglas se ponen de manifiesto sin más que verificar que \mathcal{E}/c es la primera componente contravariante, y p^α las tres últimas, del *Tetravector energía-cantidad de movimiento*, definido como

$$\vec{\vec{p}} \equiv m \vec{\vec{u}} \rightarrow \begin{cases} p^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p} \right) = \gamma_p m (c, \vec{v}) \\ p_i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, -\vec{p} \right) \end{cases} \quad (2.18)$$

$\vec{\vec{p}}$ es efectivamente un tetravector porque m es un escalar y $\vec{\vec{u}}$ (1.41) un tetravector. De lo visto anteriormente se deduce que, además, es una constante del movimiento para una partícula libre.

⁶Véase el apéndice B para más detalles.

En definitiva la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento de una partícula libre, o de un sistema de partículas libres, se resumen en el contexto relativista como la conservación del tetravector energía-cantidad de movimiento. Véase que el “escalar” \mathcal{E} deja de serlo para transformarse como la primera componente de un tetravector.

Del carácter vectorial de \vec{p} se deducen las reglas de transformación de estas magnitudes. De acuerdo con 1.18a

$$\begin{aligned}\mathcal{E}' &= \gamma(\mathcal{E} - V p_x) \\ p'_x &= \gamma(p_x - \frac{V}{c^2} \mathcal{E}) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z\end{aligned}\tag{2.19}$$

En este caso, la norma es un escalar obvio (se expresa como producto de escalares)

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2 \tag{2.20}$$

Sustituyendo 2.18 en la ecuación anterior se obtiene la energía de la partícula libre expresada en función de p :

$$\mathcal{E} = +\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \tag{2.21}$$

en la que se toma el signo positivo de la raíz para ser consecuentes con 2.15.

Es interesante notar que las partículas lumínicas tienen velocidad $v = c$ con lo que $M \rightarrow \infty$, a menos que $m \rightarrow 0$. Dado que la experiencia indica que su cantidad de movimiento y energía son finitas, su masa en reposo es necesariamente nula. Luego, para partículas lumínicas

$$m = 0 , \quad \mathcal{E} = c p \tag{2.22}$$

De acuerdo con éste resultado y 2.14, la relatividad deja indeterminadas a la energía y a la cantidad de movimiento de las partículas lumínicas. Esta laguna debe ser llenada por otro tipo de teoría. Para el caso de los fotones, véase 4.76.

2.3. Acción de la interacción

Para resolver los problemas 2.6a y 2.6c es necesario definir una acción para la interacción. Esta será utilizada de forma distinta en cada caso.

- En el primer problema se trata de encontrar la trayectoria de un sistema de partículas puntuales sobre el que actúa un campo externo. La trayectoria es la incógnita, salvo en los puntos P_1 y P_2 que

son fijos, mientras que el potencial está preestablecido y, por lo tanto, no varía. Dado el carácter puntual de las cargas, ambas acciones pueden ser expresadas en forma discreta a través de sumatorias sobre todas las partículas.

- En el segundo, la trayectoria es conocida, su variación nula y el potencial, que puede ser considerado como sistema de coordenadas generalizadas del campo, varía en el interior del dominio Ω del problema y es fijo en su contorno Σ . El carácter esencialmente continuo de los campos exige que las acciones sean formuladas como funciones continuas, lo que se lleva a cabo mediante el uso de la delta de Dirac.

2.3.1. Densidades; ecuación de continuidad

No existe ninguna evidencia experimental que contradiga el carácter puntual del electrón. En cuanto al núcleo, su dimensión es del orden del Fermi ($10^{-15} m$) por lo que las ondas correspondientes a la primera parte de la banda de rayos γ verán a éste como puntual. Los iones, cuya dimensión es del orden del \AA ($10^{-10} m$), aparecerán como puntuales para los rayos X blandos. Queda pués, dentro de una descripción no cuántica, un amplio margen del espectro de las ondas electromagnéticas dentro del cual las cargas pueden tratarse como puntuales. Con las limitaciones mencionadas, la descripción de la distribución de carga y corriente en el espacio de configuración es muy simple, basta con enumerar las posiciones y velocidades de las partículas en cada instante y especificar la carga y masa que cada una de ellas transporta. Otra alternativa, igualmente exhaustiva pero formalmente continua, consiste en el uso de las densidades de carga y corriente. Aunque lo que aquí se expone es fácilmente extensible a la descripción de las distribuciones de masa, el tratamiento se concreta a las de carga.

La *Densidad de carga* $\rho(\vec{r}, t)$ es una magnitud que, integrada sobre un volumen fijo \mathcal{V} del espacio ordinario, proporciona una medida de la carga encerrada en el mismo

$$Q(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}, t) dv \quad (2.23)$$

Dada la naturaleza puntual de las partículas, puede obtenerse una medida exacta de $Q(t)$ ⁷ para un sistema de N partículas haciendo uso de la δ de Dirac para definir

$$\rho(\vec{r}, t) \equiv \sum_{\nu=1}^N e_{\nu} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\nu}(t)) = \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu} \quad (2.24)$$

donde e_{ν} ⁸ es la carga de una de las partículas, $\vec{r}_{\nu}(t)$ su posición instantánea y ρ_{ν} la contribución de la misma a la densidad. Integrando sobre \mathcal{V} se comprueba que, efectivamente, la definición anterior es una densidad exacta.

⁷En el capítulo 3 se tratará de como obtener densidades aproximadas, mediante operaciones de promedio. Estas son de una mayor utilidad práctica que las densidades exactas que aquí se proponen.

⁸Las partículas transportan masa, energía, cantidad de movimiento, etc., por lo que este mismo tipo de definición sirve para las densidades respectivas de masa

$$Q(t) = \sum_{\nu=1}^N \int_{\mathcal{V}} e_{\nu} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\nu}(t)) dv = \sum_{\mu=1}^{N_{\mathcal{V}}(t)} e_{\mu}$$

donde $N_{\mathcal{V}}(t)$ es el número de partículas que hay en \mathcal{V} en el instante t y μ el índice que las describe.

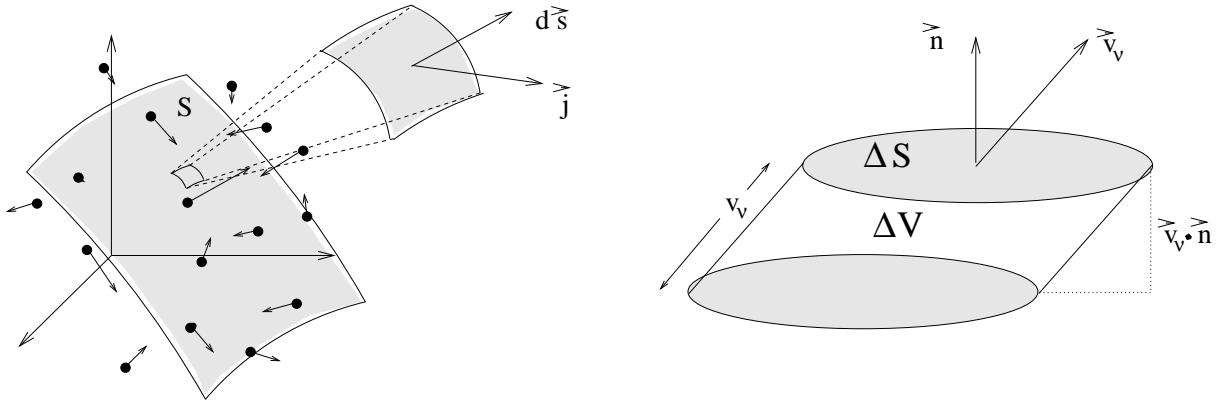


Figura 2.2: Densidad de corriente

De forma análoga, la *Densidad de corriente* $\vec{j}(\vec{r}, t)$ de carga es una magnitud que, integrada sobre la superficie S fija, proporciona la cantidad de carga que, por unidad de tiempo y en el instante actual, atraviesa dicha superficie.

$$\frac{dQ_s(t)}{dt} = \int_S \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} \quad (2.25)$$

Es fácil de comprobar que

$$\vec{j}(\vec{r}, t) \equiv \sum_{\nu=1}^N e_{\nu} \vec{v}_{\nu}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\nu}(t)) = \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu}(\vec{r}, t) \vec{v}_{\nu}(t) = \sum_{\nu=1}^N \vec{j}_{\nu} \quad (2.26)$$

, donde \vec{j}_{ν} es la contribución a la densidad de corriente de la partícula ν , es una definición exacta⁹.

Efectivamente, como se muestra en la figura 2.2, todas las cargas con velocidad \vec{v}_{ν} que están contenidas en $\Delta\mathcal{V}$, es decir, $\Delta S \rho_{\nu} \vec{v}_{\nu} \cdot \vec{n} = \vec{j}_{\nu} \cdot \vec{n} \Delta S$ ¹⁰, atraviesan el elemento de superficie ΔS en la unidad de tiempo. Luego la contribución de la partícula al cómputo de la carga que atraviesa la unidad de superficie en la unidad de tiempo es

$$\frac{d^2 Q_{s_{\nu}}}{ds dt} = \vec{j}_{\nu} \cdot \vec{n}$$

⁹También puede interpretarse, de acuerdo con lo anteriormente expuesto, como la densidad de "e \vec{v} ".

¹⁰Este término solo es distinto de cero cuando la partícula ν está en $\Delta\mathcal{V}$ en el instante actual.

Sumando la contribución de todas las cargas del sistema e integrando sobre la superficie \mathcal{S}

$$\frac{dQ_s(t)}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \frac{dQ_{s_\nu}(t)}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \int_{\mathcal{S}} \vec{j}_\nu(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \oint_{\mathcal{S}} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s}$$

Ecuaciones de continuidad :

La experiencia establece que la carga puede crearse y destruirse pero siempre en parejas de carga positiva y negativa. Existe una gran variedad de mecanismos por los que, tanto desde el punto de vista microscópico como macroscópico, se crea y se destruye carga, pero todos ellos verifican la condición de neutralidad neta: creaciones de pares, ionizaciones, recombinaciones, etc.. En consecuencia, se considera que el Universo es globalmente neutro. Esta realidad experimental se eleva a postulado con el nombre de *Principio de neutralidad del Universo*.

A partir de estas definiciones microscópicas de las densidades pueden obtenerse las ecuaciones de continuidad de la carga neta y de cada una de las especies de carga que componen el sistema.

Derivando 2.24 con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial}{\partial t} \{e_\nu \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t))\} = \\ &= \underbrace{\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial e_\nu}{\partial t} \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t))}_{(a)} + \underbrace{\sum_{\nu=1}^N e_\nu \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t))}_{(b)} \end{aligned}$$

El término (a), como los demás de esta expresión, corresponde a un número de partículas que aparece, por unidad de tiempo y de volumen, en (\vec{r}, t) . Al escribir simbólicamente $\frac{\partial e_\nu}{\partial t}$ se indica que las partículas en cuestión, aunque tienen carga e_ν mientras existen, pueden aparecer ($\frac{\partial |e_\nu|}{\partial t} > 0$), o desaparecer ($\frac{\partial |e_\nu|}{\partial t} < 0$) del entorno de (\vec{r}, t) , por procesos de creación o destrucción de carga. Si se tiene en cuenta que existen cargas de ambos signos y que, por el principio de neutralidad, en cada punto e instante se crea o se destruye tanta carga positiva como negativa, (a) puede escribirse como

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial e_\nu}{\partial t} \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t)) = \tau_+(\vec{r}, t) - \tau_-(\vec{r}, t) = 0$$

donde τ_{+-} son las tasas de creación de carga positiva y negativa (carga de cada signo creada por unidad de volumen y tiempo en (\vec{r}, t)). Por el principio de neutralidad del universo, las tasas son iguales y su diferencia nula.

El término (b) puede tratarse fácilmente mediante el cambio de variable $\vec{\kappa}(\vec{r}, t) \equiv \vec{r} - \vec{r}_\nu(t)$, que es función de \vec{r} y de t (a través de $\vec{r}_\nu(t)$), lo que permite expresar a la delta de Dirac como $\delta(\vec{\kappa})$ y derivarla como función de función¹¹. De esta forma

$$\begin{aligned} e_\nu \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t)) &= e_\nu \frac{\partial \delta(\vec{\kappa})}{\partial \vec{\kappa}} \cdot \frac{\partial \vec{\kappa}}{\partial t} = -e_\nu \vec{v}_\nu \cdot \nabla \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t)) = \\ &= -\nabla \cdot \{e_\nu \vec{v}_\nu \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t))\} = -\nabla \cdot \vec{j}_\nu \end{aligned} \quad (2.27)$$

En los pasos anteriores se ha tenido en cuenta que

$$\frac{\partial \vec{\kappa}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{r}_\nu(t)}{\partial t} = -\vec{v}_\nu(t) , \text{ que } \frac{\partial \delta(\vec{\kappa})}{\partial \vec{\kappa}} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t))$$

y se ha hecho uso del desarrollo de la divergencia del producto de un escalar por un vector teniendo en cuenta que $\vec{v}_\nu(t)$ no depende de \vec{r} .

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores, se deduce la ecuación de continuidad de la carga neta

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.28)$$

Si se expresa la densidad de carga neta como $\rho = \rho_+ + \rho_-$, suma de las densidades de carga positiva y negativa, se obtienen las ecuaciones de continuidad para las cargas de ambos signos

$$\nabla \cdot \vec{j}_{+-} + \frac{\partial \rho_{+-}}{\partial t} = \tau_{+-} \quad (2.29)$$

2.3.2. Acción de la interacción entre un sistema de partículas y un campo electromagnético; tetravector potencial

En la electrodinámica no relativista, la energía potencial electromagnética viene expresada por 2.3 y, según se ha visto, las predicciones que se obtienen de las ecuaciones de Maxwell se experimentan como correctas en cualquier sistema inercial. Por otra parte, como sugiere la ley de fuerzas de Lorentz y confirma la experiencia, a diferencia de la masa, la carga de una partícula es independiente de su velocidad¹². El marco prerelativista solo es incompleto en cuanto a que no establece leyes de transformación correctas para el resto de las magnitudes. Por estas razones, se mantiene la expresión de la acción de la interacción aunque se postula que, tanto ésta como la carga, son invariante escalares. De esta forma se establecen completamente la estructura tensorial del campo electromagnético y las leyes de transformación de todas sus magnitudes.

Se POSTULA como acción de la interacción de una partícula cargada con un campo electromagnético externo al escalar

¹¹ Se hará uso de la notación general $\partial/\partial \vec{\kappa} \rightarrow (\partial/\partial \kappa_x, \partial/\partial \kappa_y, \partial/\partial \kappa_z)$. En particular, $\partial/\partial \vec{r} \rightarrow \nabla$.

¹² Una de las confirmaciones más precisas de la invarianza de la carga la proporciona la neutralidad de los átomos [Jackson].

$$\mathcal{A}_i = -e \int_1^2 \vec{\vec{A}} \cdot d\vec{\vec{s}} \quad (2.30)$$

donde e , la carga de la partícula, es también un escalar. Dado que $d\vec{\vec{s}}$ es un tetravector, las reglas de contraste tensorial aseguran que

$$\vec{\vec{A}} \equiv \rightarrow \begin{cases} A^i = (\frac{\Phi}{c}, \vec{A}) \\ A_i = (\frac{\Phi}{c}, -\vec{A}) \end{cases} \quad (2.31)$$

es un tetravector, el *Tetravector potencial*. Sus componentes se transforman por lo tanto como las de un vector.

El lagrangiano de la interacción, para una partícula en campo externo, es

$$L = -e \vec{\vec{A}} \cdot \frac{d\vec{\vec{s}}}{dt} \quad (2.32)$$

y, para un sistema de N partículas en campo externo,

$$L_i = - \sum_{\nu} e_{\nu} \vec{\vec{A}}(\vec{\vec{s}}_{\nu}) \cdot \frac{d\vec{\vec{s}}_{\nu}}{dt} \quad (2.33)$$

donde $\vec{\vec{s}}_{\nu} \rightarrow s_{\nu}^i = x_{\nu}^i = (ct, \vec{r}_{\nu}(t))$ es la posición de la partícula ν en el espacio de Minkowski.

2.3.3. Acción de la interacción entre una distribución de carga y corriente y un campo electromagnético; tetravector densidad de carga-corriente

La acción correspondiente al lagrangiano 2.33 puede escribirse formalmente en función de variables continuas para representar a la interacción entre un sistema de carga y corriente y un campo electromagnético. Efectivamente

$$\mathcal{A}_i = - \sum_{\nu} e_{\nu} \int_1^2 \vec{\vec{A}}(\vec{\vec{s}}_{\nu}) \cdot \frac{d\vec{\vec{s}}_{\nu}}{dt} dt = - \sum_{\nu} e_{\nu} \int_{(x^0)_1}^{(x^0)_2} \vec{\vec{A}}(\vec{\vec{s}}_{\nu}) \cdot \frac{d\vec{\vec{s}}_{\nu}}{dx^0} dx^0$$

El potencial puede expresarse como una integral sobre un volumen \mathcal{V} , que **encierra a todas las cargas** durante el intervalo temporal $ct = x^0 \in [(x^0)_1, (x^0)_2]$, mediante el teorema de desplazamiento de la delta de Dirac:

$$\vec{\vec{A}}(\vec{\vec{s}}_{\nu}) = \vec{\vec{A}}(\vec{r}_{\nu}, t) = \int_{\mathcal{V}} \vec{\vec{A}}(\vec{r}, t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\nu}(t)) dv$$

por lo que

$$\mathcal{A}_i = - \int_{\Omega} \vec{\vec{A}}(\vec{s}) \cdot \sum_{\nu} e_{\nu} \frac{d\vec{s}_{\nu}}{dx^0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\nu}(t)) dx^4$$

donde Ω es el hipervolumen de integración, definido por el volumen \mathcal{V} y el intervalo $x^0 \in [(x^0)_1, (x^0)_2]$, y $dx^4 = d\mathcal{V} dx^0$ el elemento escalar de dicho tetravolumen.

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{\nu} e_{\nu} \frac{d\vec{s}_{\nu}}{dx^0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\nu}(t)) \right\}^i &= \sum_{\nu} e_{\nu} \frac{dx_{\nu}^i}{dx^0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\nu}(t)) = \\ \frac{1}{c} \sum_{\nu} e_{\nu} (c, \vec{v}_{\nu}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\nu}(t)) &= \frac{1}{c} (c\rho, \vec{j}) \end{aligned}$$

la acción de la interacción puede escribirse de la forma

$$\mathcal{A}_i = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} \vec{\vec{A}}(\vec{s}) \cdot \vec{j}(\vec{s}) dx^4 \quad (2.34)$$

Tetravector densidad de carga-corriente :

En la última expresión se ha definido el *Tetravector densidad de carga-corriente* \vec{j} : es fácil de constatar su carácter vectorial dado que \mathcal{A}_i y dx^4 son escalares y $\vec{\vec{A}}$ es un tetravector. Luego

$$\vec{j} \equiv \rightarrow \begin{cases} j^i = (c\rho, \vec{j}) \\ j_i = (c\rho, -\vec{j}) \end{cases} \quad (2.35)$$

o, teniendo en cuenta la definición de $\vec{\vec{u}}$,

$$\vec{j} = \sum_{\nu} \vec{j}_{\nu} = \sum_{\nu} e_{\nu} \frac{\vec{u}_{\nu}}{\gamma_{\nu}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\nu}(t)) \quad (2.36)$$

De esta expresión de \vec{j} , dado que \vec{u}_{ν} son vectores y e_{ν} escalares, se deduce que

$$\frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\nu}(t))}{\gamma_{\nu}} = \text{escalar} \quad (2.37)$$

resultado interesante según el cual $\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\nu}(t))$ se transforma como el factor γ_{ν} de la partícula (Véase la expresión 1.42).

Puesto que el operador tetradimensional

$$\stackrel{\Rightarrow}{\nabla} \equiv \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^i = \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \end{array} \right. \quad (2.38)$$

es de tipo vectorial, véase el apéndice I, la ecuación de continuidad puede escribirse de forma manifiestamente invariante como

$$\stackrel{\Rightarrow}{\nabla} \cdot \stackrel{\Rightarrow}{j} = 0 \rightarrow = \left\{ \begin{array}{l} \nabla_i j^i = \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \\ \nabla^i j_i = \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0 \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Por último, es interesante notar que, dadas las reglas de transformación de $\stackrel{\Rightarrow}{j}$,

$$\begin{aligned} c\rho' &= \gamma(c\rho - \beta j_x) \\ j'_x &= \gamma(j_x - \beta c\rho) \\ j'_y &= j_y \\ j'_z &= j_z \end{aligned} \quad (2.40)$$

una componente longitudinal de la corriente puede generar en otro sistema a una densidad de carga neta ($j_x \rightarrow \rho'$). Por otra parte, puede comprobarse que la carga de una partícula, o la encerrada en un volumen determinado, es invariante ¹³.

2.4. Fuerza de Lorentz; campo electromagnético

Si ahora se plantea el problema 2.6a para una partícula cargada en campo externo, el lagrangiano correspondiente es

$$L_{p+i} = -m c \frac{ds}{dt} - e \stackrel{\Rightarrow}{A} \cdot \frac{d\stackrel{\Rightarrow}{s}}{dt} \quad (2.41)$$

o, expresado explícitamente en el espacio de configuración,

$$L_{p+i}(\vec{r}, \vec{v}, t) = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e \Phi(\vec{r}, t) + e \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (2.42)$$

Las ecuaciones de Lagrange para esta partícula son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0 \quad , , \quad \alpha = x, y, z$$

¹³Problema 2-11.

En este caso, el momento generalizado no coincide con el cinético

$$\vec{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{p} + e \vec{A} = \vec{p} + \vec{p}_p \quad (2.43)$$

sino que es la suma de éste con el *Momento potencial* $\vec{p}_p = e \vec{A}$

Hallando el gradiente del lagrangiano

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \nabla L = -e \nabla \Phi + e \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) + e (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}$$

Si se vuelve a definir a la fuerza sobre una partícula como agente de la variación temporal de la cantidad de movimiento

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.44)$$

las ecuaciones de Lagrange pueden escribirse de la forma¹⁴

$$\vec{F} = e \left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + e \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{A})$$

Esta es la fuerza que siente una carga en presencia de un campo electromagnético: viene expresada en función de las derivadas del potencial y consta de dos términos, el primero de los cuales es independiente de la velocidad y el otro proporcional a la misma a través de un producto vectorial. Definiendo en concreto al *Campo electromagnético* como

$$\vec{E} \equiv -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.45a)$$

$$\vec{B} \equiv \nabla \wedge \vec{A} \quad (2.45b)$$

donde \vec{E} recibe tradicionalmente el nombre de *Intensidad del campo eléctrico* y \vec{B} el de *Inducción magnética*¹⁵, se obtiene la *Ley de Lorentz*

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = e \vec{E} + e \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (2.46)$$

que expresa la ley del movimiento de una carga en presencia de dicho campo.

¹⁴Recuérdese que $d\vec{A}/dt = \partial \vec{A}/\partial t + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}$.

¹⁵Dado que actualmente dichos nombres, como los de intensidad magnética y desplazamiento eléctrico, han perdido gran parte de su vigencia, en adelante se les aplicarán apelativos tales como campo eléctrico, campo magnético, campo \vec{E} , \vec{B} . . .

2.4.1. Transformaciones de contraste y condiciones de contraste

La definición del campo dada en la sección anterior, en función de las derivadas del potencial, implica que tanto el potencial $A^i = (\frac{\Phi}{c}, \vec{A})$ definido como tetravector en 2.31, como cualquier otro que se obtenga a través del primero mediante las *Transformaciones de contraste*

$$\begin{aligned}\Phi_\chi &= \Phi - \frac{\partial \chi(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \vec{A}_\chi &= \vec{A} + \nabla \chi(\vec{r}, t)\end{aligned}\tag{2.47}$$

producen el mismo campo electromagnético. Para comprobarlo basta con sustituir lo anterior en 2.45. En principio, la función $\chi(\vec{r}, t)$ puede ser “arbitraria”, salvo que se supone de buen comportamiento y, por lo tanto, derivable tantas veces como sea necesario. No obstante, si se desea que los potenciales den lugar a acciones escalares¹⁶, como se postuló en 2.30, debe exigirse además que χ sea escalar, con lo que un potencial tetravector \vec{A} se transforma en otro tetravector \vec{A}_χ . Estas transformaciones pueden escribirse de la forma manifiestamente invariante

$$\vec{A}_\chi = \vec{A} - \vec{\nabla} \chi\tag{2.48}$$

El carácter vectorial de \vec{A}_χ se deduce del hecho de que el tetragradiente de un escalar es un tetravector.

Las transformaciones de contraste relacionan a un número infinito de potenciales con un campo electromagnético determinado. Esta infinidad de potenciales ni quita ni da significación física al campo frente al potencial, puesto que el fenómeno electromagnético puede ser expresado en función de uno u otro con exclusión del contrario y, si bien la fuerza aparece más directamente relacionada con el campo, la energía lo está con el potencial. La opción más útil es la de utilizar ambas herramientas para la descripción de la interacción electromagnética. No obstante, esta libertad de elección puede ser utilizada provechosamente para simplificar y homogeneizar el tratamiento matemático.

Las *Condiciones de contraste* son restricciones, compatibles con las transformaciones de contraste, que se imponen al potencial. Del carácter tetravectorial que se le exige al potencial, se deduce que cualquier potencial debe cumplir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{escalar}\tag{2.49}$$

En particular, la condición o *Contraste de Lorenz*¹⁷

¹⁶Se pueden utilizar potenciales que no sean tetravectoriales pero, dentro del marco relativista, esto es un inconveniente.

¹⁷Esta condición se debe al físico danés L. Lorenz y no al holandés H. A. Lorentz como erróneamente suele atribuirse [Whittaker].

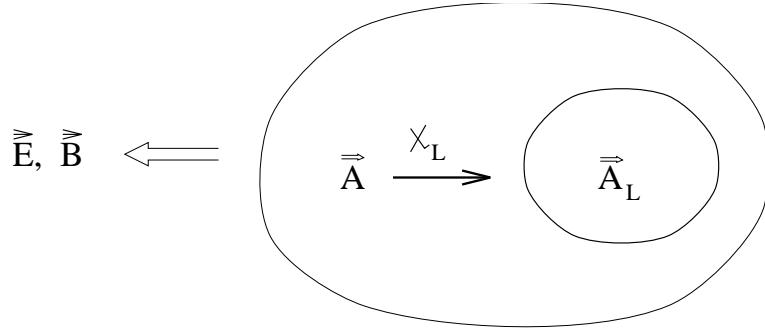


Figura 2.3: Transformaciones y condiciones de contraste

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0 \\ \frac{\partial A_i}{\partial x^i} = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

simplifica el estudio del campo electromagnético porque las ecuaciones de onda del potencial que las cumple, *Potencial de Lorenz*, son análogas a las del campo. En el formato tridimensional, esta condición se escribe como

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (2.51)$$

Pueden imponerse otro tipo de condiciones¹⁸ pero todas ellas deben ser compatibles con las transformaciones de contraste. Es decir, a partir de un potencial válido que no cumpla la condición de contraste, debe ser posible encontrar una transformación de contraste que resulte en un potencial que si la cumpla. Por ejemplo, la figura 2.3 ilustra como, si \vec{A} es un potencial que no cumple el contraste de Lorenz, puede encontrarse una función escalar $\chi_L(\vec{r}, t)$ tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\chi_L} = 0$. Efectivamente, de acuerdo con 2.49 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \psi(\vec{r}, t) = \text{escalar}$ por lo que, expresando al dalambertiano en forma manifiestamente escalar

$$\underline{\square} \equiv -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x^i} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.52)$$

y aplicando la tetradivergencia a 2.48, resulta que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\chi = \psi + \underline{\square} \chi_L$$

Basta con elegir una de las infinitas soluciones posibles, χ_L , de la ecuación $\underline{\square} \chi_L = -\psi$, para obtener unas transformaciones de contraste conducentes a un potencial de Lorenz. Estos últimos, como se indica en la figura, constituyen un subconjunto de todos los potenciales posibles.

¹⁸La de Coulomb, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, se suele utilizar en otros contextos teóricos pero es inconveniente para el estudio de los fenómenos de propagación y radiación.

2.4.2. El tensor del campo

El campo electromagnético, definido en 2.45 como el conjunto de dos "vectores" tridimensionales, tiene realmente carácter de tensor de segundo orden. En particular, la definición del campo puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\frac{\vec{E}}{c} &\equiv -\nabla \frac{\Phi}{c} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial ct} \\ \vec{B} &\equiv \nabla \wedge \vec{A}\end{aligned}$$

De acuerdo con la definición de rotacional tensorial I.46 y anotando $\vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla} \wedge$, las expresiones anteriores pueden escribirse de la forma manifiestamente tensorial¹⁹

$$\tilde{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (2.53)$$

donde se ha definido el *Tensor del campo electromagnético*, cuyas componentes doblemente covariantes vienen definidas por (I.46)

$$F_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i} A_j - \frac{\partial}{\partial x^j} A_i \quad (2.54)$$

que, en forma matricial, corresponden a ($i \rightarrow \text{filas}, j \rightarrow \text{columnas}$)

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & , & \frac{E_x}{c} & , & \frac{E_y}{c} & , & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & , & 0 & , & -B_z & , & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & , & B_z & , & 0 & , & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & , & -B_y & , & B_x & , & 0 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Multiplicando por el tensor métrico, pueden obtenerse las componentes contravariantes F^{ij}

$$F^{kl} = g^{ki} g^{lj} F_{ij} \quad \Rightarrow \quad (F^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & , & -\frac{E_x}{c} & , & -\frac{E_y}{c} & , & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & , & 0 & , & -B_z & , & B_y \\ \frac{E_y}{c} & , & B_z & , & 0 & , & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & , & -B_y & , & B_x & , & 0 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

¹⁹Problema 2-18.

o las mixtas F_j^i . Es interesante notar que tanto las componentes contravariantes como las covariantes del tensor son antisimétricas, $F^{ij} = -F^{ji}$, $F_{ij} = -F_{ji}$, pero las mixtas no. \tilde{F} es, pues, un tensor cuyas componentes doblemente covariantes (contravariantes) son antisimétricas.

Las leyes de transformación de \vec{E} y de \vec{B} se obtienen mediante la identificación de sus componentes con las correspondientes del tensor \tilde{F}

$$F'^{ij} = a_k^i a_l^j F^{kl} \quad , , \quad F'_{ij} = b_i^k b_j^l F_{kl} \quad (2.57)$$

por lo que, operando sobre cualquiera de estas dos expresiones,²⁰

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad , , \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma (\vec{E}_{\perp} + \vec{V} \wedge \vec{B}_{\perp}) \quad (2.58a)$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \quad , , \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma (\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}_{\perp}) \quad (2.58b)$$

o, en forma compacta

$$\vec{E}' = \vec{E}_{\parallel} + \gamma (\vec{E}_{\perp} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (2.59a)$$

$$\vec{B}' = \vec{B}_{\parallel} + \gamma (\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}) \quad (2.59b)$$

Según puede verse, las componentes \vec{E}_{\parallel} y \vec{B}_{\parallel} , paralelas a la dirección del movimiento relativo entre los sistemas S y S' , son invariantes, mientras que las perpendiculares \vec{E}_{\perp} y \vec{B}_{\perp} varían. En el límite $\beta \ll 1$, quedándose con los términos de primer orden en β ,

$$\vec{E}' \simeq \vec{E} + c \vec{\beta} \wedge \vec{B} \quad (2.60a)$$

$$\vec{B}' \simeq \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{\beta} \wedge \vec{E} \quad (2.60b)$$

Esta aproximación de baja velocidad de las leyes de transformación de los campos no coincide con las leyes galileanas, para las cuales $\vec{B}' = \vec{B}$. Para que se verifique el principio de correspondencia es necesario exigir, además, que $c \rightarrow \infty$

²⁰Problemas 2-20 y 2-21.

2.4.2.1. Invariantes del campo

Los vectores tienen un invariante característico en su norma. En general, como se vió en el apartado I.2.3, la contracción de todos los índices de las componentes de un tensor de orden par resulta en un escalar. Asimismo, los productos tensoriales totalmente contraídos son escalares.

En particular, el tensor campo tiene asociados a dos invariantes (se excluye a la traza F_i^i , puesto que es idénticamente nula).

- El *Invariante cuadrático* se deduce del producto totalmente contraído de \tilde{F} por sí mismo. En adelante se anotará por

$$I_1 \equiv \frac{1}{2} F^{ij} F_{ij} = B^2 - \frac{E^2}{c^2} \quad (2.61)$$

- El *Invariante biquadrático* se deduce del producto totalmente contraído, de multiplicidad 4, de \tilde{F} por sí mismo²¹

$$F_{ij} F^{jk} F_{kl} F^{li} = \text{escalar} \Rightarrow I_2 \equiv (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \quad (2.62)$$

El primer invariante permite clasificar al campo, en un punto determinado \vec{s}_0 , de forma análoga a como se hizo con los intervalos espacio-temporales:

$$I_1(\vec{s}_0) \rightarrow \begin{cases} > 0 , B^2 > E^2/c^2 & \rightarrow \text{Tipo magnético} \\ = 0 , B^2 = E^2/c^2 & \rightarrow \text{Tipo electromagnético} \\ < 0 , B^2 < E^2/c^2 & \rightarrow \text{Tipo eléctrico} \end{cases} \quad (2.63)$$

Dado el signo que toma el invariante en cada caso, no existe ningún sistema de referencia desde el cual pueda anularse la parte magnética de un campo de tipo magnético ni la eléctrica de uno de tipo eléctrico. Para el campo de tipo electromagnético, no existe ningún sistema de referencia en el que pueda anularse solo su parte eléctrica o magnética.

Para saber si existe algún sistema de referencia desde el cual se anule alguno de los campos, es necesario investigar el valor del segundo invariante:

- Si $I_2(\vec{s}_0) \neq 0$, no existe ningún sistema de referencia desde el que pueda anularse alguno de los campos en el punto \vec{s}_0 . De ésto, y de lo visto anteriormente, se deduce que el campo electromagnético es una entidad tensorial y que solo la conveniencia de simplificar su uso autoriza a tratarlo como la superposición de un campo eléctrico y otro magnético. Carecen de sentido físico los esfuerzos realizados para presentar al campo magnético como consecuencia relativista del eléctrico y viceversa.

- En el caso en que $I_2(\vec{s}_0) = 0$, el campo eléctrico y el magnético son perpendiculares o nulos en todos los sistemas de referencia. Si se quiere eliminar alguno de los campos, \vec{V} debe ser perpendicular al mismo, puesto que las componentes paralelas son invariantes. Tomando $\vec{V} \perp \vec{E}, \vec{B}$, las componentes paralelas de ambos campos \vec{E}_{\parallel} y \vec{B}_{\parallel} se anulan²² y

²¹Problema 2-22.

²²No es estrictamente necesario que se anulen las componentes paralelas de ambos campos. Véase el problema 2-23.

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E})$$

Para campos de tipo magnético puede eliminarse el campo \vec{E}' en un S' que se mueve con respecto a S con velocidad \vec{V}_E ²³

$$I_1 > 0, I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_E = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} \quad , \quad V_E = \frac{E}{B} < c \quad (2.64)$$

donde, para despejar \vec{V} se ha tenido en cuenta que $\vec{V} \perp \vec{B}$.

De forma análoga, para campos de tipo eléctrico, puede anularse el campo \vec{B}' en un S' que se mueve con respecto a S con velocidad \vec{V}_B

$$I_1 < 0, I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_B = c^2 \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{E^2} \quad , \quad V_B = c^2 \frac{B}{E} < c \quad (2.65)$$

En el vacío, ambos invariantes son nulos para las ondas electromagnéticas planas y homogéneas, por lo que dichas ondas conservan su carácter en los distintos sistemas de referencia.

2.4.3. Tetravectores de fuerza

La fuerza sobre una partícula, definida en 2.44, no está expresada de forma manifiestamente invariante. \vec{p} es la última parte de un tetravector pero aparece derivada con respecto al tiempo, que no es un escalar. A continuación se verá como dicha fuerza puede ser englobada indirectamente en el tetravector fuerza de Minkowski y que la densidad de fuerza es directamente la última parte de otro tetravector, el de densidad de potencia-fuerza.

2.4.3.1. Fuerza de Minkowski; ecuaciones del movimiento de una carga

La fuerza sobre una partícula queda incluida en el tetravector *Fuerza de Minkowski* definido como el producto de la masa en reposo por el tetravector aceleración

$$\overset{\rightrightarrows}{M} \equiv \frac{d \overset{\rightrightarrows}{p}}{d\tau_p} = \gamma_p \frac{d \overset{\rightrightarrows}{p}}{dt} = m \overset{\rightrightarrows}{w} \quad (2.66)$$

De acuerdo con 2.18 y 2.44

$$M^i = \gamma_p \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \vec{F} \right) \quad (2.67)$$

²³Una vez anulado \vec{E}' , para despejar la velocidad se multiplica vectorialmente por \vec{B} y se desarrolla el triple producto resultante teniendo en cuenta que la velocidad es perpendicular a los campos.

Las leyes de transformación de \vec{F} se obtienen sin dificultad ya que $\gamma_p \vec{F}$ tiene por componentes a las tres últimas del tetravector \vec{M} y γ_p se transforma según 1.42.

Si se escribe $p^2 = \vec{p} \cdot \vec{p}$ en 2.21 y se deriva, se obtiene la potencia que la fuerza aplicada transmite a la partícula

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} \quad (2.68)$$

y teniendo en cuenta que, en el caso de que la fuerza sea electromagnética, $\vec{v} \cdot \vec{F} = e \vec{v} \cdot \vec{E}$,

$$M^i = \gamma_p \left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{F}, \vec{F} \right) \quad (2.69a)$$

$$M^i = \gamma_p e \left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{E}, \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \quad (2.69b)$$

A parte del factor γ_p , la primera componente de la fuerza de Minkowski contiene a la potencia que el campo cede a la carga y las tres últimas a la fuerza ejercida sobre la misma.

Desarrollando 2.69b para cada una de las componentes puede comprobarse que²⁴

$$\vec{M} = e \vec{F} \cdot \vec{u} \rightarrow \begin{cases} M^i = e F^{ij} u_j \\ M_i = e F_{ij} u^j \end{cases} \quad (2.70)$$

con lo que las ecuaciones del movimiento de una partícula son

$$m \frac{d \vec{u}}{d\tau_p} = e \vec{F} \cdot \vec{u} \rightarrow \begin{cases} d\mathcal{E}/dt = \vec{v} \cdot \vec{F} \\ d\vec{p}/dt = \vec{F} \end{cases} \quad (2.71)$$

En el caso de una carga

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e \vec{v} \cdot \vec{E} \quad (2.72a)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (2.72b)$$

El apéndice B incluye el estudio de los casos más característicos de movimiento de partículas cargadas en presencia de un campo electromagnético.

²⁴Problema 2-31.

2.4.3.2. Tetravector densidad de potencia-fuerza

La fuerza ejercida por el campo electromagnético, así como la potencia cedida por éste, sobre la unidad de volumen de cargas, pueden ser englobadas en un tetravector. Con este objeto se multiplica la fuerza de Minkowski \vec{M}_ν , ejercida sobre una de las partículas de la distribución, por el escalar 2.37, con lo que se obtiene el tetravector

$$\vec{f}_\nu \equiv \vec{M}_\nu \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t))}{\gamma_\nu} \quad (2.73)$$

donde γ_ν es el factor γ de la partícula.

Se define como *Tetravector densidad de potencia-fuerza* a

$$\vec{f} \equiv \sum_{\nu=1}^N \vec{f}_\nu \quad (2.74)$$

Puede comprobarse que la primera componente del tetravector así definido es proporcional a la densidad de potencia y que las tres últimas constituyen la densidad de fuerza. Efectivamente, haciendo uso de 2.69a y teniendo en cuenta a la definición de densidad

$$f^i = \sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\vec{v}_\nu}{c} \cdot \vec{F}_\nu, \vec{F}_\nu \right) \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t)) \quad (2.75)$$

donde \vec{F}_ν es la fuerza que actúa sobre una partícula.

Otra expresión de este tetravector se obtiene de la definición 2.66

$$\vec{f} = \sum_{\nu=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t)) \frac{d \vec{p}_\nu}{dt} \quad (2.76)$$

En el caso de que la fuerza se deba al campo electromagnético, 2.70 se escribe de la forma

$$\vec{M}_\nu(\vec{r}_\nu, t) = e_\nu \tilde{F}(\vec{r}_\nu, t) \cdot \vec{u}_\nu \quad (2.77)$$

Haciendo uso de la propiedad de la delta de Dirac según la cual $f(x_0)\delta(x - x_0) = f(x)\delta(x - x_0)$, 2.73 toma la forma

$$\vec{f}_\nu = \tilde{F}(\vec{r}, t) \cdot (e_\nu \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t)) \frac{\vec{u}_\nu}{\gamma_\nu})$$

y, según 2.36,

$$\vec{f} = \tilde{F} \cdot \vec{j} \quad \rightarrow \quad f^i = F^{ij} j_j = \left(\frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}, \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \right) \quad (2.78)$$

La primera componente de este vector es la potencia que el campo suministra a las cargas por unidad de volumen, dividida por c, y las tres últimas son las de la fuerza por unidad de volumen que el campo ejerce sobre las cargas.

2.5. Ecuaciones de Maxwell-Lorentz

De la propia definición 2.45 del campo se deducen dos ecuaciones microscópicas de Maxwell, la de Faraday y la de ausencia de monopolos magnéticos, que pueden expresarse conjuntamente en una ley tensorial que, con objeto de anotarla de alguna manera, aquí se denominará como primera ley tensorial de Maxwell. Las otras dos ecuaciones se derivan de aplicar el principio de mínima acción a $\mathcal{A}_{i+c} = \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_c$. En conjunto, describen la evolución del campo electromagnético en presencia de distribuciones de cargas y corrientes preestablecidas; se anotará como segunda ley tensorial de Maxwell.

2.5.1. Primera ley tensorial de Maxwell

Hallando el rotacional de \vec{E} y la divergencia de \vec{B} en 2.45, se obtiene

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.79a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.79b)$$

puesto que $\nabla \wedge \nabla \Phi = 0$ y $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{A}) = 0$.

La primera de estas ecuaciones es la correspondiente a la *Ley de inducción de Faraday* y la segunda a la de *Ausencia de monopolos magnéticos*. Ambas pueden ser expresadas de forma manifiestamente invariante como

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial F^{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial F^{jk}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \tilde{R}^{(3)} = \tilde{0} \quad (2.80)$$

donde $\tilde{R}^{(3)}$ es un tensor de orden 3, cuyas componentes triplemente contravariantes se definen como

$$R^{ijk} \equiv \frac{\partial F^{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial F^{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial F^{jk}}{\partial x_i}$$

R^{ijk} son las componentes de un tensor porque cada uno de sus términos se transforma según la regla $R'^{ijk} = a_l^i a_m^j a_n^k R^{lmn}$. De sus 64 componentes, todas, menos las cuatro para las que $i \neq j \neq k \neq i$, son idénticamente nulas. Estas cuatro componentes no identicamente nulas, igualadas a cero, corresponden a las ecuaciones 2.79a y 2.79b²⁵, como puede comprobarse por sustitución. Es fácil ver que las componentes R^{ijj} en las que se repite un índice son nulas puesto que al ser las F^{ij} antisimétricas, $F^{ij} = -F^{ji}$ y $F^{jj} = 0$.

2.5.2. Acción del campo

Queda por postular la acción del campo \mathcal{A}_c . No cabe deducir lo que en definitiva es un postulado que se justifica por la exactitud de sus consecuencias, pero se dispone de pistas razonables de tipo teórico y experimental sobre la forma de enunciarlo. El principio de relatividad exige que la primera variación de la acción sea invariante y se tiene la certeza experimental de que el campo electromagnético, en ausencia de cargas, cumple el principio de superposición y, en consecuencia, las ecuaciones que describen su evolución deben ser lineales. Dado que al efectuar una variación, como es fácil de comprobar, el orden de los monomios disminuye, y el de derivación aumenta, en una unidad, para obtener ecuaciones diferenciales lineales para el campo, la acción debe incluir expresiones cuadráticas de éste. Como el único invariante cuadrático del campo de que se dispone es $F^{ij} F_{ij}$, una acción escalar, que es función cuadrática de los campos, es la que a continuación se POSTULA:

$$\mathcal{A}_c = C \int_{\Omega} F^{ij} F_{ij} dx^4 \quad (2.81)$$

donde C es un escalar cuyo valor se determinará según el sistema de unidades elegido ($C = -1/(4Z_0)$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ para el MKS) y Ω es un hipervolumen, en principio arbitrario, en cuya hipersuperficie Σ los potenciales son conocidos y, por lo tanto, tienen variación nula.

2.5.3. Segunda ley tensorial de Maxwell

Para encontrar la segunda ley tensorial de Maxwell, se plantea el problema 2.6c, en el cual se anula la primera variación de la acción $\mathcal{A}_{i+c} = \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_c$. De acuerdo con 2.81 y 2.34

$$\mathcal{A}_{i+c} = \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{c} \vec{\vec{A}} \cdot \vec{\vec{j}} + C F^{ij} F_{ij} \right) dx^4$$

donde Ω debe incluir a todas las partículas, es decir, $\vec{\vec{j}} = \vec{0}$ fuera de Ω , puesto que bajo dicha condición se ha obtenido la expresión empleada para \mathcal{A}_i , pero no tiene por qué incluir a la totalidad del campo, basta que el potencial sea conocido en la hipersuperficie Σ que envuelve a Ω , es decir, en la superficie de \mathcal{V} y en los instantes $(x^0)_1$ y $(x^0)_2$. Para este problema se considera que las cargas y las corrientes son conocidas, por lo que

$$\delta \vec{\vec{j}} = 0$$

²⁵Problema 2-32.

y que son el potencial y el campo los que se varían en el interior de Ω para establecer la distribución de campo que hace extrema a la acción. Véase que, de acuerdo con II.4, el potencial $\vec{A}(\vec{s}) = \vec{A}(\vec{r}, t)$ puede tomarse como coordenada generalizada, lo que reduce el problema a la búsqueda del camino $\vec{A}(\vec{r}, t)$ que hace extremo a \mathcal{A}_{i+c} y tal que

$$(\delta \vec{A})_\Sigma = 0$$

De acuerdo con ésto

$$\delta \mathcal{A}_{i+c} = \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{c} \delta \vec{A} \cdot \vec{j} + C \delta [F^{ij} F_{ij}] \right) dx^4$$

Para expresar al segundo término en función de $\delta \vec{A}$, se hace lo que sigue:

$$\delta [F^{ij} F_{ij}] = F^{ij} \delta F_{ij} + \underbrace{F_{ij} \delta F^{ij}}_{(a)} = 2 F^{ij} \delta F_{ij}$$

ya que

$$(a) = F_{ij} g^{ik} g^{jl} \delta F_{kl} = F^{kl} \delta F_{kl} = F^{ij} \delta F_{ij}$$

Para llegar a la última expresión se han cambiado de nombre a los índices $i \leftrightarrow k$, $j \leftrightarrow l$ en la sumatoria (a), se ha tenido en cuenta la simetría de las componentes del tensor métrico y se ha utilizado a éste para subir de nuevo los índices de F_{kl} . Si ahora se expresan los F_{ij} , según 2.54

$$\delta [F^{ij} F_{ij}] = 2 F^{ij} \delta \left[\frac{\partial}{\partial x^i} A_j - \frac{\partial}{\partial x^j} A_i \right] = 2 \left[F^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_j - \underbrace{F^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \delta A_i}_{(b)} \right]$$

Cambiando ahora los nombres $i \leftrightarrow j$ en la sumatoria (b) y teniendo en cuenta que $F^{ji} = -F^{ij}$

$$\begin{aligned} \delta [F^{ij} F_{ij}] &= 4 F^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_j = 4 \frac{\partial}{\partial x^i} [F^{ij} \delta A_j] - 4 \delta A_j \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = \\ &= 4 \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\tilde{F} \cdot \delta \vec{A})}_{(c)} - 4 \delta \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \tilde{F}) \end{aligned}$$

El término (c) integrado sobre Ω se anula, ya que

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\tilde{F} \cdot \delta \vec{A}) dx^4 = 0$$

y, de acuerdo con el teorema de la divergencia, puede convertirse en una integral sobre Σ donde $(\delta \vec{A})_\Sigma = 0$.

Esto permite escribir

$$\delta \mathcal{A}_{i+c} = - \int_{\Omega} \delta \vec{\vec{A}} \cdot \left(\frac{1}{c} \vec{\vec{j}} + 4C \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{F}} \right) dx^4$$

y puesto que $\delta \vec{\vec{A}}$ es arbitrario en el interior de Ω ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{F}} = \frac{-1}{4cC} \vec{\vec{j}}$$

Identificando a cualquiera de las componentes de esta ecuación con la correspondiente de las ecuaciones de Maxwell, expresada en el sistema MKS, se encuentra que $C = -1/(4Z_0)$, donde $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = \mu_0 c \simeq 120\pi\Omega$ es la *Impedancia del vacío* y tiene por tanto carácter escalar, como μ_0 y ϵ_0 .

El segundo par de las ecuaciones de Maxwell queda pues de la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{F}} = \mu_0 \vec{\vec{j}} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = \mu_0 j^j \quad (2.82)$$

Estas ecuaciones relacionan al campo con las cargas y las corrientes.

2.5.4. Expresión tridimensional de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz

Desarrollando la ecuación 2.82 y agrupando términos se obtienen las ecuaciones tridimensionales 2.83a y 2.83d, las cuales, junto con las 2.79a y 2.79b, constituyen lo que se conoce como ecuaciones de Maxwell-Lorentz:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.83a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.83b)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.83c)$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.83d)$$

La ecuación de continuidad de la carga neta 2.28 puede también deducirse de 2.83a y 2.83d

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.84)$$

Como se ha visto, son ecuaciones de tipo microscópico en las que ρ y \vec{j} vienen dados por 2.24 y 2.26 respectivamente y los campos están definidos exactamente en cada punto del espacio.

La fuerza electromagnética clásica que actúa sobre una carga viene dada por 2.46. Si a ésta añadimos otras fuerzas \vec{F}' , como las puramente mecánicas (p. ej: las que mueven el rotor de una dinamo), cuánticas (p. ej: las existentes en el interior de una pila o las de interacción de espín) o la gravitatoria, las ecuaciones del movimiento de las cargas pueden expresarse como

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{F}' \quad (2.85)$$

Estas ecuaciones son aplicables a un conjunto restringido de problemas en los que el número de partículas que intervienen es suficientemente pequeño y \vec{F}' tiene una expresión simple. Las ecuaciones de Maxwell permiten determinar la evolución del campo en función de las cargas. La del movimiento permite hallar la evolución de las cargas en función de los campos. A pesar de las limitaciones mencionadas las ecuaciones anteriores constituyen el punto de partida para la obtención de otras de tipo macroscópico que describan aproximadamente la interacción del campo electromagnético en el seno de medios extensos.

2.6. Leyes de conservación

A partir de las expresiones del tetravector de potencia-fuerza pueden obtenerse ecuaciones de continuidad, o conservación, para la energía y la cantidad de movimiento. Según 2.74 y 2.76, este tetravector puede expresarse de la forma

$$\vec{f} = \sum_{\nu=1}^N \vec{f}_\nu = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t)) \frac{d\vec{u}_\nu}{dt} \quad (2.86)$$

o, en función del tensor del campo,

$$\vec{f} = \tilde{F} \cdot \vec{j} \Rightarrow f^i = F^{ij} j_j \quad (2.87)$$

Dado el papel equivalente de las partículas y el campo, puede decirse que, si \vec{f} es la densidad de la fuerza ejercida sobre las partículas, también, según la expresión anterior, puede interpretarse como "menos la densidad de la fuerza ejercida sobre el campo". Puede pues hablarse de la existencia de un principio de acción y reacción local entre las partículas y el campo.

En las siguientes secciones se verá que la densidad de fuerza puede expresarse como la divergencia de sendos tensores

$$\vec{f} = + \vec{\nabla} \cdot \tilde{T}_p \quad (2.88a)$$

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{T}_c \quad (2.88b)$$

donde \tilde{T}_p es el *Tensor densidad de energía-momento de las partículas* y \tilde{T}_c el *Tensor densidad de energía-momento del campo*. Restando las dos expresiones anteriores, resulta que

$$\vec{\nabla} \cdot (\tilde{T}_p + \tilde{T}_c) = \vec{\nabla} \cdot \tilde{T} = 0 \quad (2.89)$$

o, de otra forma, que el tensor energía-momento conjunto \tilde{T} de las partículas más el campo es solenoidal. Evidentemente, estos tensores están indeterminados en cuanto puede añadírseles otro tensor de divergencia nula, por lo que las definiciones que más adelante se adoptan no son las únicas posibles pero sí las más convenientes.

Las expresiones 2.88a-2.89 y las interpretaciones que se ofrecen en los epígrafes siguientes confirman y refuerzan el carácter material del campo electromagnético. En un sistema de partículas cargadas y campos, ambos transportan energía y cantidad de movimiento que intercambian entre sí con el mismo tipo de reglas.

2.6.1. Tensor densidad de energía-momento de las partículas

Para hallar la expresión del tensor energía-momento de las partículas se partirá de la expresión 2.86, de la cual se toma el valor de la componente i de la aportación a la densidad de fuerza de la partícula ν .

$$f_\nu^i = m_\nu \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu(t)) \frac{d u_\nu^i(t)}{dt}$$

expresión en la que se resalta el hecho de que $u_\nu^i(t)$ es solo función del tiempo. Por esta razón, de acuerdo con 1.41,

$$\frac{d u_\nu^i}{dt} = c \frac{\partial u_\nu^i}{\partial x^0} = \frac{u_\nu^0}{\gamma_\nu} \frac{\partial u_\nu^i}{\partial x^0} = \frac{1}{\gamma_\nu} u_\nu^j \frac{\partial u_\nu^i}{\partial x^j}$$

En la última expresión se han añadido los términos $u_\nu^\alpha \frac{\partial u_\nu^i}{\partial x^\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$ que son nulos porque $u_\nu^i(t)$ no depende de \vec{r} . Así pues

$$f_\nu^i = \frac{m_\nu}{\gamma_\nu} \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu) u_\nu^j \frac{\partial u_\nu^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \frac{m_\nu}{\gamma_\nu} \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu) u_\nu^j u_\nu^i \right\} - m_\nu u_\nu^i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu) \frac{u_\nu^j}{\gamma_\nu} \right\}}_{(a)=0} \quad (2.90)$$

El término (a) se anula porque, según 1.41, $\frac{u_\nu^j}{\gamma_\nu} = (c, \vec{v}_\nu(t))$ y

$$(a) = \underbrace{\frac{\partial \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu)}{\partial t}}_{(b)} + \underbrace{\nabla \cdot (\vec{v}_\nu(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu))}_{(c)}$$

Para comprobar que $(a) = 0$ basta con desarrollar la divergencia de un vector por un escalar, verificar que $\nabla \cdot \vec{v}_\nu(t) = 0$, porque $\vec{v}_\nu(t)$ solo depende de t , y que, de acuerdo con 2.27, $(c) = \vec{v}_\nu \cdot \nabla \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu) = -(b)$.

Luego, sumando la expresión 2.90 de f_ν^i para todas las partículas del sistema, se deduce que

$$\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{T}_p \Rightarrow f^j = \frac{\partial T_p^{ij}}{\partial x^i} \quad (2.91)$$

$$T_p^{ij} = \sum_\nu m_\nu \underbrace{\frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu)}{\gamma_\nu}}_{(a)} u_\nu^i u_\nu^j = T_p^{ji} \quad (2.92)$$

Puesto que los T_p^{ij} se expresan en función del tetravector \vec{u} y los escalares m_ν y (a) (2.37), constituyen las componentes doblemente contravariantes de un tensor \tilde{T} , el *Tensor Energía-momento de las partículas*. Tanto estas componentes como las doblemente covariantes, son simétricas.

La interpretación física de las componentes de este tensor se deducen directamente de su expresión:

a- Tomando los valores $i = j = 0$ se obtiene

$$T_p^{00} = \sum_\nu m_\nu \gamma_\nu c^2 \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu) = \sum_\nu \mathcal{E}_\nu \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu) = \omega_p \quad (2.93)$$

por lo que T_p^{00} , según la definición 2.24 es manifiestamente la densidad de energía ω_p del sistema partículas.

b- Para $i = 0, j = \alpha = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} T_p^{0\alpha} &= c \sum_\nu m_\nu u_\nu^\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu) \\ &= c \sum_\nu p_\nu^\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu) \\ &= \frac{1}{c} \sum_\nu \mathcal{E}_\nu v_\nu^\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu) \end{aligned} \quad (2.94)$$

donde p_ν^α es la componente α de la cantidad de movimiento de la partícula ν y \mathcal{E}_ν la densidad de energía de la misma. De acuerdo con las dos últimas expresiones, las componentes puede escribirse de las formas:

$$T_p^{0\alpha} \rightarrow \begin{cases} c \mathcal{P}_\alpha \\ \frac{1}{c} \mathcal{J}_\alpha \end{cases} \quad (2.95)$$

De acuerdo con las definiciones 2.24 y 2.26, \mathcal{P}_α es la densidad de la componente α de la cantidad de movimiento del sistema de partículas y \mathcal{J}_α la densidad de corriente de la energía de dicho sistema (Flujo de energía por unidad de superficie y unidad de tiempo).

c- El resto de las componentes, para las cuales $i = \alpha = 1, 2, 3$ y $j = \beta = 1, 2, 3$,

$$T_p^{\alpha\beta} = \sum_\nu p_\nu^\alpha v_\nu^\beta \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu) \quad (2.96)$$

corresponden a la componente β de la densidad de corriente de la componente α de la cantidad de movimiento del sistema de partículas (Flujo de cantidad de movimiento por unidad de superficie y unidad de tiempo).

En forma matricial, las componentes doblemente contravariantes del *Tensor densidad de energía-momento de las partículas* pueden expresarse como

$$\tilde{T}_p \rightarrow (T_p^{ij}) = \begin{pmatrix} \omega_p & \vdots & c \vec{\mathcal{P}} \\ \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{c} \vec{\mathcal{J}} & \vdots & \vec{T} \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

A pesar de que la matriz es simétrica, la fila 0 y la columna 0 se han escrito de forma distinta para preparar la interpretación tridimensional de la ecuación 2.88a: las componentes $c \mathcal{P}_\alpha$ del vector $c \vec{\mathcal{P}}$ corresponden a los tres últimos elementos de la primera fila de la matriz, y las $\frac{1}{c} \mathcal{J}_\alpha$ del vector $\frac{1}{c} \vec{\mathcal{J}}$ a los tres últimos de la primera columna. El resto de los elementos de la matriz se agrupan en las componentes del tensor tridimensional²⁶

$$\vec{T} \rightarrow (T_p^{\alpha\beta})$$

2.6.1.1. Ecuación de continuidad de la energía mecánica

De la componente 0 de la ecuación 2.88a ($\frac{\partial T_p^{i0}}{\partial x^i} = f^0$, $i = 0, \dots, 3$), de acuerdo con 2.78, se deduce la *Ecuación de continuidad de la energía del sistema de partículas*

$$\frac{\partial \omega_p}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (2.98)$$

Integrando sobre un volumen \mathcal{V} , arbitrario pero fijo, y aplicando el teorema de la divergencia

²⁶En adelante se utilizará la notación \vec{X} para designar a los "tensores" tridimensionales.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \omega_p dv}_{(b)} + \underbrace{\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}}_{(c)} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} dv}_{(a)} \quad (2.99)$$

donde \mathcal{S} es la superficie que envuelve a \mathcal{V} . Los términos de la ecuación tienen un significado claro:

- (a) es la potencia suministrada por el campo electromagnético, a través del eléctrico, a las cargas encerradas en \mathcal{V} . Representa, pues, el transvase de energía electromagnética a energía mecánica, si su signo es positivo, y viceversa si el signo es el contrario. Téngase en cuenta que los transvases energéticos pueden tener en general los dos signos, como es el caso de motores y generadores.

- (b) es la variación de la energía, por unidad de tiempo, de las partículas encerradas en el volumen .

- (c) es el flujo de energía mecánica, por unidad de tiempo, a través de la superficie que envuelve al volumen.

En resumen, la ecuaciones 2.98 y 2.99 muestran como la energía electromagnética suministrada a las cargas dentro de un volumen determinado, se emplea en incrementar el contenido energético de las cargas internas, término (b), y las externas a dicho volumen, término (c).

2.6.1.2. Ecuación de continuidad de la cantidad de movimiento mecánica

También puede obtenerse una ecuación de continuidad para la cantidad de movimiento de las partículas de las tres últimas componentes de la densidad de fuerza ($\frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^i} = f^\alpha$, , $i = 0, \dots, 3$, , $\alpha = 1, 2, 3$)

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{T} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (2.100)$$

Esta ecuación es, evidentemente, la del movimiento del sistema de las partículas sometidas al campo electromagnético o, con otras palabras, del medio material constituido por dichas partículas.

Integrando sobre un volumen \mathcal{V} , arbitrario pero fijo, y aplicando el teorema de la divergencia para tensores de segundo orden

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \vec{P} dv}_{(b)} + \underbrace{\oint_S \vec{n} \cdot \vec{T} ds}_{(c)} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) dv}_{(a)} \quad (2.101)$$

donde \vec{n} es en este caso la normal a la superficie.

La lectura de estas dos ecuaciones es paralela a la de sus homólogas para la energía: La fuerza electromagnética total (a) aplicada al volumen en cuestión se equipara al cambio de cantidad de movimiento mecánica, por unidad de tiempo, tanto en el interior (b) como en el exterior (c) del volumen mencionado.

2.6.2. Tensor densidad de energía-momento del campo

Para hallar la expresión del tensor densidad de energía-momento del campo habrá que expresar a la densidad de fuerza en función de éste. Partiendo de

$$\vec{f} = \tilde{F} \cdot \vec{j}$$

la densidad de corriente puede ser eliminada, haciendo uso de la segunda ley tensorial de Maxwell 2.82

$$\vec{f} = \frac{1}{\mu_0} \tilde{F} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \tilde{F}) \quad (2.102)$$

con lo que se obtiene la expresión del tetravector densidad de potencia-fuerza como función exclusiva del campo. Tomando la componente i de la misma

$$\mu_0 f^i = \mu_0 F^{ij} j_j = F^{ij} \frac{\partial F_{kj}}{\partial x_k} = \frac{\partial F^{ij}}{\partial x_k} F_{kj} - \underbrace{F_{kj} \frac{\partial F^{ij}}{\partial x_k}}_{(a)} \quad (2.103)$$

Haciendo uso de la antisimetría de \tilde{F}

$$(a) = +F_{jk} \frac{\partial F^{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left\{ F_{jk} \frac{\partial F^{ij}}{\partial x_k} + F_{kj} \frac{\partial F^{ji}}{\partial x_k} \right\} = \frac{1}{2} F_{jk} \left\{ \frac{\partial F^{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial F^{ki}}{\partial x_j} \right\} \quad (b)$$

Para obtener la última expresión se han intercambiado los nombres de los índices $k \leftrightarrow j$. Si ahora se recurre a la primera ley tensorial de Maxwell 2.80

$$(a) = -\frac{1}{2} F_{jk} \frac{\partial F^{jk}}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F_{jk} F^{jk}}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{1}{2} F^{jk} \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_i}}_{(c)} \quad (2.104)$$

Puede comprobarse que $(c) = -(a)$ bajando los índices de F^{jk} y subiendo los de F_{jk} según la regla I.27

$$(c) = \frac{1}{2} g^{jm} g^{kn} F_{mn} \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} F_{mn} \frac{\partial F^{mn}}{\partial x_i} = -(a)$$

donde se han cambiado los índices $m \rightarrow j$ y $n \rightarrow k$. Introduciendo este resultado en 2.104 y teniendo en cuenta 2.61 y I.4

$$(a) = -\frac{1}{4} \frac{\partial F_{jk} F^{jk}}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \delta_k^i \frac{\partial (B^2 - \frac{E^2}{c^2})}{\partial x_k}$$

Si esta expresión se sustituye en 2.103 y en esta última se escribe $F^{ij} = -F^{ji}$

$$\mu_0 f^i = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ F_{kj} F^{ji} + \frac{1}{2} \delta_k^i (B^2 - \frac{E^2}{c^2}) \right\} \quad (2.105)$$

El argumento de la derivada es la componente mixta de un tensor, contravariante en i y covariante en k. La expresión puede ponerse de la forma buscada teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \nabla^k = g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l} = g^{lk} \nabla_l$$

Esto permite escribir 2.105 como

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} \cdot \tilde{T}_c \Rightarrow f^i = -\frac{\partial T_c^{li}}{\partial x^l} \quad (2.106)$$

donde

$$T_c^{li} = T_c^{il} = \frac{1}{\mu_0} \left(g^{lk} F_{kj} F^{ji} + \frac{1}{2} g^{li} (B^2 - \frac{E^2}{c^2}) \right) \quad (2.107)$$

son las componentes (simétricas) doblemente contravariantes del *Tensor densidad de energía-momento del campo*. Su interpretación puede hacerse en términos análogos a los empleados para el caso de las partículas.

Desarrollando estas componentes, por ejemplo, dado que $g^{0k} = \delta_k^0$

$$T_c^{00} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{0j} F^{j0} + \frac{1}{2} (B^2 - \frac{E^2}{c^2}) \right) = \omega_{em0}$$

donde

$$\omega_{em0} = \omega_{e0} + \omega_{m0} \quad , \quad \begin{cases} \omega_{e0} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \\ \omega_{m0} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \end{cases} \quad (2.108)$$

es la *Densidad de energía del campo electromagnético*.

Si además se define:

- El *Vector de Poynting en el vacío*²⁷

$$\vec{S}_0 \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \quad (2.109)$$

- La *Densidad de la cantidad de movimiento del campo electromagnético*

²⁷Se reserva el nombre de vector de Poynting, sin adjetivos, para $\vec{E} \wedge \vec{H}$.

$$\vec{g}_0 \equiv \frac{1}{c^2} \vec{\mathcal{S}}_0 \quad (2.110)$$

- El *Tensor de esfuerzos de Maxwell en el vacío*

$$\overset{\leftrightarrow}{M}_0 = \overset{\leftrightarrow}{M}_{e0} + \overset{\leftrightarrow}{M}_{m0} \quad , , \quad \begin{cases} M_{e0}^{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_0 E_\alpha E_\beta - \delta_\beta^\alpha \omega_{e0} \\ M_{m0}^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{\mu_0} B_\alpha B_\beta - \delta_\beta^\alpha \omega_{m0} \end{cases} \quad (2.111)$$

\tilde{T}_c puede ser representado en forma matricial como

$$\tilde{T}_c \rightarrow (T_c^{ij}) = \begin{pmatrix} \omega_{em0} & \vdots & c \vec{g}_0 \\ \dots & \ddots & \\ \frac{1}{c} \vec{\mathcal{S}}_0 & \vdots & -\overset{\leftrightarrow}{M}_0 \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

2.6.2.1. Ecuación de continuidad de la energía electromagnética

La *Ecuación de continuidad de la energía electromagnética* puede denominarse como "Teorema de Poynting", pero se reservará este nombre para su versión macroscópica (Véase el capítulo 3 y el apéndice C). Se obtiene de forma análoga a la seguida en el caso de la energía mecánica, expresando la primera componente de la densidad de fuerza electromagnética f^0 en función de la $\vec{\nabla} \cdot \vec{T}_c$:

$$\frac{\partial \omega_{em0}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}}_0 = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (2.113)$$

expresión donde ω_{em0} ocupa la misma posición que ω_{em0} , $\vec{\mathcal{S}}_0$ la de $\vec{\mathcal{J}}$ y los segundos miembros son iguales pero de signo contrario. En forma integral,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \omega_{em0} dv}_{(b)} + \underbrace{\oint_S \vec{\mathcal{S}}_0 \cdot d\vec{s}}_{(c)} = - \underbrace{\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dv}_{(a)} \quad (2.114)$$

La interpretación de los términos de esta expresión es también paralela a la propuesta para las partículas:

- (a) es el mismo término que aparece en la ecuación 2.99. Incluyendo el signo negativo que lo precede, puede interpretarse como "(-) la potencia que sale desde el sistema del campo e incide en el de las cargas." como "(+)" la potencia que sale desde el sistema de las cargas e incide en el del campo".

- (b) es la variación por unidad de tiempo de la energía del campo contenido en el volumen y ω_{em0} , análoga a ω_p , representa a la densidad de energía de dicho campo.

- (c) es el flujo de energía electromagnética, por unidad de tiempo, a través de la superficie que envuelve al volumen. El vector de Poynting \vec{S}_0 es análogo a $\vec{\mathcal{J}}$ y, por lo tanto, puede interpretarse como vector densidad de corriente, o flujo, de la energía electromagnética.

Pasando el segundo miembro de 2.114 al primero (escribiendo la ecuación en forma homogénea), ésta puede leerse como un balance energético entre la potencia suministrada por los campos a las cargas del volumen (a), el aumento de energía electromagnética almacenada en el volumen por unidad de tiempo (b), y la potencia electromagnética suministrada al espacio exterior a dicho volumen (c).

Es interesante notar que tanto \tilde{T}_c como \tilde{T}_p quedan indeterminados por un tensor de divergencia nula. En consecuencia, véase la ecuación de continuidad 2.113, a ω_{em0} puede añadirse cualquier función independiente del tiempo y a \vec{S}_0 cualquier vector de divergencia nula. No obstante, estas definiciones tienen la ventaja de que $\omega_{em0} = 0$ cuando el campo es nulo y $\vec{S}_0 = 0$ cuando \vec{E} o \vec{B} se anulan.

Sumando 2.114 y 2.99 se obtiene lo que con toda propiedad puede denominarse *Teorema de conservación de la energía*

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} (\omega_{em0} + \omega_p) dv}_{(d)} + \underbrace{\oint_{\mathcal{S}} (\vec{S}_0 + \vec{\mathcal{J}}) \cdot d\vec{s}}_{(e)} = 0 \quad (2.115)$$

- (d) es el aumento por unidad de tiempo de la energía total del sistema de partículas y campo contenidos en \mathcal{V} y (e) la potencia suministrada al exterior de \mathcal{V} . Claramente, ambos sumandos deben tener signo contrario o ser nulos. Este es el caso de sistemas cerrados, en los cuales la energía no puede traspasar su frontera \mathcal{S} y en los que la energía almacenada se conserva

$$W_a = W_{em0} + W_p = \int_{\mathcal{V}} (\omega_{em0} + \omega_p) dv = \text{constante} \quad (2.116)$$

2.6.2.2. Ecuación de continuidad de la cantidad de movimiento electromagnética

También las ecuaciones de continuidad de la cantidad de movimiento electromagnética son análogas a las de las partículas 2.100 y 2.101 con las salvedades correspondientes a los signos:

$$\frac{\partial \vec{g}_0}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{M}_0 = -(\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) \quad (2.117)$$

Esta es la ecuación del movimiento del campo debido a su reacción con el sistema de partículas.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \vec{g}_0 dv}_{(b)} - \underbrace{\oint_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot \vec{M}_0 ds}_{(c)} = - \underbrace{\int_{\mathcal{V}} (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) dv}_{(a)} \quad (2.118)$$

- (a) puede interpretarse como la fuerza total de reacción de las partículas de \mathcal{V} contra el campo, (b) como el aumento en la unidad de tiempo de la cantidad de movimiento del campo interior y (c) como la cantidad de movimiento que, por unidad de tiempo, sale al exterior.

Para campos estáticos ($\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$), luego

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) dv = \oint_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot \vec{M}_0 ds \Rightarrow \int_{\mathcal{V}} \vec{f}_{em} dv = \oint_{\mathcal{S}} \vec{f}_s ds \quad (2.119)$$

Esta expresión permite interpretar a \vec{M}_0 como tensor de esfuerzos y a $\vec{f}_s = \vec{n} \cdot \vec{M}_0$ como una fuerza superficial sobre \mathcal{S} . Se dispone de esta manera de una interesante alternativa para el cálculo de la fuerza total sobre un sistema de cargas sometidas a campos estáticos. En la sección 3.2.2.1, se analiza esta cuestión con algo más de detalle en el caso macroscópico.

Las definiciones de los vectores de densidad de cantidad de movimiento y el tensor de Maxwell responden a los mismos criterios ya comentados para las densidades de energía.

Restando las expresiones 2.101 y 2.118 se obtiene el *Teorema de la conservación de la cantidad de movimiento*

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} (\vec{g}_0 + \vec{\mathcal{P}}) dv}_{(d)} + \underbrace{\oint_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot (\vec{T} - \vec{M}_0) ds}_{(e)} = 0 \quad (2.120)$$

El aumento en la unidad de tiempo de la cantidad de movimiento total (d) contenida en \mathcal{V} es igual y de signo contrario a la que se pierde (e) a través de \mathcal{S} en ese mismo tiempo. En un sistema cerrado, para el cual las pérdidas a través de las paredes son nulas, la cantidad de movimiento total de campos y partículas almacenada en \mathcal{V} se conserva.

$$\vec{\Pi}_a = \vec{\Pi}_{em0} + \vec{\Pi}_p = \int_{\mathcal{V}} (\vec{g}_0 + \vec{\mathcal{P}}) dv = \text{constante} \quad (2.121)$$

2.7. Problemas

- 2-1. Un protón tiene una energía cinética de 500 MeV. Calcular su velocidad, su masa en movimiento y su energía total .
- 2-2. Supóngase a un átomo del tipo del hidrógeno, compuesto por un núcleo de masa M y carga $+e$ y un electrón de masa m y carga $-e$ que gira a su alrededor con radio r_0 y velocidad $\beta \ll 1$. Calcúlese dicha velocidad en función de los datos anteriores, planteándose un problema no relativista, y obténgase la masa relativista del átomo en reposo.

2-3. Demuéstrese que las expresiones 2.20 y 2.21 son ciertas para una partícula. Discutir el caso de un sistema de dos partículas.

SOLUCION :

Dado que $\vec{p} \cdot \vec{p}$ es un escalar, $\vec{p} \cdot \vec{p} = \vec{p}_0 \cdot \vec{p}_0$, donde $p_0^i = (\frac{\mathcal{E}_0}{c}, \vec{0})$ son las componentes contravariantes de \vec{p} en el sistema propio de la partícula ($\vec{v} = 0$). Luego $\vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2$. La expresión 2.21 se obtiene como se indica en el texto.

En el caso de un sistema de dos partículas, tanto \vec{p}_1 como \vec{p}_2 son tetravectores, así como su suma o su diferencia, por lo que serán escalares los productos escalares entre cualquier combinación de los mismos:

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1, \quad \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2, \quad \vec{p}_1 \cdot (\vec{p}_1 + \vec{p}_2), \quad \dots$$

Como ejemplo, puede comprobarse que

$$\begin{aligned} \|\vec{p}_1 + \vec{p}_2\| &= \|\vec{p}_1\| + \|\vec{p}_2\| + 2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = \\ &= \begin{cases} (m_1^2 + m_2^2) c^2 + 2 m_1 m_2 \gamma_1 \gamma_2 (c^2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \\ \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2}{c^2} - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

2-4. Una partícula de masa m_0 se desintegra en dos partículas de masas m_1 y m_2 . Hallar la energía de los productos de la desintegración en el sistema propio de la partícula que se desintegra ¿Qué condición es necesaria para que esta reacción sea posible?

2-5. Desde un sistema de referencia \mathcal{S} , se observan dos partículas: la primera tiene masa en reposo m_1 y velocidad \vec{v}_1 y la segunda masa m_2 y velocidad \vec{v}_2 . Hallar:

- a) La velocidad \vec{V}_{CM} del sistema de referencia \mathcal{S}_{CM} con respecto al cual la cantidad de movimiento total del conjunto de partículas es nula (velocidad del centro de momentos).
- b) El tetravector cantidad de movimiento en \mathcal{S}_{CM} .
- c) El límite de \vec{V}_{CM} para $v_1, v_2 \ll c$. Comprobar que esta velocidad tiende a la del centro de masas no relativista.
- d) La velocidad \vec{V}_{CM} en el caso de que las dos partículas sean lumínicas con energías respectivas \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 en \mathcal{S} .

SOLUCION :

Desde el sistema \mathcal{S} , la cantidad de movimiento total es

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \gamma_1 \vec{v}_1 + m_2 \gamma_2 \vec{v}_2$$

y la energía

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = (m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2) c^2$$

En el resto del problema se utilizará la notación (\parallel) , para indicar las componentes paralelas a \vec{V} , y (\perp) , para indicar las componentes perpendiculares a dicho vector.

(a) - $p^i = (\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p})$. Luego, desde el sistema \mathcal{S}' ,

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}'}{c} \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' &= \gamma(\mathcal{E} - V p_{\parallel}) \\ p'_{\parallel} &= \gamma(-\frac{V}{c^2} \mathcal{E} + p_{\parallel}) \\ p'_{\perp} &= p_{\perp} \end{aligned}$$

En el sistema del centro de momentos, la cantidad de movimiento se anula, por lo que, si se toma $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_{CM}$,

$$p'_{\parallel} = 0 \quad , \quad p_{\perp} = 0$$

Luego $\vec{p}_{\parallel} = \vec{p}$, \vec{V}_{CM} es paralelo a \vec{p} y

$$\vec{V}_{CM} = \frac{c^2}{\mathcal{E}} \vec{p} = \frac{m_1 \gamma_1 \vec{v}_1 + m_2 \gamma_2 \vec{v}_2}{m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2} = \frac{M_1 \vec{v}_1 + M_2 \vec{v}_2}{M_1 + M_2}$$

donde M_1 y M_2 son las masas en movimiento de cada una de las partículas.

(b) - De acuerdo con lo anterior, $p_{CM}^i = (\frac{\mathcal{E}_{CM} - \mathcal{E}_0}{c}, \vec{0})$,

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c^2} V_{CM}$$

y

$$\mathcal{E}_{CM} = \gamma_{CM} (\mathcal{E} - V_{CM} p) = \frac{\mathcal{E}}{\gamma_{CM}}$$

Luego

$$p_{CM}^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c \gamma_{CM}}, \vec{0} \right)$$

(c) -

$$\lim_{v \ll c} M = m \Rightarrow \lim_{v \ll c} \vec{V}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

(d) -

$$\vec{v} = c \vec{n} \quad , \quad M = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \Rightarrow \vec{V}_{CM} = c \frac{\mathcal{E}_1 \vec{n}_1 + \mathcal{E}_2 \vec{n}_2}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}$$

- 2-6. En una experiencia de laboratorio se hace incidir a una partícula, de masa m_1 y con velocidad \vec{v}_1 , sobre otra en reposo de masa m_2 . Como resultado de la colisión se forman varias partículas con una masa total $m_T > m_1 + m_2$. Hallar la energía cinética mínima que debe poseer la partícula incidente (umbral de la reacción) para que ésto sea posible. (Sugerencia: hágase uso de los invariantes del problema 2-3 y considérese como umbral a aquella energía para la cual los productos de reacción están en reposo en \mathcal{S}_{CM}).

SOLUCION :

En el sistema del laboratorio \mathcal{S} :

Se supone que, en este sistema, la primera partícula incide con la energía mínima $\mathcal{E}_{1_{min}}$ (la cantidad de movimiento correspondiente es $\vec{p}_{1_{min}}$ y la energía cinética $\mathcal{E}_{c1_{min}}$) sobre la segunda, que está en reposo.

Las componentes del tetravector de la cantidad de movimiento total son

$$\vec{p}^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p} \right)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}_{1_{min}} + m_2 c^2 = \mathcal{E}_{c1_{min}} + (m_1 + m_2) c^2 \\ \vec{p} &= \vec{p}_{1_{min}} \end{aligned}$$

Se hará uso del invariante

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = \vec{p}_{CM} \cdot \vec{p}_{CM} = ||\vec{p}_1|| + ||\vec{p}_2|| + 2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = (m_1 + m_2)^2 c^2 + 2 m_2 \mathcal{E}_{c1_{min}} \quad (2.122)$$

En el sistema del centro de masas \mathcal{S}_{CM} :

En el umbral de reacción se supone que las partículas creadas están en reposo con respecto a \mathcal{S}_{CM} , luego $\mathcal{E}_{CM} = m_T c^2$, , $\vec{p}_{CM} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\vec{p}_{CM} \cdot \vec{p}_{CM} = \frac{\mathcal{E}_{CM}^2}{c^2} = m_T^2 c^2 \Rightarrow$$

de acuerdo con 2.122,

$$\mathcal{E}_{c1_{min}} = \frac{m_T^2 - (m_1 + m_2)^2}{2 m_2} c^2 \Rightarrow m_T > m_1 + m_2$$

- 2-7. Obtener las ecuaciones de movimiento no relativista de una partícula en un campo electromagnético a partir de las ecuaciones canónicas de Hamilton.

- 2-8. Demostrar que el hamiltoniano relativista de una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético es

$$\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{P}, t) = \mathcal{E}_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{P} - e\vec{A}(\vec{r}, t)}{m c} \right)^2} + e \Phi(\vec{r}, t)$$

donde $\vec{\mathcal{P}}$ es el momento conjugado de \vec{r} .

SOLUCION :

Por definición

$$\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{\mathcal{P}}, t) \equiv \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{v} - \mathcal{L}$$

y el lagrangiano de una partícula en presencia de un campo electromagnético es el de la partícula libre $-\frac{mc^2}{\gamma_p} = -\frac{\mathcal{E}_0}{\gamma_p}$ menos la energía potencial $e(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t) = -\frac{\mathcal{E}_0}{\gamma_p(v)} - e\Phi(\vec{r}, t) + e\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Luego

$$\mathcal{H} = (\vec{\mathcal{P}} - e\vec{A}(\vec{r}, t)) \cdot \vec{v} + \frac{\mathcal{E}_0}{\gamma_p(v)} + e\Phi(\vec{r}, t)$$

Hay que eliminar \vec{v} y $\gamma_p(v)$ para expresar \mathcal{H} en función de $(\vec{r}, \vec{\mathcal{P}}, t)$.

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = m\gamma_p(v)\vec{v} + e\vec{A} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{\mathcal{P}} - e\vec{A}}{m\gamma_p}$$

multiplicando por $\frac{\gamma_p}{c}$, elevando al cuadrado y despejando γ_p

$$\gamma_p = \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{\mathcal{P}} - e\vec{A}}{m c} \right)^2}$$

se obtiene la expresión del hamiltoniano expresado en función de las coordenadas del espacio de las fases.

2-9. En un instante determinado, un sistema de partículas queda definido de la forma:

$$\begin{aligned} q_1 &= e & m_1 &= m_e & \vec{r}_1 &= (0, 0, 0) \text{ m} & \vec{v}_1 &= (1, 0, 0) \text{ m.s}^{-1} \\ q_2 &= -e & m_2 &= 2m_e & \vec{r}_2 &= (1, 0, 0) \text{ m} & \vec{v}_2 &= (0, 0, 0) \text{ m.s}^{-1} \\ q_3 &= 2e & m_3 &= 3m_e & \vec{r}_3 &= (0, 1, 0) \text{ m} & \vec{v}_3 &= (-3, 2, 0) \text{ m.s}^{-1} \\ q_4 &= -2e & m_4 &= 2m_e & \vec{r}_4 &= (1, 1, 0) \text{ m} & \vec{v}_4 &= (-1, 0, 0) \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

Calcular:

- a) Las densidades de volumen de carga, de masa y de energía cinética.
- b) Las densidades volúmicas de corriente.
- c) Las densidades superficiales de carga y corriente (de carga) en $z = 0$.
- d) Los promedios, sobre un cuadrado de un metro de lado y sobre otro de dos metros de lado, de las magnitudes del apartado anterior.

2-10. Hallar las leyes de transformación para $\phi^2/c^2 - \vec{A}^2$ y $c^2\rho^2 - \vec{j}^2$ y justificar el resultado.

2-11. Una carga Q_0 se halla en reposo en el sistema S_p , el cual se mueve con velocidades $v \hat{x}$ y $v' \hat{x}'$ con respecto a los sistemas S y S' . Dicha carga se halla uniformemente distribuida en un cubo de dimensiones $\Delta x_p = \Delta y_p = \Delta z_p = a$ con densidad ρ_0 .

- Demostrar que la medida desde los sistemas S y S' de dicha carga es invariante.
- Establecer las leyes de transformación entre los volúmenes no propios que las cargas ocupan en S y S' y comprobar que estos contienen a la carga Q_0 .

SOLUCION :

(a) - En la figura 2.4-a se muestra a la carga, en reposo con respecto al sistema S_p y moviéndose con velocidades v y v' con respecto a los sistemas S y S' . En S_p , la densidad de carga es

$$\rho_p(x_p) = \begin{cases} \rho_0 & , \quad x_p \in [0, a] \\ 0 & , \quad \text{fuera} \end{cases}$$

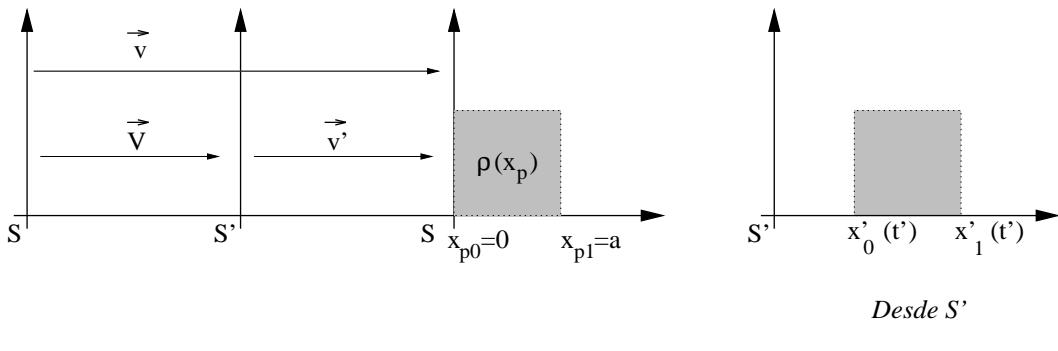


Figura 2.4:

En el sistema S' , figura 2.4-b, los extremos de la distribución ocupan las posiciones $x'_0(t')$ y $x'_1(t')$. Aplicando las leyes de transformación de S_p a S'

$$\begin{aligned} x_{p0} = 0 &= \gamma'_p \{-\beta_p ct' + x'_0(t')\} \\ x_{p1} = a &= \gamma'_p \{-\beta_p ct' + x'_1(t')\} \end{aligned}$$

y restando se concluye que la medida longitudinal de la distribución en S' es la contracción de la medida propia

$$x'_1(t') - x'_0(t') = \frac{a}{\gamma'_p} \Rightarrow V' = \frac{V_0}{\gamma'_p} \quad (2.123)$$

siendo V_0 el volumen ocupado por la carga en su sistema propio.

Por otra parte, dado que la densidad de corriente en S_p es nula, porque la carga está en reposo en ese sistema,

$$\begin{pmatrix} c\rho' \\ j'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_p & -\gamma_p\beta_p \\ -\gamma_p\beta_p & \gamma_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\rho_0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rho'(x') &= \begin{cases} \rho_0 \gamma'_p & , \quad x' \in [x'_0(t'), x'_1(t')] \\ 0 & , \quad \text{fuera} \end{cases} & (2.124) \\ j'_x(x') &= \begin{cases} c\rho_0 \beta'_p \gamma'_p = \rho' v' & , \quad x' \in [x'_0(t'), x'_1(t')] \\ 0 & , \quad \text{fuera} \end{cases} \end{aligned}$$

Obsérvese que la densidad de carga medida desde un sistema no propio aparece dilatada con respecto a la propia.

Luego

$$Q' = \rho' V' = \rho_0 V_0 = Q_0$$

Siguiendo los mismos pasos, se llega a la misma conclusión para el sistema \mathcal{S} , quedando demostrado el apartado (a) del enunciado.

(b) - Tanto V como V' son volúmenes no propios correspondientes a V_0 (2.123), por lo que ambos son versiones contraídas de este último. En consecuencia, la ley de transformación entre estos volúmenes debe ser

$$\frac{V'}{V} = \frac{\gamma_p}{\gamma'_p}$$

Por otra parte, las densidades de carga, según 2.124, se dilatan, por lo que su ley de transformación es

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\gamma'_p}{\gamma_p}$$

de lo que resulta que la carga medida en cada uno de los sistemas es Q_0 .

Puede llegarse a las mismas conclusiones por un camino menos directo:

La medida longitudinal de la distribución se lleva a cabo determinando la posición que ocupan sus extremos en un instante determinado. En particular, en el sistema \mathcal{S}

$$\Delta x = x_1(t) - x_0(t)$$

Dichas posiciones corresponden, dada la relatividad de la simultaneidad, a posiciones no simultáneas de dichos extremos en \mathcal{S}' , $x'_0(t'_0)$ y $x'_1(t'_1)$ respectivamente. Dado que la distribución se mueve con velocidad v' con respecto a \mathcal{S}' y que su medida propia es a ,

$$\begin{aligned} x'_0(t'_0) &= \beta'_p ct'_0 = \gamma(-\beta ct + x_0(t)) \\ x'_1(t'_1) &= \beta'_p ct'_1 + \frac{a}{\gamma'_p} = \gamma(-\beta ct + x_1(t)) \end{aligned}$$

Dividiendo por γ y restando, se tiene que

$$\Delta x = \beta c \delta t' + \frac{a}{\gamma \gamma_p} , , \quad \delta t' = t'_1 - t'_0$$

De acuerdo con la ley de transformación temporal y teniendo en cuenta que, en este caso $t_1 = t_0 = t$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x(t)) \Rightarrow c \delta t' = -\gamma \beta \Delta x$$

y²⁸

$$\Delta x = \frac{a}{\gamma \gamma'_p (1 + \beta \beta'_p)} = \frac{a}{\gamma_p}$$

lo que confirma la contracción de las longitudes propias.

Para confirmar la dilatación de la densidad, de acuerdo con 2.124

$$\begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\rho' \\ j'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\rho_0 \gamma'_p \\ c\rho_0 \gamma'_p \beta'_p \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\rho = \rho_0 \gamma \gamma'_p (1 + \beta \beta'_p) = \gamma_p \rho_0$$

2-12. Dos láminas metálicas planas, paralelas y muy próximas, son neutras y por ellas circulan corrientes superficiales, en la dirección del eje x y en sentidos contrarios, cuya magnitud es $J_0 [A.m^{-1}]$ en el sistema S .

- a) Calcular las cargas y corrientes medidas desde el sistema S' .
- b) Calcular los campos en función de las cargas y las corrientes, en cada uno de los sistemas de referencia, y comprobar que cumplen las leyes de transformación.

SOLUCION :

(a) - Las dimensiones transversales de las láminas son invariantes, luego las densidades superficiales de carga ρ_s y de corriente J_s se transforman como las densidades de volumen correspondientes – supuesto un espesor a de las láminas, $J_s = j_x a$ y $\rho_s = \rho a$ –. Luego, puesto que en el sistema S los conductores son neutros, para la placa superior se tiene que

$$\begin{pmatrix} c\rho'_s \\ J'_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ J_s \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \rho'_s = -\frac{\gamma\beta}{c} J_s \\ J'_s = \gamma J_s \end{cases}$$

Como se podía esperar, los conductores no son neutros en S' . En la cara inferior, las cargas y las corrientes tendrán el signo contrario.

²⁸Véase la expresión 1.42.

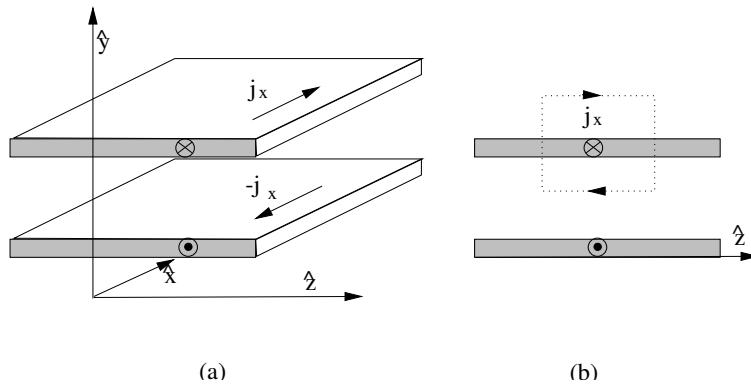


Figura 2.5:

(b) - Los campos pueden calcularse en función de sus fuentes en cada uno de los sistemas o, una vez realizado el cálculo en el primer sistema, aplicar las leyes de transformación de los mismos.

En \mathcal{S} , el campo magnético en los espacios exteriores es nulo. En el interior se calcula integrando sobre el camino indicado en la figura 2.5-b

$$\vec{B} = -\mu_0 J_s \hat{z}$$

El campo eléctrico es nulo, dado que no hay carga neta.

En \mathcal{S}' ,

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \underbrace{\vec{E}_{||}}_{=0} + \gamma (\underbrace{\vec{E}_{\perp}}_{=0} + \vec{V} \wedge \vec{B}) = -\gamma V B \hat{y} \\ \vec{B}' &= \underbrace{\vec{B}_{||}}_{=0} + \gamma (\vec{B} - \frac{1}{c^2} \underbrace{\vec{V} \wedge \vec{E}}_{=0}) = \gamma \vec{B}\end{aligned}$$

Puede también calcularse \vec{B}' como se ha calculado \vec{B} . En función de la densidad superficial de carga

$$\vec{E}' = \frac{\rho'_s}{\varepsilon_0} \vec{n}_s = \frac{\gamma \beta}{\varepsilon_0 c} J_s \hat{y}$$

2-13. Una carga puntual está situada en el origen de coordenadas. ¿Cómo observará este punto cargado, un individuo que viaja en la dirección positiva del eje x a una distancia constante $z=a$. Comprobar que la carga se conserva.

SOLUCION :

La carga Q puede describirse en \mathcal{S} por medio de las densidades

$$\rho(\vec{r}) = Q \delta(\vec{r}) , , \vec{j} = \vec{0}$$

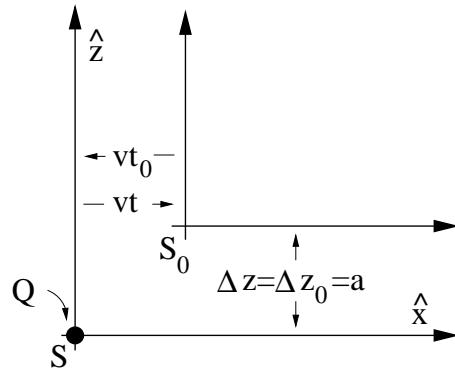


Figura 2.6:

Desde el sistema S_0 , dado que la carga de una partícula es invariante ($Q_0 = Q$) y

$$\rho_0(\vec{r}_0, t_0) = Q \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_{p0}(t_0)) , \quad \vec{j}_0(\vec{r}_0, t_0) = -V \rho_0(\vec{r}_0, t_0) \hat{x}$$

donde $\vec{r}_{p0} = (-V t_0, 0, -a)$ es la posición de la carga con respecto al sistema S_0 .

De otra forma

$$\begin{pmatrix} c\rho_0 \\ j_{0x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\rho \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \rho_0 = \gamma\rho \\ j_{0x} = -\gamma\beta c\rho = -\rho_0 V \end{cases}$$

Pero es necesario expresar ρ_0 en función de las coordenadas \vec{r}_0 . Para ello se puede hacer uso del escalar 2.37 que, en este caso, implica

$$\frac{\delta(\vec{r})}{\gamma_p} = \frac{\delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_{p0}(t_0))}{\gamma_{p0}} \quad (2.125)$$

donde $\gamma_p = 1$ y $\gamma_{p0} = \gamma$, por lo que

$$\rho_0 = Q \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_{p0}(t_0))$$

2-14. Comprobar que el contraste de Coulomb es compatible con las transformaciones de contraste.

2-15. Dado el potencial \vec{A} de componentes

$$A^i = (0, 3 \cos \varphi, 0, 2 \cos \varphi) , \quad \varphi = 4t - 2x - y + 3z$$

- a) ¿Qué tipo de contraste cumple?
- b) Calcular las componentes del tensor campo.

SOLUCION :

$$\left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ \vec{A} = (3, 0, 2) \cos \varphi \end{cases}$$

(a) - Para determinar si se cumple el contraste de Lorenz, se halla

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{d}{d\varphi} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \varphi , , \quad \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{d A^i}{d\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

Dado que el resultado es nulo, este potencial cumple dicho contraste . También cumplirá el de Coulomb ya que $\frac{\partial A^0}{\partial x^0} = 0$. En el siguiente problema se comprobará que esto último no es válido para todos los sistemas inerciales.

(b) - Los campos se deducen de los potenciales de la forma:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{d \vec{A}}{d\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = (12, 0, 8) \operatorname{sen} \varphi \\ \vec{B} &= \nabla \wedge \vec{A} = \nabla \varphi \wedge \frac{d \vec{A}}{d\varphi} = (2, -13, -3) \operatorname{sen} \varphi\end{aligned}$$

2-16. Para el potencial del problema anterior,

- a) Hallar $A'^i(\vec{r}', t')$.
- b) Comprobar que también cumple el contraste de Lorenz, pero no el de Coulomb.

SOLUCION :

$$\begin{pmatrix} \frac{\phi'}{c} \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos \varphi = \begin{pmatrix} -3\gamma\beta \\ 3\gamma \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos \varphi \Rightarrow$$

Una vez transformadas las componentes, amplitudes, del tensor, solo queda por expresar el punto en que se evaluan en función de las coordenadas en S' :

$$\varphi = \varphi' = 4t - 2x - y + 3z = \gamma (4 - 2\beta c) t' + \gamma (4 \frac{\beta}{c} - 2) x' - y' + 3z'$$

Es inmediato comprobar que se sigue cumpliendo el contraste de Lorenz pero que no se cumple el de Coulomb.

2-17. Una onda monocromática plana tiene un potencial escalar

$$\phi = \phi_0 \cos \varphi , , \quad \varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} , , \quad \vec{k} = k \vec{n} , , \quad k = \frac{\omega}{c}$$

- a) Hallar las leyes de transformación para la fase φ , la frecuencia angular ω , el número de onda k y el vector unitario de propagación \vec{n} .

- b) La ley de transformación de la frecuencia describe al **Efecto Doppler relativista**. Compárese esta ley con la obtenida en el problema 1-12 del capítulo 1 para el efecto Doppler longitudinal y obténgase la expresión del **Efecto Doppler transversal**, correspondiente a una dirección de propagación \vec{n} perpendicular al eje x .

SOLUCION :

Con independencia de como se transforme la amplitud,

$$\begin{aligned}\varphi = \varphi' &= \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t - k \vec{n} \cdot \vec{r} = \frac{\omega}{c} (ct - \vec{n} \cdot \vec{r}) = \\ &= \frac{\omega}{c} ct - k_x x - k_y y - k_z z = \\ &= \underbrace{\gamma \left[\frac{\omega}{c} - \beta k_x \right]}_{=\frac{\omega'}{c}} ct' - \underbrace{\gamma \left[\frac{-\beta \omega}{c} + k_x \right]}_{=k'_x} x' - \underbrace{k_y}_{=k'_y} y' - \underbrace{k_z}_{=k'_z} z'\end{aligned}$$

De acuerdo con ésto, se puede escribir la fase en función de un Tetravector de onda $\overset{\Rightarrow}{k}$

$$\varphi = \overset{\Rightarrow}{k} \cdot \overset{\Rightarrow}{s} , , \quad \overset{\Rightarrow}{k} \rightarrow k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) = \frac{\omega}{c} (1, \vec{n})$$

Del carácter vectorial de $\overset{\Rightarrow}{k}$ se deduce que la ley de transformación de la frecuencia es

$$\omega' = \gamma \omega (1 - \beta n_x)$$

y que la ley de transformación de la dirección de propagación es la obtenida en el problema 1-21 para un fotón.

2-18. Demostrar que la ecuación $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ está incluida en $\tilde{F} = \overset{\Rightarrow}{\nabla} \wedge \overset{\Rightarrow}{A}$.

2-19. Hallar las componentes F^i_j de \tilde{F} .

2-20. Comprobar que $\vec{E}_\parallel = \vec{E}'_\parallel$, y que $\vec{B}'_\perp = \gamma (\vec{B}_\perp - \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}_\perp)$.

2-21. Demostrar que las transformaciones de los campos pueden ser escritas de las formas:

a)

$$\vec{E}' = \gamma \vec{E} + (1 - \gamma)(\vec{E} \cdot \hat{V}) \hat{V} + \gamma \vec{V} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{B}' = \gamma \vec{B} + (1 - \gamma)(\vec{B} \cdot \hat{V}) \hat{V} - \gamma \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}$$

b)

$$\vec{E}' = \overset{\leftrightarrow}{\Pi} \cdot \vec{E} + c \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{B}' = \overset{\leftrightarrow}{\Pi} \cdot \vec{B} - \frac{1}{c} \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} \cdot \vec{E}$$

donde

$$\overset{\leftrightarrow}{\Pi} = \gamma \overset{\leftrightarrow}{I} + (1 - \gamma) \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{\beta^2}, \quad \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} = \gamma \overset{\leftrightarrow}{\beta}$$

$$(\vec{\beta} \vec{\beta})_{\alpha\beta} = \beta_\alpha \beta_\beta, \quad \overset{\leftrightarrow}{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overset{\leftrightarrow}{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_z & \beta_y \\ \beta_z & 0 & -\beta_x \\ -\beta_y & \beta_x & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCION :

$$\vec{E}' = \underbrace{\vec{E}_\parallel}_{(1)} + \gamma \vec{E}_\perp + \underbrace{\gamma \vec{V} \wedge \vec{B}}_{(2)}$$

(a) - Dado que $\vec{E}_\parallel = (\vec{E} \cdot \hat{V}) \hat{V}$

$$(1) = \gamma \vec{E} + (1 - \gamma) \vec{E}_\parallel = \gamma \vec{E} + (1 - \gamma) (\vec{E} \cdot \hat{V}) \hat{V}$$

De forma análoga se obtiene la ley de transformación para el campo magnético.

(b) -

$$\gamma \vec{E} = \gamma \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \vec{E}, \quad (\vec{E} \cdot \hat{V}) \hat{V} = \vec{E} \cdot (\hat{V} \hat{V}) = \vec{E} \cdot \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{\beta^2}$$

$$(2) = c \gamma \vec{\beta} \wedge \vec{B} = c \gamma \overset{\leftrightarrow}{\beta} \cdot \vec{B} = c \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} \cdot \vec{B}$$

2-22. Probar, aplicando las leyes de transformación de los campos, que $I_1 = c^2 B^2 - E^2$ e $I_2 = (\vec{E} \cdot \vec{B})^2$ son invariantes.2-23. El campo electromagnético en un punto, medido desde el sistema \mathcal{S} , es (\vec{E}, \vec{B}) y tiene por invariantes a $I_1 = K > 0$ e $I_2 = 0$. Demostrar que el campo eléctrico puede eliminarse desde un sistema de referencia que se mueva con una velocidad \vec{V} con respecto a \mathcal{S} y forme un ángulo φ con \vec{B} . Hallar el valor mínimo del ángulo anterior.2-24. Un observador determina, en una cierta región del espacio, un campo eléctrico estático $E_z = 10 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. ¿Qué campo electromagnético detectará un observador moviéndose con respecto al primero en la dirección positiva del eje x , con una velocidad de: a) $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, b) $10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, c) $3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$?

- 2-25. Un observador determina, en una cierta región del espacio, un campo electromagnético lentamente variable $\vec{E} = 20 \operatorname{sen}(20\pi t) V \cdot m^{-1} \hat{z}$, $\vec{B} \approx 0$, donde t es el tiempo en segundos. ¿Qué campo electromagnético detectará un observador moviéndose con respecto al primero en la dirección positiva del eje x , con una velocidad de $10^8 m \cdot s^{-1}$? (La condición de variación lenta es necesaria para que $\vec{B} \approx 0$ ¿Por qué?).
- 2-26. Una onda plana polarizada linealmente viaja en la dirección positiva del eje x . Un observador determina que los valores de pico de los campos eléctrico y magnético son $E_y = 10 V \cdot m^{-1}$ y $B_z = \mu_0/12\pi T$. ¿Qué campos determinará un observador viajando a las velocidades de los problemas anteriores?
- 2-27. Un observador en reposo con respecto al sistema S observa los campos estáticos $\vec{E} = E \hat{y}$, con amplitud de $1 V \cdot m^{-1}$, y $\vec{B} = B \hat{z}$ con amplitud de 1 gauss.
- ¿Cuál de los campos puede eliminarse mediante un cambio de sistema de referencia? ¿Qué velocidad, en la dirección positiva del eje x respecto de S , debe de tener un sistema de referencia S' , para que ésto ocurra?
 - ¿Existe algún observador que vea los campos \vec{E} y \vec{B} paralelos? ¿A qué velocidad se mueve este observador?
- 2-28. En un sistema de referencia S se tiene un campo eléctrico uniforme y estático $E = 10 V \cdot m^{-1}$ en la dirección del eje y , y un campo magnético uniforme y estático $B = 10^{-5} T$ en el plano $z-y$, formando un ángulo de 30 grados con el eje y . ¿A qué velocidad respecto a S debe moverse un observador en la dirección positiva del eje x para ver los dos campos paralelos?
- 2-29. A lo largo del eje x de un sistema S , hay una densidad de carga en reposo λ por unidad de longitud. ¿Qué campo magnético se observa desde un sistema S' que se mueve respecto de S con velocidad uniforme v en la dirección positiva del eje x ?
- 2-30. Demostrar que el campo eléctrico producido por una carga puntual en movimiento uniforme es:

$$\vec{E}(t) = \hat{r}(t) \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r(t)^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \phi(t))^{3/2}}$$

donde \vec{r} es el vector de posición del punto de observación con respecto a la carga, ϕ es el ángulo formado por \vec{r} y \vec{v} , y $\beta = v/c$.

Comprobar que para $v \ll c$, el campo magnético se reduce a:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e \vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

SOLUCION :

Sea S' el sistema propio de la carga. Dado que en él está en reposo ²⁹, el campo es culombiano

²⁹El tratamiento de la componente z es idéntico al de la y por lo que se omite en el desarrollo.

$$\vec{e}' \equiv \frac{4\pi\varepsilon_0}{e} \vec{E} = \frac{\vec{r}'}{r'^3} \rightarrow \begin{cases} e_{\parallel} = e_x = \frac{x'}{r'^3} \\ e_{\perp} = e_y = \frac{y'}{r'^3} \end{cases}$$

Aplicando las leyes de transformación a las componentes paralela y perpendicular

$$\begin{aligned} e_x &= e'_x \\ e_y &= \gamma e'_y \end{aligned}$$

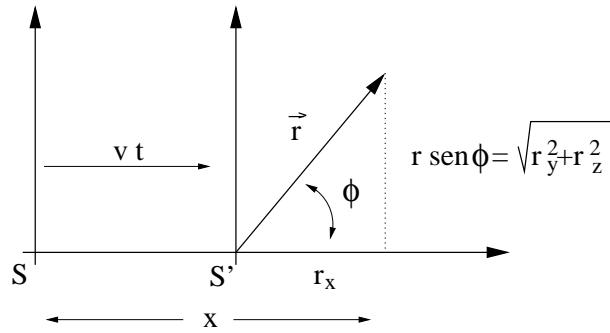


Figura 2.7:

Solo queda por transformar las coordenadas a las del sistema \mathcal{S} y tener en cuenta, como puede verse en la figura 2.7, que

$$r_x = x - vt \quad , \quad r_y = y$$

De acuerdo con esto

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) = \gamma r_x \\ y' &= y = r_y \\ r'^3 &= (\gamma^2 r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{3/2} = \gamma^3 r^3 \left(1 - \frac{r_y^2 + r_z^2}{r^2} \beta^2\right)^{3/2} = \gamma^3 r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \phi)^{3/2} \end{aligned}$$

y, reuniendo a las componentes de \vec{e}

$$\vec{e} = e'_x \hat{x} + \gamma (e'_y \hat{x} + e'_z \hat{x}) = \gamma \frac{\vec{r}}{r'^3} = \frac{\vec{r}(1 - \beta^2)}{r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}$$

El resto del problema se deja como ejercicio.

2-31. Demostrar la igualdad $\vec{M} = e \tilde{F} \cdot \vec{u}$.

2-32. Expresar la ecuación $\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ en la forma $R_{ijk} = 0$.

2-33. Las ondas electromagnéticas planas en el vacío cumplen la siguiente relación de estructura:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E} , , \quad \vec{n} \cdot \vec{E} = 0$$

donde \vec{n} es el vector unitario en la dirección de propagación.

Haciendo uso del tensor densidad de energía-momento, determiníense las leyes de transformación para la densidad de energía, el módulo del vector de Poynting, la amplitud de los campos y la dirección de propagación. (Sugerencia: para simplificar, sin pérdida de generalidad, elíjase al eje z en la dirección de \vec{B})

SOLUCION :

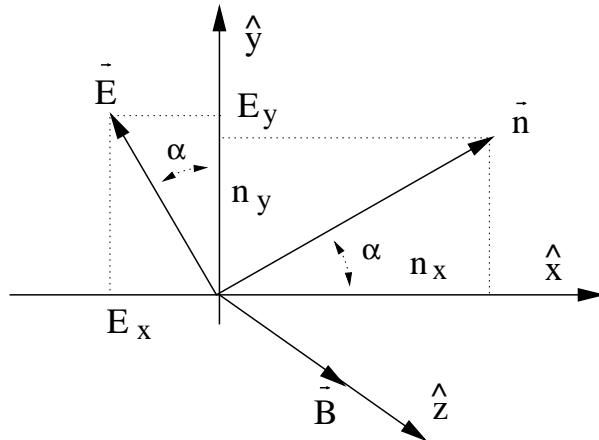


Figura 2.8:

La geometría del problema está representada en la figura 2.8, en la que

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \cos \alpha \hat{x} + \sin \alpha \hat{y} = n_x \hat{x} + \sqrt{1 - n_x^2} \hat{y} \\ \vec{E} &= E (-\sin \alpha \hat{x} + \cos \alpha \hat{y}) = E (-\sqrt{1 - n_x^2} \hat{x} + n_x \hat{y}) \\ \vec{B} &= B \hat{z}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\omega_{em} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2$ y que $E = c B$ puede eliminarse de las componentes del tensor energía-momento a las amplitudes de los campos y expresarlo como

$$(T^{ij}) = \omega_{em} \begin{pmatrix} 1 & n_x & n_y & 0 \\ n_x & n_x^2 & n_x \sqrt{1 - n_x^2} & 0 \\ \sqrt{1 - n_x^2} & n_x \sqrt{1 - n_x^2} & 1 - n_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que queda del problema se reduce al cálculo de los $T'^{kl} = a_i^k a_j^l T_{ij}$:

$$\omega'_{em} = T'^{00} \quad , \quad S'_0 = \sqrt{(T'^{01})^2 + (T'^{01})^2 + (T'^{01})^2} = c \omega'_{em} = \frac{1}{\mu_0 c} E^2$$

en particular³⁰

$$\omega'_{em} = \omega_{em} \gamma^2 (1 - \beta n_x)^2$$

2-34. En una región del espacio sin carga existe un campo eléctrico $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{x}$.

- a) Demostrar que este campo es solución de las ecuaciones de Maxwell y hallar el campo magnético.
- b) Ignorando un posible campo magnético constante y uniforme, hallar el vector de Poynting.
- c) Hacer un balance energético en $t=0$ para un paralelepípedo $0 < z < a$, $0 < x < a$, $0 < y < a$.
- d) Calcular el valor medio de la energía electromagnética almacenada en dicho volumen y del flujo a través de su superficie.

2-35. Para el campo del problema anterior hallar cómo se transforma la amplitud, la frecuencia, el número de onda y la dirección de propagación para observadores que se muevan a una velocidad V :

- a) $\vec{V} = V \hat{x}$
- b) $\vec{V} = V \hat{z}$

Comprobar también el carácter invariante de I_1 e I_2 .

2-36. Sobre una superficie contenida en el plano xy , cuya normal es $\vec{n} = \hat{z}$, existe un campo eléctrico \vec{E} . Calcular a través del tensor eléctrico de Maxwell, la presión ejercida sobre dicha superficie en los casos siguientes:

- a) $\vec{E} = \hat{y} E$
- b) $\vec{E} = \hat{z} E$
- c) $\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y}) E$

2-37. Calcúlese la fuerza ejercida sobre una carga $+q$, situada en el punto $(a/2, 0, 0)$, por otra $-q$ situada en $(-a/2, 0, 0)$. Con este objetivo, constrúyase una superficie cerrada, formada por el plano infinito $x = 0$ y una semiesfera de radio infinito, que encierra toda la carga $-q$ e intégrese sobre ella la fuerza superficial correspondiente al tensor eléctrico de Maxwell. Repetir el cálculo si ambas cargas son positivas.

³⁰Véase la sección 4.4.1.1.

- 2-38. Hallar la fuerza que un campo uniforme y estático $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ ejerce sobre una carga puntual. Hágase uso del tensor de Maxwell.

SOLUCION :

Para calcular la fuerza sobre la carga puntual, hay que incluirla en un volumen, por ejemplo, en una esfera de radio a cuya normal es $\vec{n} = \hat{r}$, como se muestra en la figura 2.9. El campo en la superficie es la suma del campo externo y del radial que produce la carga

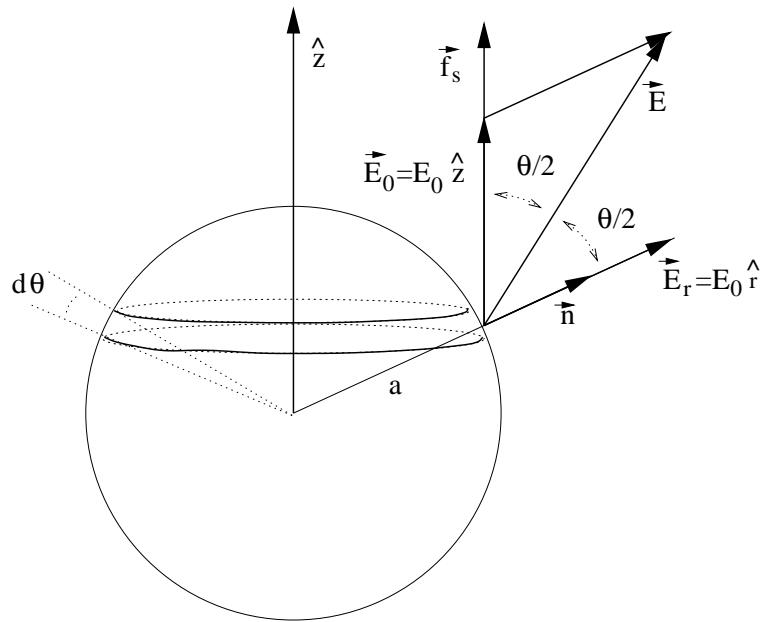


Figura 2.9:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_r = E_0 \hat{z} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \hat{r}$$

El problema puede simplificarse tomando para el radio de la esfera el valor $a = \sqrt{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 E_0}}$, con lo que

$$\vec{E} = E_0 (\hat{z} + \hat{r})$$

Al ser los dos sumandos iguales en módulo, el campo eléctrico total tiene la dirección bisectriz de las de los dos primeros. A su vez, esta última es bisectriz entre las direcciones de la normal a la superficie y la fuerza superficial, con lo que $\vec{f}_s = f_s \hat{z}$. Por otra parte

$$f_s = \omega_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 (1 + \cos \theta)$$

De acuerdo con la simetría del problema, la integración de la fuerza superficial puede hacerse por franjas, como se indica en la figura

$$\vec{F}_q = \oint_S \vec{f}_s ds = \hat{z} \frac{1}{2} q E_0 \int_{\theta=0}^{\pi} (1 + \cos \theta) \sin \theta d\theta = q E_0 \hat{z}$$

2.8. Ejemplos con Mathematica

En los ejemplos que siguen, las componentes contravariantes se indican con una N y las covariantes con una V . Las transformaciones directas se denotan con una D .

Uso de versiones anteriores a la 3,0 :

Si la versión disponible de *Mathematica* es anterior a la versión 3.0, deberán llevarse a cabo las modificaciones propuestas en el capítulo anterior además de las siguientes:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 F[[i]] &\rightarrow \text{Sum}[F[[i]], \{i, 1, 4\}] \\ \partial_x f[x] &\rightarrow D[f[x], x] \end{aligned}$$

donde la variable x puede ser, por ejemplo, la componente contravariante $\text{vec}N[[i]]$ de un vector y la función f la componente doblemente contravariante $\text{ten}NN[[i, j]]$ de un tensor.

2.8.1. Comienzo de la sesión

Remove["Global`*"] (M.2.1)

2.8.2. Subida y bajada de índices

La matriz de las funciones métricas ($g^{ij} = g_{ij}$) es:

gm = {{1, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0}, {0, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, -1}}; (M.2.2)

Se define una función *suba* para subir o bajar los índices de un vector o un tensor de segundo orden:

- El primer argumento (*ten*) de la función *suba* representa a la matriz de las componentes del tensor. El segundo argumento representa a los índices cuya posición quiere cambiarse.

* En el caso de un vector, al argumento del índice debe dársele el valor $in = 1$.

* Para operar sobre el primer índice de un tensor, $in = 1$, para hacerlo sobre el segundo, $in = 2$ y para hacerlo sobre ambos, $in = 12$.

```
suba[ten_, in_] := Which[Dimensions[ten] == {4}, gm.ten,
Dimensions[ten] != {4, 4}, Print["Revise el tensor"], in == 1, gm.ten,
in == 2, ten.gm, in == 12, gm.ten.gm, True, Print["Revise los indices"]];
(M.2.3)
```

La función anterior puede probarse, por ejemplo, con las listas siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{m3} &= \{1, 1, 1\}; \quad \mathbf{m4} = \{1, 1, 1, 1\}; \\ \mathbf{m43} &= \{\{1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}\}; \\ \mathbf{m44} &= \{\{1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}\}; \\ \text{MatrixForm}[suba[m4, 1]] & \end{aligned} \quad (M.2.4) \quad (M.2.5)$$

Obsérvese como se modifican los signos de las componentes al subir o bajar cada uno de los índices de $m4$ y $m44$.

2.8.3. Transformación de Lorentz

Definición de la transformación directa para las componentes contravariantes de un vector o un tensor de segundo orden:

$$a00 = \gamma; \quad a01 = -\beta \gamma; \quad a11 = a00; \quad a10 = a01; \quad (M.2.6)$$

$$\mathbf{aND} = \{\{a00, a01, 0, 0\}, \{a10, a11, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0\}, \{0, 0, 0, 1\}\}; \quad (M.2.7)$$

```
tlND[ten_] := Which[Dimensions[ten] == {4}, aND.ten,
Dimensions[ten] == {4, 4}, aND.ten.aND, True, Print["Revise el tensor"]];
(M.2.8)
```

Pueden utilizarse $m4$ y $m44$ para probar la transformación

$$\text{MatrixForm}[tlND[m4]] \quad (M.2.9)$$

$$\text{MatrixForm}[tlND[m44]] \quad (M.2.10)$$

2.8.4. Operadores tetradimensionales

2.8.4.1. Operadores para funciones con dependencia explícita

Antes de definir los operadores, se definen distintas funciones sobre las que operar con éstos:

Las matrices de las componentes covariantes y contravariantes del vector de posición \vec{s}

$$\mathbf{sN} = \{\mathbf{ct}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} \quad (\text{M.2.11})$$

$$\mathbf{sV} = \text{suba}[\mathbf{sN}, \mathbf{1}] \quad (\text{M.2.12})$$

Funciones de las coordenadas, de tipo escalar y tensorial de segundo orden

$$\mathbf{esca} = \mathbf{sN} \cdot \mathbf{sV}; \quad (\text{M.2.13})$$

$$\mathbf{tenNN} = \text{Outer}[\text{Times}, \mathbf{sN}, \mathbf{sN}];$$

$$\text{MatrixForm}[\mathbf{tenNN}] \quad (\text{M.2.14})$$

Gradiente :

Matriz de las componentes covariantes del gradiente $\frac{\partial f}{\partial x^i}$

$$\mathbf{gradV}[\mathbf{esc}_-] := \text{Table}[\partial_{\mathbf{sN}[[i]]} \mathbf{esc}, \{i, 4\}] \quad (\text{M.2.15})$$

La correspondiente a las componentes contravariantes $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x_i}$

$$\mathbf{gradN}[\mathbf{esc}_-] := \text{suba}[\mathbf{gradV}[\mathbf{esc}], \mathbf{1}] \quad (\text{M.2.16})$$

$$\mathbf{gradN}[\mathbf{esca}] \quad (\text{M.2.17})$$

$$\mathbf{gradV}[\mathbf{esca}] \quad (\text{M.2.18})$$

Divergencia :

Opera sobre las componentes contravariantes de un vector $\frac{\partial vec^i}{\partial x^i}$ o sobre las doblemente contravariantes de un tensor $\frac{\partial ten^{ij}}{\partial x^i}$:

```
divN[tenN_]:=Which[Dimensions[tenN]=={4}, Sum[i=1]^4 ∂sN[[i]]tenN[[i]],
Dimensions[ten]=={4,4}, Table[Sum[i=1]^4 ∂sN[[i,j]]tenN[[i,j]], {j,4}], (M.2.19)
True, Print["Error"]]
```

(M.2.20)

(M.2.21)

Rotacional :

Componentes doblemente covariantes del rotacional de un vector (opera sobre las componentes covariantes del mismo: $\frac{\partial vec_i}{\partial x^j} - \frac{\partial vec_j}{\partial x^i}$).

```
rotVV[vecV_]:=Table[∂sN[[i]]vecV[[j]]- (M.2.22)
∂sN[[j]]vecV[[i]], {i,4}, {j,4}]
```

(M.2.23)

2.8.4.2. Operadores para funciones sin dependencia explícita

Funciones escalares, vectoriales y tensoriales cuya dependencia de las coordenadas no se especifica:

escne = f ;

vecVne = {v0, -v1, -v2, -v3};

vecNne = {v0, v1, v2, v3};

tenNNne =
$$\{\{t00, t01, t02, t03\}, \{t10, t11, t12, t13\}, \{t20, t21, t22, t23\}, \{t30, t31, t32, t33\}\};$$
 (M.2.24)

Para operar sobre estas funciones es necesario indicar que el operando depende de la variable con respecto a la cual se deriva, por ejemplo, $\frac{\partial f(x^i)}{\partial x^i}$

Gradiente :

$$\text{gradVne}[\text{esc}_-] := \text{Table}[\partial_{\text{sN}[[\mathbf{i}]]} \text{esc}[\text{sN}[[\mathbf{i}]]], \{\mathbf{i}, 4\}] \quad (\text{M.2.25})$$

$$\text{gradNne}[\text{esc}_-] := \text{suba}[\text{gradVne}[\text{esc}], 1] \quad (\text{M.2.26})$$

$$\text{gradNne}[\text{escne}] \quad (\text{M.2.27})$$

$$\text{gradVne}[\text{escne}] \quad (\text{M.2.28})$$

En el resultado de las ordenes anteriores, $f'[x]$ debe interpretarse como $\frac{\partial f(x, \dots)}{\partial x}$.

Divergencia :

$$\begin{aligned} \text{divNne}[\text{tenN}_-] := & \text{Which}[\text{Dimensions}[\text{tenN}] == \{4\}, \sum_{i=1}^4 \partial_{\text{sN}[[\mathbf{i}]]} \text{tenN}[[\mathbf{i}]] [\text{sN}[[\mathbf{i}]]], \\ & \text{Dimensions}[\text{ten}] == \{4, 4\}, \text{Table}[\sum_{i=1}^4 \partial_{\text{sN}[[\mathbf{i}]]} \text{tenN}[[\mathbf{i}, \mathbf{j}]] [\text{sN}[[\mathbf{i}]]], \{\mathbf{j}, 4\}], \\ & \text{True}, \text{Print}["Error"]] \end{aligned} \quad (\text{M.2.29})$$

$$\text{divNne}[\text{vecNne}] \quad (\text{M.2.30})$$

$$\text{divNne}[\text{tenNNne}] \quad (\text{M.2.31})$$

Rotacional :

$$\text{rotVVne}[\text{vecV}_-] := \text{Table}[\partial_{\text{sN}[[\mathbf{i}]]} \text{vecV}[[\mathbf{j}]] [\text{sN}[[\mathbf{i}]]] - \partial_{\text{sN}[[\mathbf{j}]]} \text{vecV}[[\mathbf{i}]] [\text{sN}[[\mathbf{j}]]], \{\mathbf{i}, 4\}, \{\mathbf{j}, 4\}] \quad (\text{M.2.32})$$

$$\text{rotVVne}[\text{vecVne}] \quad (\text{M.2.33})$$

Magnitudes electromagnéticas :

Se puede experimentar con estos operadores aplicándolos a las funciones definidas previamente o aplicándolos a las magnitudes electromagnéticas:

Potencial :

Componentes contravariantes

$$\mathbf{AN} = \left\{ \frac{\phi}{c}, \mathbf{Ax}, \mathbf{Ay}, \mathbf{Az} \right\} \quad (\text{M.2.34})$$

$$\mathbf{AV} = \text{suba}[\mathbf{AN}, \mathbf{1}] \quad (\text{M.2.35})$$

Condición de Lorenz

$$\mathbf{cLorenz} = \text{divN}[\mathbf{AN}] == 0 \quad (\text{M.2.36})$$

Componentes FVV de tensor campo

$$\text{MatrixForm}[\text{rotVV}[\mathbf{AV}]] \quad (\text{M.2.37})$$

Densidad de carga-corriente :

Componentes contravariantes

$$\mathbf{jN} = \{c\rho, \mathbf{jx}, \mathbf{jy}, \mathbf{yz}\} \quad (\text{M.2.38})$$

Ecuación de continuidad de la carga

$$\mathbf{ccarga} = \text{divN}[\mathbf{jN}] == 0 \quad (\text{M.2.39})$$

$$\mathbf{jV} = \text{suba}[\mathbf{jN}, \mathbf{1}] \quad (\text{M.2.40})$$

Campo :

Matriz de las componentes doblemente covariantes del campo

$$\mathbf{FVV} = \left\{ \left\{ \mathbf{0}, \frac{\mathbf{Ex}}{c}, \frac{\mathbf{Ey}}{c}, \frac{\mathbf{Ez}}{c} \right\}, \left\{ -\frac{\mathbf{Ex}}{c}, \mathbf{0}, -\mathbf{Bz}, \mathbf{By} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ -\frac{\mathbf{Ey}}{c}, \mathbf{Bz}, \mathbf{0}, -\mathbf{Bx} \right\}, \left\{ -\frac{\mathbf{Ez}}{c}, -\mathbf{By}, \mathbf{Bx}, \mathbf{0} \right\} \right\}; \quad (\text{M.2.41})$$

$$\text{MatrixForm}[\mathbf{FVV}] \quad (\text{M.2.42})$$

Matriz de las componentes contravariantes-covariantes

$$\mathbf{FN} = \text{suba}[\mathbf{FVV}, \mathbf{1}]; \quad (\text{M.2.43})$$

$$\text{MatrixForm}[\mathbf{FN}] \quad (\text{M.2.44})$$

Matriz de las componentes doblemente contravariantes

$$\mathbf{FNN} = \text{suba}[\mathbf{FVV}, \mathbf{12}]; \quad (\text{M.2.45})$$

$$\text{MatrixForm}[\mathbf{FNN}] \quad (\text{M.2.46})$$

Transformación de las componentes contravariantes

$$\mathbf{FNNpr} = \text{tlND}[\mathbf{FNN}] \quad (\text{M.2.47})$$

Transformación de las componentes paralelas

$$\mathbf{Expr} = \text{Simplify}[\mathbf{c FNNpr[[2,1]]}/\gamma^2 \rightarrow \frac{1}{1 - \beta^2}] \quad (\text{M.2.48})$$

$$\mathbf{Bexpr} = \text{Simplify}[\mathbf{FNNpr[[4,3]]}/\gamma^2 \rightarrow \frac{1}{1 - \beta^2}] \quad (\text{M.2.49})$$

$$\mathbf{Bexpr} = \text{Simplify}[\mathbf{FNNpr[[4,3]]}/\gamma^2 \rightarrow \frac{1}{1 - \beta^2}] \quad (\text{M.2.50})$$

Transformación de las componentes perpendiculares

$$\mathbf{Eypr} = \text{Simplify}[\mathbf{c FNNpr[[3,1]]}/\gamma^2 \rightarrow \frac{1}{1 - \beta^2}] \quad (\text{M.2.51})$$

$$\mathbf{Bypr} = \text{Simplify}[\mathbf{FNNpr[[2,4]]}/\gamma^2 \rightarrow \frac{1}{1 - \beta^2}] \quad (\text{M.2.52})$$

2.8.5. Invariantes del campo

Primer invariante

$$\mathbf{I1a} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \mathbf{FNN}[[i,j]], \mathbf{FVV}[[i,j]] \quad (\text{M.2.53})$$

En el resultado de la orden anterior aparecen términos $2 Bx^2$ etc.. Para expresar el invariante en la forma en que lo está en el texto

$$\mathbf{I1} = \text{Simplify}[\frac{\mathbf{I1a}}{2} / \{Bx^2 \rightarrow B^2 - By^2 - Bz^2, Ex^2 \rightarrow E^2 - Ey^2 - Ez^2\}] \quad (\text{M.2.54})$$

Segundo invariante

$$\mathbf{I2a} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \mathbf{FVV}[[i,j]] \mathbf{FNN}[[j,k]] \mathbf{FVV}[[k,l]] \\ \mathbf{FNN}[[l,i]] \quad (\text{M.2.55})$$

Observando los resultados y procediendo de forma análoga a la del caso anterior

$$\mathbf{I2b} = \mathbf{Simplify}[\mathbf{I2a} - \frac{\mathbf{I1a}^2}{2}] \quad (\text{M.2.56})$$

$$\mathbf{I2} = \frac{\mathbf{c}^2 \mathbf{I2b}}{4} / .(\mathbf{Ex} \mathbf{Bx} + \mathbf{Ey} \mathbf{By} + \mathbf{Ez} \mathbf{Bz}) - > \mathbf{vecE} \cdot \mathbf{vecB} \quad (\text{M.2.57})$$

2.8.6. Tensor energía-momento del campo

$$\mathbf{t00} = \mathbf{wem}; \mathbf{t01} = \mathbf{t10} = \frac{\mathbf{Sx}}{c}; \mathbf{t02} = \mathbf{t20} = \frac{\mathbf{Sy}}{c}; \mathbf{t03} = \mathbf{t30} = \frac{\mathbf{Sz}}{c}; \\ \mathbf{t11} = -\mathbf{max11}; \mathbf{t12} = \mathbf{t21} = -\mathbf{max12}; \mathbf{t13} = \mathbf{t31} = -\mathbf{max13}; \\ \mathbf{t22} = -\mathbf{max22}; \mathbf{t23} = \mathbf{t32} = -\mathbf{max23}; \mathbf{t33} = -\mathbf{max33}; \quad (\text{M.2.58})$$

$$\mathbf{enmomNN} = \{\{\mathbf{t00}, \mathbf{t01}, \mathbf{t02}, \mathbf{t03}\}, \{\mathbf{t10}, \mathbf{t11}, \mathbf{t12}, \mathbf{t13}\}, \\ \{\mathbf{t20}, \mathbf{t21}, \mathbf{t22}, \mathbf{t23}\}, \{\mathbf{t30}, \mathbf{t31}, \mathbf{t32}, \mathbf{t33}\}\}; \quad (\text{M.2.59})$$

$$\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{enmomNN}] \quad (\text{M.2.60})$$

Densidad de energía

$$\omega\mathbf{em0} = \mathbf{enmomNN}[[1, 1]] \quad (\text{M.2.61})$$

Vector de Poynting

$$\mathbf{vecS0} = \mathbf{c} \mathbf{enmomNN}[[\mathbf{Range}[1], \mathbf{Range}[2, 4]]]; \quad (\text{M.2.62})$$

$$\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{vpoin}] \quad (\text{M.2.63})$$

Tensor de Maxwell

$$\mathbf{M0} = -\mathbf{enmomNN}[[\mathbf{Range}[2, 4], \mathbf{Range}[2, 4]]]; \quad (\text{M.2.64})$$

$$\text{MatrixForm}[\mathbf{tmax}] \quad (\text{M.2.65})$$

Ejercicio : Hallar los invariantes de este tensor.

Ejercicio : Hallar la ley de transformación para la densidad de energía transportada en el vacío por una onda plana y homogénea.

Capítulo 3

Medios macroscópicos

3.1. Introducción

En la tercera parte del primer tomo se vió como era posible escribir diferentes versiones de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell. Aquí se recuerda lo expuesto en aquel lugar, se amplian algunas de las cuestiones allí tratadas y se expresan dichas ecuaciones en forma tensorial.

3.2. Ecuaciones macroscópicas de Maxwell

En primer lugar se proponía una versión de estas ecuaciones en la cual \vec{E} y \vec{B} son los campos macroscópicos, promedio de los microscópicos, y ρ_T y \vec{j}_T los promedios macroscópicos de las densidades microscópicas totales de carga y corriente o, al menos, de aquellas que eran significativas en la producción de dichos campos.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_T}{\varepsilon_0} \quad (3.1a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.1b)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.1c)$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_T + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.1d)$$

Aunque los campos se anotan de la misma forma que en 2.83, ésto no debe prestarse a confusión puesto que unas y otras ecuaciones se aplicarán en contextos distintos.

La aplicación de la divergencia a 3.1d y el uso de 3.1a conduce a la ecuación de continuidad de las cargas totales ρ_T

$$\nabla \cdot \vec{j}_T + \frac{\partial \rho_T}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

Cuando los medios son polarizables a nivel molecular, resulta conveniente utilizar la versión más conocida de estas ecuaciones, en la que las cargas y corrientes totales se desglosan en términos asociados a la conducción y a la polarización.

Las densidades macroscópicas resultantes son¹

$$\rho_T = \rho + \rho_p \quad , \quad \vec{j}_T = \vec{j} + \vec{j}_n = \vec{j} + \vec{j}_P + \vec{j}_M \quad (3.3)$$

donde

ρ	=	densidad de carga de conducción	(3.4)
ρ_p	=	densidad de carga de polarización	
\vec{j}	=	densidad de corriente de conducción	
\vec{j}_n	=	densidad de corriente de polarización	
\vec{j}_P	=	densidad de corriente de polarización eléctrica	
\vec{j}_M	=	densidad de corriente de polarización magnética	

(3.5)

Cuyas expresiones, en función de las densidades de polarización eléctrica \vec{P} y magnética \vec{M} , son

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (3.6a)$$

$$\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad , \quad \vec{j}_M = \nabla \wedge \vec{M} \quad (3.6b)$$

La nueva versión de las ecuaciones de Maxwell se obtiene directamente de la anterior 3.1 sin más que sustituir en ella ρ_T y \vec{j}_T en función de \vec{P} y \vec{M} . Sin embargo, presenta una mayor simetría si en vez de expresarla en función de las densidades de momento dipolar se expresa en función del *Desplazamiento eléctrico* \vec{D} y de la *Intensidad magnética* \vec{H} ² definidos por las ecuaciones

¹Véase el tomo I, parte III.

²Es necesario poner de manifiesto que la aparente simetría de las ecuaciones se logra mediante la definición de dos campos de carácter híbrido, \vec{D} y \vec{H} , en los que se combinan magnitudes que son físicamente muy heterogéneas. Uno de los sumandos representa al campo electromagnético (\vec{E} , \vec{B}) y el otro al estado de polarización del medio (\vec{P} , \vec{M}). En este mismo sentido, la expresión $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, que sugiere la analogía de \vec{D} con \vec{B} y \vec{E} con \vec{H} , de ahí el calificativo de intensidad que se le asigna a este último campo, es realmente engañosa. Desde este punto de vista, las siguientes definiciones aparecen como artificiosas y, aunque han sido consagradas por la costumbre, su principal virtud reside en prestar una apariencia de simetría a las leyes del campo electromagnético.

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.7a)$$

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (3.7b)$$

De acuerdo con ésto, las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (3.8a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.8b)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.8c)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.8d)$$

En este caso, la aplicación de la divergencia a 3.8d y el uso de 3.8a conduce a la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.9)$$

La resolución del problema electromagnético requiere el conocimiento de las relaciones macroscópicas que ligan a \vec{j} , \vec{P} y \vec{M} con los campos \vec{E} y \vec{B} ³. Las ecuaciones del movimiento constituyen el punto de partida para la búsqueda de estas relaciones o ecuaciones constitutivas del medio. Aunque, en general, éstas son integro-diferenciales y no lineales, aquí solo se considerarán aquellas que pueden aproximarse linealmente, caso que, por otra parte, es el más importante desde el punto de vista práctico.

3.2.1. Expresión tensorial de las ecuaciones macroscópicas

El promedio de las magnitudes microscópicas, realizado de la forma simple expuesta en el primer tomo o como por medio de la función de distribución sobre el espacio de las fases ([Landau y Lifchitz FT]), conserva el carácter tensorial de las magnitudes promediadas. Esto permite expresar las ecuaciones macroscópicas de Maxwell en forma manifiestamente invariante:

³ ρ está ligado a \vec{j} mediante 3.9.

Las ecuaciones 3.8b y 3.8c son análogas a las correspondientes microscópicas, por lo que su expresión tensorial coincide con 2.80

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial F^{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial F^{jk}}{\partial x_i} = 0 \quad (3.10)$$

En cuanto a las otras dos ecuaciones macroscópicas 3.1a y 3.1d, de la primera versión, toman la misma forma que sus homólogas microscópicas 2.82

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{j}_T \quad (3.11)$$

Desglosando las cargas y corrientes totales en sus términos de conducción y polarización, 3.8a y 3.8d pueden escribirse de forma análoga a la anterior. Efectivamente

$$\vec{j}_T = \vec{j} + \vec{j}_p \rightarrow \begin{cases} j^i = (c\rho, \vec{j}) \\ j_p^i = (c\rho_p, \vec{j}_P + \vec{j}_M) \end{cases} \quad (3.12)$$

donde \vec{j} es el tetravector densidad de carga-corriente de conducción y \vec{j}_p el de polarización. Este último, de acuerdo con 3.3 y 3.6, puede expresarse de la forma

$$\vec{j}_p = \vec{\nabla} \cdot \tilde{\Pi} \quad (3.13)$$

donde $\tilde{\Pi}$ es el tensor de las polarizaciones⁴

$$\tilde{\Pi} \rightarrow (\Pi_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -cP_x & -cP_y & -cP_z \\ cP_x & 0 & -M_z & M_y \\ cP_y & M_z & 0 & -M_x \\ cP_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Esto permite definir a un tensor \tilde{G} que engloba a los campos \vec{D} y \vec{H} ⁵

$$\tilde{G} \equiv \frac{\tilde{F}}{\mu_0} - \tilde{\Pi} \rightarrow (G_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & cD_x & cD_y & cD_z \\ -cD_x & 0 & -Hz & Hy \\ -cD_y & Hz & 0 & -Hx \\ -cD_z & -Hy & Hx & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

⁴Problema 3-3

⁵Sommerfeld denomina a \vec{E} y \vec{B} "entidades de intensidad" a \vec{D} y \vec{H} "entidades de cantidad". \tilde{F} sería el tensor de campo y \tilde{G} el de excitación.

y escribir la ecuación 3.11 como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \vec{j} \quad (3.16)$$

Este es el punto de partida de la *Electrodinámica de los medios en movimiento*. Para más detalles, véase [Kong] y la sección C.3.

3.2.2. Teoremas de conservación

Las ecuaciones de continuidad, o conservación, de la energía y de la cantidad de movimiento electromagnéticas, pueden expresarse de diversas formas. A pesar de que su interpretación es menos directa que la de las correspondientes microscópicas, desarrolladas en 2.6, son de gran utilidad incluso entendidas como un mero balance entre términos de igual dimensión. A continuación se consideran las versiones más utilizadas, las cuales se deducen directamente de la segunda versión de las ecuaciones de Maxwell 3.8. Una interpretación precisa de los distintos términos que intervienen en estos balances requiere un análisis de los modelos utilizados para caracterizar a cada medio concreto⁶.

El teorema de Poynting se deduce fácilmente⁷ mediante la eliminación de \vec{j} , en función de los campos, del producto $\vec{j} \cdot \vec{E}$:

$$\underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{(a)} + \underbrace{\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{(b)} + \underbrace{\nabla \cdot \vec{S}}_{(c)} = 0 \quad (3.17a)$$

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dv + \int_V (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dv + \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3.17b)$$

Este teorema macroscópico es formalmente análogo al microscópico pero, en cierto sentido, es muy distinto: ρ y \vec{j} son las densidades de carga y corriente de conducción y en \vec{D} y \vec{H} se mezclan los campos electromagnéticos macroscópicos \vec{E} y \vec{B} con los de polarización \vec{P} y \vec{M} . Sin pretender asignar a cada término una interpretación precisa, puede decirse que (a) es una densidad de potencia asociada al transporte macroscópico de las cargas de conducción en el punto de evaluación de 3.17a, (b) la densidad de potencia que hay que suministrar al campo y al medio para que \vec{D} varíe con la velocidad $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ y \vec{B} varíe con la velocidad $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ y (c) está relacionado con un flujo de potencia hacia el exterior del entorno del punto.

$$\vec{S} \equiv \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (3.18)$$

recibe el nombre de *Vector de Poynting* macroscópico.

⁶En C.4 puede encontrarse una discusión más detallada del teorema de Poynting.

⁷problema 3-6.

Teorema de Poynting para medios lineales no dispersivos :

Si los medios son lineales y no dispersivos⁸, el teorema de Poynting puede expresarse de la forma

$$\vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \omega_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0 \quad (3.19)$$

donde

$$\omega_{em} = \omega_e + \omega_m \rightarrow \begin{cases} \omega_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \\ \omega_m = \frac{1}{2} \mu H^2 \end{cases} \quad (3.20)$$

sí puede interpretarse como una densidad de energía electromagnética del medio, es decir, asociada a los campos \vec{E} y \vec{B} macroscópicos y a la polarización del medio.

En forma integral

$$\underbrace{\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dv}_{(a)} + \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \omega_{em} dv}_{(b)} + \underbrace{\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s}}_{(c)} = 0 \quad (3.21)$$

el término (a) representaría al trabajo que el campo macroscópico realiza sobre las cargas de conducción, el (b) la variación por unidad de tiempo de la energía electromagnética almacenada en el volumen V y el (c), el flujo del vector de Poynting a través de la superficie S , a la energía que por unidad de tiempo se transvasa al exterior de V .

Conservación de la cantidad de movimiento en medios lineales no dispersivos y homogéneos :

De forma análoga, la ecuación de continuidad de la cantidad de movimiento puede obtenerse eliminando ρ y \vec{j} de $\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$ ⁹ (En lo que sigue se supone que los medios son lineales y no dispersivos)

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{M} = -(\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{g} dv - \oint_S \vec{n} \cdot \overset{\leftrightarrow}{M} ds = - \int_V (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) dv \quad (3.23)$$

En este caso, $\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$ es la potencia que los campos macroscópicos transmiten a las cargas de conducción contenidas en la unidad de volumen,

$$\vec{g} \equiv \epsilon \vec{E} \wedge \vec{B} \quad (3.24)$$

tiene dimensión de densidad de cantidad de movimiento y en parte es atribuible a los campos macroscópicos electromagnéticos y en parte a la polarización del medio, mientras que

⁸Véase la sección C.4.2.

⁹problema 3-7.

$$\overset{\leftrightarrow}{M} = \overset{\leftrightarrow}{M}_e + \overset{\leftrightarrow}{M}_m \quad , \quad \begin{cases} M_e^{\alpha\beta} \equiv \varepsilon E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} \varepsilon \delta_\beta^\alpha (\vec{E} \cdot \vec{E}) \\ M_m^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{\mu} B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \delta_\beta^\alpha (\vec{B} \cdot \vec{B}) \end{cases} \quad (3.25)$$

es el tensor de esfuerzos de Maxwell para el medio y en él, como en \vec{g} se incluyen términos asociados a los campos electromagnéticos y a la polarización del medio.

3.2.2.1. Interpretación del tensor de Maxwell para campos estáticos

Ya se ha visto en el capítulo 2 que en el marco relativista el tensor de Maxwell no tiene tal carácter tensorial pero, dentro de la aproximación galileana, sí puede considerarse como un tensor tridimensional. Cuando los campos son estáticos $\overset{\leftrightarrow}{M}$ se interpreta como un tensor de esfuerzos, de modo análogo a la interpretación que de $(-\overset{\leftrightarrow}{T})$ se hace en elasticidad. En este caso, la fuerza electromagnética total aplicada a \mathcal{V} (expresión 3.22) puede calcularse de las formas

$$\vec{F}_{em} = \int_{\mathcal{V}} \vec{f}_{em} dv = \oint_{\mathcal{S}} \vec{f}_s ds \quad (3.26)$$

donde

$$\vec{f}_{em} \equiv \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad , \quad \vec{f}_s = \vec{n} \cdot \overset{\leftrightarrow}{M} \quad (3.27)$$

\vec{n} es la normal hacia afuera de la superficie de integración y \vec{f}_{em} es la densidad de fuerza de Lorentz. La fuerza total que el campo electromagnético estático ejerce sobre el conjunto de las partículas encerradas en \mathcal{V} puede calcularse integrando la fuerza $\vec{f}_{em} dv$ ejercida sobre cada elemento de volumen o la " $\vec{f}_s ds$ " ejercida sobre cada elemento de superficie (el entrecomillado indica que la fuerza superficial solo puede integrarse sobre la superficie cerrada \mathcal{S} y que, como se desprende de lo visto en el capítulo 2, queda indeterminada por un vector de divergencia nula).

Dado que en la definición del tensor de Maxwell se contempla la contribución de dos sumandos, el eléctrico y el magnético, para estudiar sus características fundamentales basta con analizar una sola de las contribuciones, por ejemplo, la eléctrica. Suponiendo un medio lineal

$$M_e^{\alpha\beta} \equiv \varepsilon E_\alpha E_\beta - \delta_\beta^\alpha \omega_e \quad (3.28)$$

En notación diádica, el tensor puede escribirse de la forma

$$\overset{\leftrightarrow}{M}_e = \varepsilon \vec{E} \vec{E} - \omega_e \overset{\leftrightarrow}{I} \quad (3.29)$$

donde $\overset{\leftrightarrow}{I}$ es el tensor tridimensional unitario y $(\vec{E} \vec{E}) = (E_\alpha E_\beta)$. La fuerza superficial es pues,

$$\vec{f}_s = \vec{n} \cdot \overset{\leftrightarrow}{M}_e = \varepsilon (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \omega_e \vec{n}$$

En la figura 3.1 se muestra al campo eléctrico descompuesto en la dirección normal a la superficie \vec{n} y en la tangencial \vec{t} . En función de sus componentes en estas direcciones

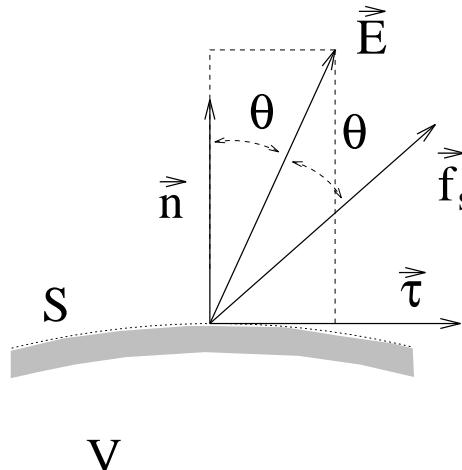


Figura 3.1: Geometría general de la fuerza superficial

$$\vec{E} = E (\cos \theta \vec{n} + \sin \theta \vec{\tau})$$

y

$$\vec{f}_s = \omega_e (\cos 2\theta \vec{n} + \sin 2\theta \vec{\tau}) , , f_s = \omega_e$$

por lo que el campo eléctrico es la bisectriz entre la normal a la superficie y la fuerza superficial. En la figura 3.2 se muestran los casos más característicos:

(a) - Si la superficie ficticia de integración \mathcal{S} se hace coincidir con la de un conductor, el campo eléctrico será normal (hacia afuera si las cargas superficiales son positivas y hacia adentro en caso contrario) y la fuerza superficial coincide con la real; es una tensión que tiende a arrancar las cargas de la superficie.

(b) - Cuando el campo eléctrico forma un ángulo de 45° con respecto a la normal, la fuerza es de cizalladura.

(c) - Si el campo es tangencial la fuerza es de presión.

Conviene puntualizar que, desde el punto de vista práctico, si se desea utilizar al tensor de Maxwell para calcular la fuerza sobre un determinado conjunto de cargas, el volumen V y la superficie S pueden tomarse como arbitrarios, pero deben contener a todas y cada una de dichas cargas y a ninguna otra. En cada problema concreto, una elección juiciosa de la superficie de integración que tenga en cuenta las posibles simetrías puede facilitar la solución del mismo.

3.2.3. Condiciones de continuidad

El proceso de promedio seguido para la obtención de las ecuaciones macroscópicas permite modelar a los medios como continuos a nivel submacroscópico, pero es muy común la existencia de

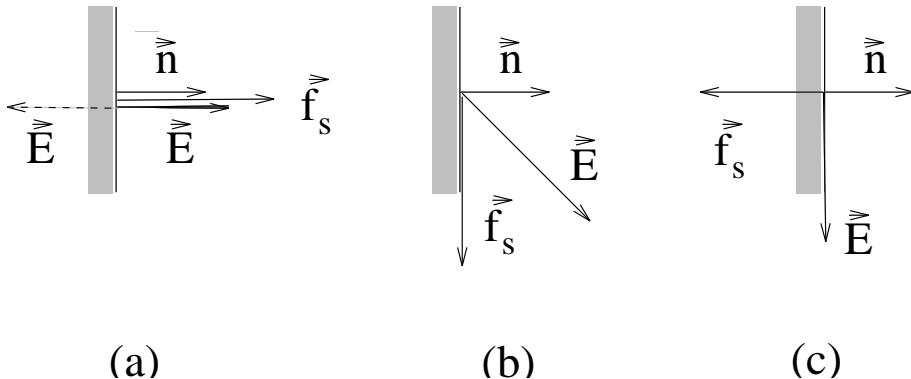


Figura 3.2: Tensión (a), cizalladura (b) y presión (c)

interfaces en las que se pasa bruscamente de un medio a otro distinto por lo que a nivel macroscópico suele ser conveniente representarlas como discontinuas. Es importante establecer unas reglas de conexión, o continuidad, entre los campos a ambos lados de una interfaz. Esto es posible siempre que, como suele ocurrir en la mayor parte de los problemas prácticos, se de una serie de condiciones. La primera es que la interfaz pueda ser representada por una superficie suave \mathcal{S}_I ¹⁰.

Las demás condiciones se describen con ayuda de la figura 3.3. Esta representa a un volumen macroscópico constituido por un prisma cilíndrico (caja de pastillas) cuyas bases son planas, paralelas y equidistantes a \mathcal{S}_I y de un área $\Delta\mathcal{S}$ lo bastante pequeña como para que la sección correspondiente de \mathcal{S}_I , sombreada en la figura, pueda considerarse como plana. La altura del cilindro es h y se supone que, manteniéndose en el dominio macroscópico, puede tomarse tan pequeña como sea necesario para hacerla despreciable frente a la dimensión transversal de la caja $(\Delta\mathcal{S})^{1/2}$. El vector normal a \mathcal{S}_I , en la dirección hacia afuera del medio (1), es \vec{n}_1 y $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$ es el vector normal en el sentido hacia afuera del medio (2). Los campos sobre la superficie, en cada uno de los medios, son \vec{a}_1 y \vec{a}_2 . La variación espacial de los campos se supone suave, salvo en las inmediaciones de la interfaz donde éstos varían de forma continua pero brusca. En las superficies superior e inferior de la caja, dichos campos pueden aproximarse como uniformes y sus derivadas temporales tomarse como finitas en todo el volumen. En cuanto a las densidades de carga y corriente ρ y \vec{j} se suponen finitas salvo en \mathcal{S}_I , donde deben ser representadas por densidades superficiales finitas ρ_s y \vec{j}_s . Al igual que los campos, se considera que estas magnitudes varían lentamente de forma que en la parte superior de la caja, en la inferior o en \mathcal{S}_I , según el caso, pueden tomarse como uniformes.

Las ecuaciones 3.8 y 3.9 pueden ser expresadas en forma integral haciendo uso del teorema de Gauss

$$\int_V \nabla \cdot \vec{a} dv = \oint_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds \quad (3.30)$$

, el de Stokes, o la consecuencia del primero

¹⁰Este no es el caso de un cristal esmerilado, con respecto a la radiación visible, puesto que la rugosidad del mismo es comparable con la longitud de onda del campo.

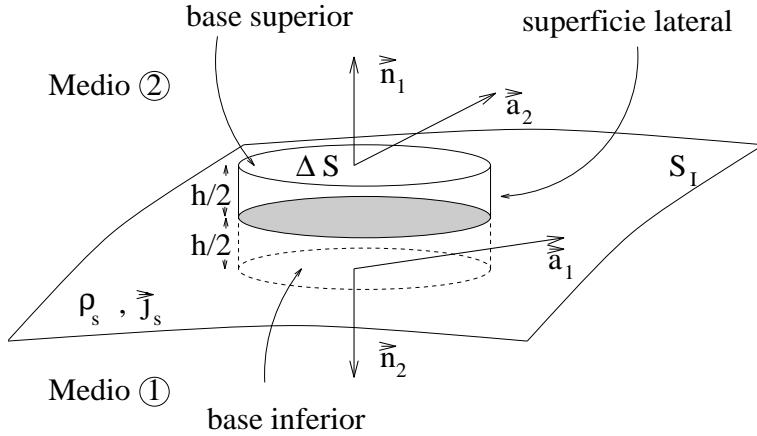


Figura 3.3: Condiciones de continuidad

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \wedge \vec{a} dv = \oint_{\mathcal{S}} \vec{n} \wedge \vec{a} ds \quad (3.31)$$

donde \mathcal{V} es el volumen de integración, \mathcal{S} la superficie que lo envuelve y \vec{n} la normal hacia afuera del volumen en cuestión.

Aunque estos teoremas solo son válidos cuando se aplican a regiones continuas, las precisiones apuntadas al principio permiten integrar sobre el volumen de la caja y considerar a la interfaz como matemáticamente continua.

Escribiendo $\nabla \cdot \vec{a} = \xi$ y a la densidad superficial correspondiente como ξ_s , la aplicación de 3.30 a la caja puede expresarse de la forma

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{a} dv = \oint_{\text{bases+lateral}} \vec{a} \cdot \vec{n} ds$$

Si se hace a h lo suficientemente pequeña, la contribución de la superficie lateral y la de los volúmenes superior e inferior son despreciables, por lo que quedan solo las contribuciones de las bases y la de la sección $\Delta\mathcal{S}$ de \mathcal{S}_l .

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \Delta\mathcal{S} = \xi_s \Delta\mathcal{S} \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = \xi_s \quad (3.32)$$

De forma análoga, partiendo de 3.31 y anotando la densidad superficial del rotacional como $\vec{\eta}_s$, se tiene que

$$\vec{n}_1 \wedge (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = \vec{\eta}_s \quad (3.33)$$

De acuerdo con 3.32, 3.8a, 3.8b y 3.9, las condiciones de frontera para las componentes normales son

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \quad (3.34a)$$

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (3.34b)$$

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (3.34c)$$

La componente normal de \vec{D} es discontinua si $\rho_s \neq 0$, la de \vec{B} es incondicionalmente continua y la de \vec{j} es discontinua si $\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \neq 0$.

Por lo que respecta a las condiciones sobre las componentes tangenciales, es necesario tener en cuenta que, mientras que la carga superficial se acumula en capas de dimensión microscópica en la superficie de los conductores, por lo que es ineludible la previsión de posibles $\rho_s \neq 0$ a escala macroscópica, las derivadas temporales de los campos son finitas en las interfaces y no contribuyen con términos superficiales. Tampoco es necesario considerar la posible existencia de densidades superficiales de corriente de conducción, salvo que uno de los medios se aproxime como conductor ideal ($\sigma \rightarrow \infty$). Dichas condiciones se deducen de 3.33, 3.8c y 3.8d

$$\vec{n}_1 \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (3.35a)$$

$$\vec{n}_1 \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_s \quad (3.35b)$$

y se traducen en la continuidad incondicional de la componente tangencial de \vec{E} y la discontinuidad de la de \vec{H} si $\vec{j}_s \neq 0$ porque alguno de los dos medios se ha modelado como un conductor.

3.3. Medios lineales

A continuación se considera el caso particular de los medios lineales, los cuales son tratados con algo más de extensión en el apéndice C.

3.3.1. Ecuaciones de Maxwell para medios lineales

Los medios más simples son aquellos en los que sus relaciones constitutivas son lineales, homogéneas, independientes del tiempo, isótropas y no dispersivas:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \vec{H}(\vec{r}, t), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (3.36)$$

donde ε , μ y σ son constantes independientes de \vec{r} y de t .

Las ecuaciones de Maxwell toman en este caso la forma

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (3.37a)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (3.37b)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.37c)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.37d)$$

Esta versión es de una gran utilidad puesto que es aplicable con suficiente aproximación a una gran parte de los problemas de interés práctico. Sus límites pueden resumirse cualitativamente:

- La linealidad obliga a reducir la amplitud de los campos aplicados puesto que cuando ésta es suficientemente elevada todos los medios se comportan de forma no-lineal. La manifestación más dramática de no-linealidad es la ruptura dieléctrica, debido a la cual un dieléctrico se perfora cuando se le aplica un campo eléctrico superior a un cierto valor crítico (del orden de 10^7 V.m^{-1}). No obstante, salvo en el caso de materiales básicamente no lineales, como los ferroeléctricos o ferromagnéticos, esta limitación es poco importante. Los fenómenos electromagnéticos no lineales son muy variados e interesantes aunque aquí no haya espacio para tratarlos con extensión suficiente.

- La no-homogeneidad es una propiedad frecuente en la naturaleza, así como la dependencia temporal de las propiedades de los medios. Si se dán estas circunstancias, las constantes se ven afectadas por los operadores y

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} , \quad \nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \epsilon \cdot \vec{E}$$

con lo que las ecuaciones se complican pero permiten, a su vez, el estudio de una familia de fenómenos, como la propagación de ondas electromagnéticas en el interior de la tierra, en la atmósfera, la ionosfera, etc. Sin embargo, con las ecuaciones 3.37 y las condiciones de continuidad 3.34 y 3.35, puede abordarse el estudio de medios homogéneos a trozos, como son la mayor parte de las lentes, las guías de onda, las antenas, etc..

- Como se ha comentado anteriormente, otra limitación al uso de estas ecuaciones se debe a la aparición del fenómeno de dispersión temporal¹¹. La variación temporal de los campos debe ser mucho más lenta que la respuesta del medio, es decir, las constantes de tiempo características de

¹¹Véase la sección C.1. También pueden aparecer fenómenos de dispersión espacial, cuando el campo y los medios varían rápidamente con las coordenadas espaciales, debido al hecho de que el campo total en un punto recibe contribuciones del medio que hay en su entorno y, por lo tanto, la respuesta del mismo solo puede tratarse aproximadamente como un efecto local.

los campos deben ser muy superiores a las de las respuestas a un impulso del medio. Una gran mayoría de los medios tiene una respuesta dieléctrica aproximadamente constante hasta frecuencias del rango de microondas, a partir del cual empieza a ser notable la dispersión temporal. Por lo general, los efectos dispersivos de la conductividad y la permeabilidad magnética lineales aparecen a frecuencias más elevadas.

Cuando las relaciones constitutivas se hacen dispersivas puede optarse por hacer uso de las ecuaciones C.7 para obtener una versión de las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo que es válida para medios lineales dispersivos. Esta es utilizada como punto de partida para el estudio numérico de este tipo de medios pero no es una vía fácil desde el punto de vista analítico. Es preferible en muchos casos el tratamiento de estos problemas dentro del dominio de la frecuencia. De acuerdo con C.9, suponiendo que los medios son homogéneos e isótropos¹², las ecuaciones de Maxwell se expresan como

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.38a)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (3.38b)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \quad (3.38c)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega \varepsilon \vec{E} \quad (3.38d)$$

en las que se reduce en la unidad el número de variables sobre las que hay que integrar puesto que los operadores temporales han sido sustituidos por funciones algebraicas de ω .

Aunque las magnitudes son designadas con la misma notación que en 3.37, estas ecuaciones son válidas en el dominio de la frecuencia y $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$, $\sigma = \sigma(\omega)$, $\rho = \rho(\vec{r}, \omega)$, $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, \omega)$, $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, \omega)$ y $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, \omega)$ son densidades espectrales. Otra forma equivalente de utilizarlas es interpretando a las magnitudes anteriores como amplitudes de las magnitudes armónicas, de frecuencia ω ¹³. La solución a los problemas en el dominio del tiempo puede deducirse a partir de la correspondiente en el dominio de la frecuencia mediante la aplicación a esta última de la transformada inversa de Fourier.

3.4. Problemas

3-1. Demostrar que si el momento monopolar de una distribución de carga es nulo y $\nabla \cdot \vec{j} = 0$, el momento dipolar eléctrico y el magnético son independientes del origen de coordenadas.

3-2. Demostrar que las ecuaciones 3.1 son equivalentes a las 3.8.

¹²La extensión de estas ecuaciones para medios inhomogéneos y anisótropos es evidente.

¹³Basta con hacer $\omega \rightarrow \omega'$ y $\omega_0 \rightarrow \omega$ en III.13 y III.14.

3-3. Comprobar la expresión 3.13.

3-4. Aplicando las condiciones en la frontera, encontrar el campo eléctrico en cualquier punto del espacio, en los siguientes casos:

- a) Esfera conductora en un campo electrostático inicialmente uniforme
- b) Esfera dieléctrica en un campo electrostático inicialmente uniforme

3-5. El semiespacio $x < 0$ está vacío ($\vec{j}_T = 0, \rho_T = 0$) y se encuentra limitado por un plano conductor ideal $x = 0$. Si el campo eléctrico en dicha región es $\vec{E} = (A_1 \exp[-(x - ct)^2] + A_2 \exp[-(x + ct)^2]) \hat{y}$, determinar las condiciones que ha de cumplir para ser compatible con las condiciones de contorno.

SOLUCION :

El campo eléctrico puede escribirse de la forma

$$\vec{E} = \hat{y} \left(A_1 e^{-u^2} + A_2 e^{-w^2} \right) , \quad u \equiv x - ct , \quad w \equiv x + ct$$

Corresponde, como se verá en el próximo capítulo, a la superposición de dos ondas que se propagan en el vacío en sentidos contrarios a lo largo del eje x .

El campo magnético se deduce del anterior a través de la ley de inducción

$$\vec{B} = - \int \nabla \wedge \vec{E} dt = -\hat{z} \int \frac{\partial E}{\partial x} dt$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{d f(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{d f(w)}{dw} \frac{\partial w}{\partial x} = A_1 \frac{d f(u)}{du} + A_2 \frac{d f(w)}{dw}$$

y que en la integración $x = cte \Rightarrow du \rightarrow -cdt, dw \rightarrow cd़t$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{z} \left(A_1 e^{-u^2} - A_2 e^{-w^2} \right)$$

En el interior del conductor ideal los campos son nulos y, dado que los campos exteriores al mismo son tangenciales a su superficie,

$$\vec{n}_1 \wedge (\underbrace{\vec{E}_2 - \vec{E}_1}_{=0}) = 0 \Rightarrow (E)_{x=0} = 0$$

$$\vec{n}_1 \wedge (\underbrace{\vec{H}_2 - \vec{H}_1}_{=0}) = \vec{j}_s \Rightarrow \vec{j}_s = \frac{B}{\mu_0} \hat{y}$$

De acuerdo con la primera condición

$$A_1 e^{-c^2 t^2} + A_2 e^{-c^2 t^2} = 0 \Rightarrow A_2 = -A_1 = -A$$

La segunda condición sirve para determinar \vec{j}_s .

3-6. Demostrar el teorema de Poynting 3.17.

3-7. Deducir la ecuación de continuidad de la cantidad de movimiento 3.22, para medios lineales y no dispersivos, teniendo en cuenta que $(\nabla \cdot \vec{B}) \vec{H} = 0$.

SOLUCION :

Esta demostración puede extenderse con facilidad al caso de los medios anisótropos pero solo se desarrollará en detalle para el de los isotropos. Se parte de las ecuaciones de Poisson y de Ampère

$$\rho = \nabla \cdot \vec{D} \quad , \quad \vec{j} = \nabla \wedge \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$-\vec{f} = -(\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) = \underbrace{-\vec{E} \nabla \cdot \vec{D}}_{(a)} - (\nabla \wedge \vec{H}) \wedge \vec{B} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \wedge \vec{B}$$

Sumando el término $-\vec{H} \nabla \cdot \vec{B} = 0$, que es análogo al (a) y tiene las mismas dimensiones y escribiendo

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \vec{D} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \vec{D} \wedge (\nabla \wedge \vec{E})$$

, donde $\vec{g} \equiv \vec{D} \wedge \vec{B}$ y $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \vec{E}$, se tiene que

$$-\vec{f} = -\underbrace{\vec{E} \nabla \cdot \vec{D} + (\nabla \wedge \vec{E}) \wedge \vec{D}}_{(b)} - \underbrace{\vec{H} \nabla \cdot \vec{B} + (\nabla \wedge \vec{H}) \wedge \vec{B}}_{(c)} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}$$

Por ser los medios lineales, no dispersivos y homogéneos, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ (en el caso de los anisótropos, $\vec{D} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}$) y ϵ es una constante

$$(b) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \epsilon E_x^2 - \frac{1}{2} \epsilon E^2 & \epsilon E_x E_y & \epsilon E_x E_z \\ \epsilon E_y E_x & \epsilon E_y^2 - \frac{1}{2} \epsilon E^2 & \epsilon E_y E_z \\ \epsilon E_z E_x & \epsilon E_z E_y & \epsilon E_z^2 - \frac{1}{2} \epsilon E^2 \end{pmatrix}$$

Otro tanto puede hacerse con el sumando (b).

3-8. Sea un conductor cilíndrico recto, de sección circular, de radio a y conductividad σ , por el que circula una intensidad I uniformemente distribuida. Realizar el balance de energía en una parte finita de dicho cilindro.

SOLUCION :

Para hacer el balance de energía, se tomará una sección de longitud unidad, como se muestra en la figura 3.4. Como las magnitudes no varían con el tiempo

$$\frac{d}{dt} \rightarrow 0 \Rightarrow \int_V \sigma E^2 dV + \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = 0$$

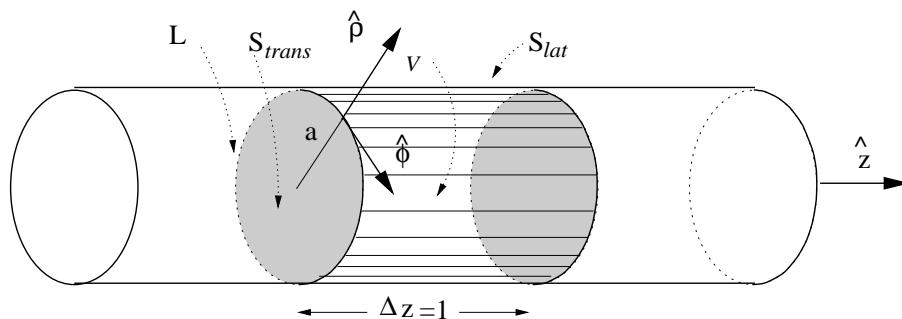


Figura 3.4:

Dado que las corrientes son estacionarias, se reparten uniformemente en el interior de los conductores y el campo eléctrico se deduce de la ley de ohm:

$$\jmath = \frac{I}{S_{trans}} = \frac{I}{\pi a^2} , \quad \vec{E} = \frac{\jmath}{\sigma} \hat{z}$$

El campo magnético en $\rho = a$, debido a la simetría axial de la densidad de corriente, puede calcularse hallando la circulación del mismo a lo largo del camino L

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi a} \hat{\phi} \Rightarrow \vec{S} = -E H \hat{\rho}$$

Luego el vector de Poynting apunta hacia el interior del volumen V y su flujo a través de las superficies transversales es nulo. Es fácil de comprobar que

$$\int_V \sigma E^2 dV = - \int_{S_{lat}} \vec{S} \cdot d\vec{s}$$

La energía disipada por efecto Joule se compensa con la que se contabiliza como flujo, desde el exterior de V , del vector de Poynting.

- 3-9. Sea una placa de metal, de superficie infinita y a potencial nulo, situada en el plano yz y una carga $+q$ en el punto $(a, 0, 0)$. Calcular la fuerza ejercida por la carga $+q$ sobre el metal utilizando el tensor eléctrico de Maxwell.
- 3-10. Calcular la presión ejercida sobre una de las placas de un condensador plano en función de la densidad de carga en las placas.
- 3-11. Considérese una superficie cerrada que encierra a una de las placas de un condensador plano y, utilizando el tensor eléctrico de Maxwell, calcular la fuerza ejercida sobre la placa.
- 3-12. Una superficie en el plano xz tiene un campo \vec{B} que forma un ángulo θ con el eje Y . Usando el tensor de Maxwell, encontrar la fuerza por unidad de área que se ejerce sobre la superficie.

- 3-13. Dos hilos conductores infinitos y paralelos están separados por una distancia $2a$. Por cada uno de ellos pasa una corriente de intensidad I en sentido contrario una de la otra. Calcular mediante el tensor magnético de Maxwell, la fuerza por unidad de longitud que se ejerce sobre cada hilo conductor.

SOLUCION :

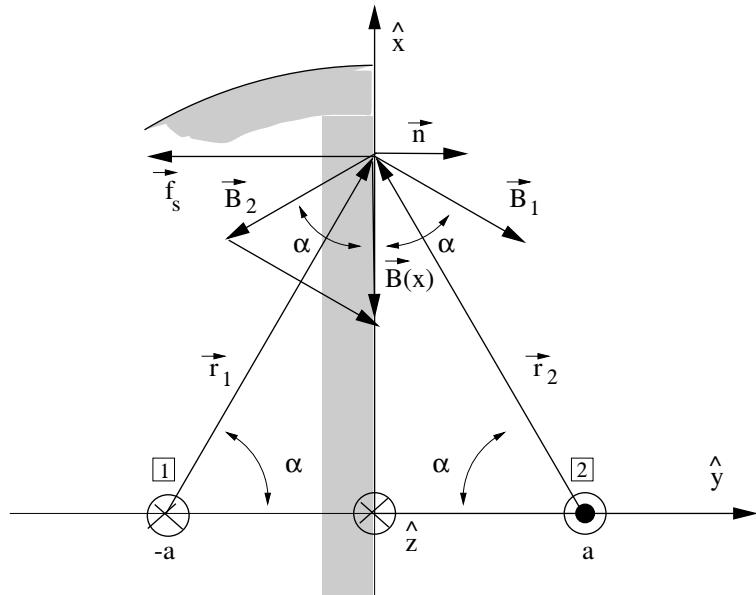


Figura 3.5:

En la figura 3.5 se representa al plano $y = 0$ y a la superficie hemicilíndrica de radio infinito que envuelven al primer conductor. Sobre éste se quiere calcular la fuerza. Por simetría,

$$\vec{B} = B(x) \hat{x} = 2 B_2(x) \cos \alpha \hat{x}$$

Hallando la circulación del campo magnético sobre una circunferencia de radio r_2 y centrada en el segundo conductor

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{x^2 + a^2}}$$

Por otra parte $\cos \alpha = \frac{a}{r_2} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, por lo que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi (x^2 + a^2)} \hat{x}$$

El campo es bisectriz entre la normal y la fuerza superficial

$$\vec{f}_s = -\omega_m \hat{y} = -\frac{\mu_0 I a^2}{2\pi^2} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} \hat{y}$$

La fuerza por unidad de longitud es

$$\frac{d\vec{f}_s}{dz} = \int_{x=-\infty}^{\infty} \vec{f}_s dx = 2 \int_{x=0}^{\infty} \vec{f}_s dx = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi a} \hat{y}$$

lo que corresponde a una fuerza de repulsión sobre el primer conductor.

Capítulo 4

Propagación de ondas

4.1. Introducción

El fenómeno de propagación de ondas, junto con el de radiación, es una de las consecuencias más interesantes de las ecuaciones de Maxwell. Este capítulo se dedica al estudio de la estructura y de las propiedades fundamentales de ondas en medios ilimitados: el vacío y medios lineales, isótropos, homogéneos y con propiedades independientes del tiempo. En los apéndices D y E se abordan otros temas, como la propagación en medios anisótropos y la propagación guiada.

4.2. Ecuaciones de onda

A continuación se muestra como el potencial y el campo electromagnético cumplen ecuaciones de onda, es decir, ecuaciones de segundo orden, tanto respecto a las coordenadas espaciales como a las temporales, entre cuyas soluciones se encuentran las estructuras de campo que se conocen como ondas. Aunque el apelativo de onda se empleará también para ciertas soluciones de dicha ecuación que no implican la propagación de energía y cantidad de movimiento (ondas no propagativas), pero que deben ser contempladas con objeto de que las soluciones generales sean completas, se entenderá normalmente que una onda es una perturbación electromagnética que se propaga a través del espacio redistribuyendo la energía y la cantidad de movimiento. En este capítulo, y en sus apéndices, solo se muestra una visión básica y parcial del tema.

Dado que la interacción electromagnética puede ser descrita indistintamente en función de los potenciales o de los campos, a continuación se presentan las ecuaciones de onda para cada una de estas magnitudes.

4.2.1. Ecuaciones de onda para los potenciales

Una de las posibles expresiones de las ecuaciones de onda para los potenciales puede obtenerse a partir de la primera versión de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell 3.1 y de la definición de

los campos en función de los potenciales. La versión macroscópica de estas definiciones se obtiene promediando la ecuación 2.45. Empleando la misma notación que en el capítulo segundo, pero para describir ahora a las magnitudes macroscópicas correspondientes,

$$\vec{E} \equiv -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (4.1a)$$

$$\vec{B} \equiv \nabla \wedge \vec{A} \quad (4.1b)$$

Los campos \vec{E} y \vec{B} pueden eliminarse de las ecuaciones anteriores hallando la divergencia de la primera ecuación y el rotacional de la segunda y haciendo uso de las ecuaciones 3.1a y 3.1d. El resultado es¹

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial \nabla \cdot \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_T}{\varepsilon_0} \quad (4.2a)$$

$$\nabla^2\vec{A} - \nabla \left[\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}_T \quad (4.2b)$$

ecuaciones en las que están mezcladas las distintas componentes del tetravector potencial. La primera no presenta las características explícitas de ecuación de onda porque en ella no figura la derivada segundaria temporal. A pesar de la forma complicada que presentan, estas ecuaciones describen al mismo fenómeno de propagación que las versiones más útiles y manejables que se proponen en lo que sigue.

Dados los grados de libertad que posee el potencial, la utilización de las diferentes condiciones de contraste conduce a diversos sistemas de ecuaciones. Si se utiliza el contraste de Coulomb se obtiene una ecuación para el potencial escalar, de tipo cuasi-estático, en la que éste se relaciona instantáneamente con las cargas fuente, mientras que es el potencial vector el que responde a una ecuación de ondas y aparece como responsable de la propagación. Es más conveniente, para el estudio de los fenómenos de propagación, el uso de la versión macroscópica del contraste de Lorenz que se deduce directamente de 2.51

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (4.3)$$

Las ecuaciones resultantes son análogas a las que se obtienen para los campos. Las 4.2 se desacoplan en dos ecuaciones de onda análogas, válidas para los potenciales de Lorenz,

¹ $\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$. No obstante, debe tenerse en cuenta que solo en coordenadas donde los vectores unitarios son constantes, como las cartesianas, es posible interpretar $(\nabla^2 \vec{A})_\alpha \rightarrow \nabla^2 A_\alpha$.

$$\square \Phi = -\frac{\rho_T}{\varepsilon_0} \quad (4.4a)$$

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_T \quad (4.4b)$$

donde

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

es el D'alembertiano. Dados ρ_T y \vec{j}_T , pueden obtenerse soluciones generales independientes de cada una de las cuatro ecuaciones escalares anteriores pero no pueden combinarse arbitrariamente entre sí ya que es necesario asegurarse que cumplen la condición 4.3.

En forma manifiestamente tensorial, las expresiones anteriores se resumen en

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_T \quad (4.5)$$

donde $j_T^i = (c\rho_T, \vec{j}_T)$. Estas ecuaciones solo son abordables cuando se conocen las cargas y corrientes totales del medio, en particular en el caso del vacío donde éstas son nulas.

4.2.2. Ecuaciones de onda para los campos

De forma análoga a la utilizada con los potenciales, eliminando a uno de los campos de las ecuaciones de Maxwell se obtienen ecuaciones de onda para los campos. Como en la sección anterior, no todas las combinaciones posibles de soluciones de estas ecuaciones son admisibles: es necesario asegurarse de que el campo electromagnético total es compatible con todas las ecuaciones de Maxwell. A continuación se considera el caso general y el de los medios lineales en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

4.2.2.1. Caso general

Como en el caso del potencial, si se quiere obtener unas ecuaciones de onda para los campos cuya validez se extienda a cualquier tipo de medio, es conveniente tomar a la primera versión 3.1 de las ecuaciones de Maxwell como punto de partida porque no se conoce la relación de \vec{D} y \vec{H} con \vec{E} y \vec{B} . Con este propósito, se halla el rotacional de la ecuación 3.1c, se desarrollan los términos de $\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E})$ y se sustituye en ellos la expresión 3.1a. Como resultado se obtiene una ecuación de onda para el campo eléctrico.

$$\square \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho_T + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_T}{\partial t} \quad (4.6)$$

No todas las soluciones de la ecuación anterior son posibles, puesto que es necesario asegurarse que

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_T}{\epsilon_0} \quad (4.7)$$

Puede encontrarse una ecuación de onda análoga a la anterior para el campo magnético, pero no es necesario porque éste queda definido mediante la integración temporal de 3.1c.

$$\vec{B} = -\nabla \wedge \int \vec{E} dt \quad (4.8)$$

Las ecuaciones 4.6, 4.7, 4.8 definen la estructura de las ondas asociadas a una distribución de cargas y corrientes ρ_T y \vec{j}_T determinada. Tampoco es necesario investigar si $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ya que esta condición se deduce directamente de la aplicación de la divergencia a la expresión anterior.

4.2.2.2. Medios lineales

Los medios que se consideran en el resto del capítulo son, además de lineales, homogéneos, isótropos e independientes del tiempo.

Medios no dispersivos :

Para el estudio de ondas en estos medios, la densidad de carga de conducción puede tomarse como nula: Si en la ecuación de continuidad 3.9 se escribe $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ y se hace uso de 3.37a, se obtiene la ecuación de relajación para la carga de conducción

$$\frac{1}{\tau} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad , \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (4.9)$$

cuya solución en el dominio del tiempo es

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

En los medios pasivos ($\sigma > 0$) la densidad de carga decrece monótonamente con el tiempo, por lo que no existe ningún mecanismo lineal capaz de crear carga neta en dicho medio. Si a través de cualquier otro mecanismo externo, irradiando, por ejemplo, se crea una densidad inicial de carga neta de conducción, a partir de un intervalo de tiempo superior a varias τ , ésta puede tomarse como nula. De acuerdo con esto, para el estudio de las ondas en este tipo de medios, se supondrá que el campo eléctrico es solenoidal

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.10)$$

Procediendo de forma análoga a la utilizada en la sección anterior, pero actuando sobre las ecuaciones 3.37, se deduce que

$$(\nabla^2 - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{E} = 0 \quad (4.11a)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.11b)$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu} \nabla \wedge \int \vec{E} dt \quad (4.11c)$$

Aplicando la transformada temporal de Fourier a las ecuaciones anteriores se obtiene una versión de las mismas en el dominio de la frecuencia. Esta es aplicable a medios dispersivos y, como caso particular, a medios que no lo son. Tomando ahora a ε , μ y σ como relaciones de dispersión y definiendo a γ como la *Constante de propagación compleja*

$$(\nabla^2 - \gamma^2) \vec{E} = 0 \quad , \quad \gamma^2 \equiv j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon \quad (4.12a)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.12b)$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \wedge \vec{E} \quad (4.12c)$$

El cálculo del campo eléctrico en el dominio de la frecuencia se reduce, por lo tanto, al problema de hallar los autovalores γ^2 del operador ∇^2 y los vectores propios correspondientes que son compatibles con las ecuaciones de Maxwell.

4.3. Solución general de la ecuación de ondas monocromáticas; Potenciales de Debye

La resolución de la ecuación de ondas en coordenadas que no sean cartesianas es considerablemente más complicada que la correspondiente en cartesianas. De acuerdo con lo apuntado en la nota a pie de página 1, la ecuación de onda homogénea 4.12a debe escribirse en la forma general, tanto para \vec{E} como para \vec{B} ,

$$\nabla [\nabla \cdot \vec{X}] - \nabla \wedge [\nabla \wedge \vec{X}] - \gamma^2 \vec{X} = 0 \quad (4.13)$$

Como puede comprobarse, por ejemplo, para el caso de las coordenadas esféricas, en cada una de las componentes de la ecuación anterior se mezclan las X_r , X_θ y X_φ , por lo que el conjunto constituye un sistema de ecuaciones acopladas de difícil solución. Una forma eficaz y significativa de

encontrar dicha solución general, que evita este tipo de inconvenientes, se basa en la utilización del *Potencial de Debye* Ψ ([Stratton]-[Panofsky y Phillips]-([Reitz et al.]-([Vanderlinde])), definido como solución de la ecuación escalar de Helmholtz

$$(\nabla^2 - \gamma^2) \Psi = 0 \quad (4.14)$$

Más adelante, este método será de utilidad para la expresión de las soluciones generales de la ecuación de onda, tanto en coordenadas esféricas como en rectangulares y cilíndricas para la propagación confinada.

Se propone construir dicha solución general de 4.13 como combinación de soluciones linealmente independientes de los tipos

$$\vec{X}_i = A \nabla \Psi \quad (4.15a)$$

$$\vec{X}_t = B \nabla \wedge (\vec{e} \Psi) \quad (4.15b)$$

$$\vec{X}_{nt} = C \nabla \wedge \vec{X}_t \quad (4.15c)$$

donde A , B y C son constantes dimensionales, elegidas de forma que las tres soluciones tengan las mismas dimensiones físicas, y \vec{e} es el vector de posición \vec{r} o un vector constante $\hat{z} = \vec{c} \hat{t} \vec{e}$. Los subíndices "i"(por irrotacional), "t"(por transversal) y "nt"(por no transversal) se relacionan con características significativas de cada una de las soluciones.

Puede verificarse que los vectores \vec{e} cumplen las siguientes relaciones:

$$\nabla \wedge \vec{e} = 0 \quad (4.16)$$

$$\nabla \cdot \vec{e} = k_1 = \begin{cases} 0 & \text{para } \vec{e} = \hat{z} \\ 3 & \text{para } \vec{e} = \vec{r} \end{cases} \quad (4.17)$$

$$(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{e} = k_2 \vec{A} = \begin{cases} \vec{0} & \text{para } \vec{e} = \hat{z} \\ \vec{A} & \text{para } \vec{e} = \vec{r} \end{cases} \quad (4.18)$$

Puede asímismo comprobarse que las \vec{X} son, en general, soluciones independientes de la ecuación vectorial de onda 4.13. A continuación se probará que son soluciones:

\vec{X}_i lo es porque $\nabla \wedge \vec{X}_i = 0$ y Ψ es solución de 4.14. Es irrotacional pero no solenoidal

$$\frac{1}{A} \nabla \cdot \vec{X}_i = \nabla^2 \Psi = \gamma^2 \Psi \neq 0$$

Por otra parte, de acuerdo con su definición y con 4.16

$$\vec{X}_t = \frac{B}{A} \vec{X}_i \wedge \vec{e} = B \nabla \Psi \wedge \vec{e} \quad (4.19)$$

Como puede verse en las expresiones anteriores, la solución \vec{X}_t es *Transversal* al vector \vec{e} y es también perpendicular a \vec{X}_i . Además es solenoidal dado que $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{X}) \equiv 0$

$$\nabla \cdot \vec{X}_t = 0 \quad (4.20)$$

Para verificar que \vec{X}_t es una solución de la ecuación 4.13, basta con sustituirlo en ella. En primer lugar

$$\frac{A}{B} \nabla \wedge \vec{X}_t = \nabla \wedge (\vec{X}_i \wedge \vec{e}) = \vec{X}_i \nabla \cdot \vec{e} - A \gamma^2 \Psi \vec{e} + (\vec{e} \cdot \nabla) \vec{X}_i - (\vec{X}_i \cdot \nabla) \vec{e}$$

Haciendo uso del desarrollo de $\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b})$ y teniendo en cuenta que tanto \vec{X}_i como \vec{e} son irrotacionales

$$(\vec{e} \cdot \nabla) \vec{X}_i = \nabla(\vec{e} \cdot \vec{X}_i) - (\vec{X}_i \cdot \nabla) \vec{e}$$

Si se halla el rotacional de $\nabla \wedge \vec{X}_t$ y se utilizan las relaciones 4.16 se comprueba que, efectivamente, \vec{X}_t es solución de la ecuación de onda.

La demostración de que \vec{X}_{nt} es solución se deja como ejercicio². De su definición se deduce que es solenoidal

$$\nabla \cdot \vec{X}_{nt} = 0 \quad (4.21)$$

Como resumen de lo anterior, puede resaltarse que para cada posible solución Ψ de la ecuación de Helmholtz se han obtenido tres clases de solución para las de onda tales que, en general,

- Son linealmente independientes entre sí; no son coplanares.
- \vec{X}_i es irrotacional pero no solenoidal.
- \vec{X}_t es solenoidal, transversal a \vec{e} y perpendicular a \vec{X}_i .
- \vec{X}_{nt} es solenoidal pero no transversal.

La solución general de la ecuación 4.13 se expresa, por consiguiente, como superposición lineal de soluciones de tipo \vec{X}_i , \vec{X}_t y \vec{X}_{nt} . La de la ecuación no homogénea puede obtenerse añadiendo a la de la homogénea una solución particular de la primera.

²Problema 4-1.

Las soluciones del tipo \vec{X}_i no son posibles en ningún caso para el campo magnético, dado que éste es incondicionalmente solenoidal; pueden existir para el campo eléctrico en aquellas regiones donde su divergencia no sea nula.

4.3.1. Potenciales de Debye para campos solenoidales; Modos TE y TM

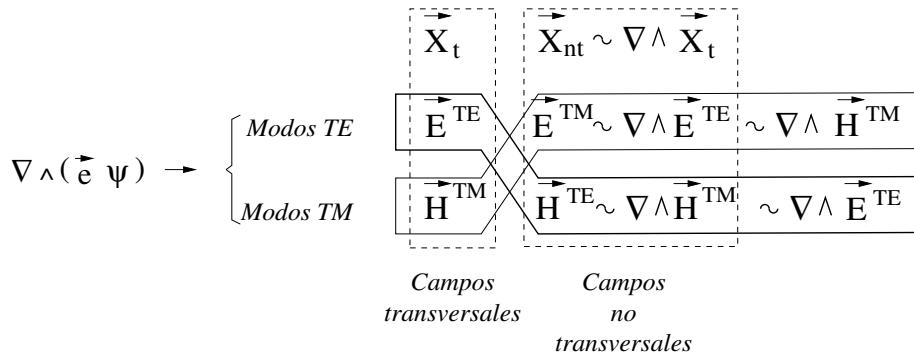


Figura 4.1: Modos TE y TM

En muchos casos de interés, incluso en el de los medios lineales no dispersivos, como se indica en la expresión 4.12b, $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, por lo que ambos campos, \vec{H} y \vec{E} , son solenoidales y la solución general puede expresarse en función de soluciones de los tipos \vec{X}_t y \vec{X}_{nt} .

Si, en estas circunstancias, se toma una solución del tipo \vec{E}_t para el campo eléctrico, el campo magnético que le corresponde, según 4.12c y 4.15c, es del tipo \vec{H}_{nt} : son los modos de tipo *Transversal eléctrico* $\{\vec{E}^{TE}, \vec{H}^{TE}\}$ (TE) (Véase la figura 4.1). Estos modos, también llamados de tipo magnético (M), pueden expresarse en función de la posible componente longitudinal, en la dirección de \vec{e} , que corresponde al campo magnético. De forma análoga, si para \vec{H} se toma una solución del tipo \vec{H}_t , la de \vec{E} es del tipo \vec{E}_{nt} ³ y el modo resultante es *Transversal magnético* (TM) $\{\vec{E}^{TM}, \vec{H}^{TM}\}$, o de tipo (E). Como caso límite, ambos campos pueden tener componentes longitudinales nulas, lo que da lugar a los modos *TEM*. Como se muestra en la figura 4.1 y se deduce de las definiciones de \vec{X}_t y \vec{X}_{nt} , a partir de un potencial de Debye Ψ_{lm} determinado se obtienen campos E^{TE} y H^{TM} proporcionales a $\nabla \wedge (\vec{e} \Psi_{lm})$ que, por lo tanto, tienen la misma estructura, lo que también ocurre con E^{TM} y H^{TE} .

Las funciones $\vec{e} \cdot \vec{X}_{nt}$ (X_{ntz} cuando $\vec{e} = \hat{z}$ y $r X_{ntr}$ cuando $\vec{e} = \vec{r}$) pueden ser identificadas con los potenciales de Debye de los modos TE y TM . Como las soluciones \vec{X}_t son transversales, solo las de tipo \vec{X}_{nt} pueden tener dicha componente longitudinal y, dado que $\nabla \cdot \vec{X}_{nt} = 0$, no es difícil comprobar que $\vec{e} \cdot \vec{X}_{nt}$ es solución de la ecuación de Helmholtz⁴

$$(\nabla^2 - \gamma^2)(\vec{e} \cdot \vec{X}_{nt}) = 0 \quad (4.22)$$

con lo que $\Psi \rightarrow \vec{e} \cdot \vec{X}_{nt}$.

³ $\vec{E} = \frac{1}{\sigma + j\omega\epsilon} \nabla \wedge \vec{H}$.

⁴Problema 4-2

\vec{X}_t puede obtenerse haciendo uso de la expresión 4.19 y \vec{X}_{nt} mediante la 4.15c, pero, en las secciones 4.4.4 y E.1.2, se verá cómo aplicar estos resultados específicamente al estudio de las ondas esféricas y al de las guiadas.

4.4. Ondas en el vacío

A continuación se estudian las estructuras y las propiedades fundamentales de las soluciones de las ecuaciones de onda para los campos en el vacío, entendiendo por tal al espacio desprovisto de cargas y corrientes. Las perturbaciones que se propagan por éste medio son *Ondas automantenidas* puesto que sus únicas fuentes son las derivadas temporales del propio campo:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.23a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.23b)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.23c)$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.23d)$$

Las ecuaciones de onda pueden obtenerse directamente de las anteriores, tomando $\rho_T = 0$ y $\vec{j}_T = 0$ en 4.6 o haciendo $\varepsilon = \varepsilon_0$ y $\mu = \mu_0$ y $\sigma = 0$ en 4.12:

$$\boxed{\nabla^2} \vec{E} = 0 \quad (4.24a)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.24b)$$

$$\vec{B} = -\nabla \wedge \int \vec{E} dt \quad (4.24c)$$

4.4.1. Ondas planas homogéneas

Las *Ondas planas homogéneas* son soluciones de la ecuación de onda unidimensional en coordenadas cartesianas⁵ y se caracterizan por un campo cuya amplitud depende exclusivamente del

⁵La calificación de "homogéneas" distingue a estas ondas de las planas no homogéneas que se definirán más adelante en el dominio de la frecuencia.

tiempo y de la distancia ξ entre un plano determinado, el *Frente de onda*, y un origen arbitrario O . Según se muestra en la figura 4.2, ξ es la proyección de \vec{r} , el vector de posición de un punto del plano, sobre la dirección normal al frente de onda. Esta se indica mediante el vector unitario

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \quad , \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (4.25)$$

, o *Vector unitario de onda*, que , además, determina la dirección de propagación de la onda.

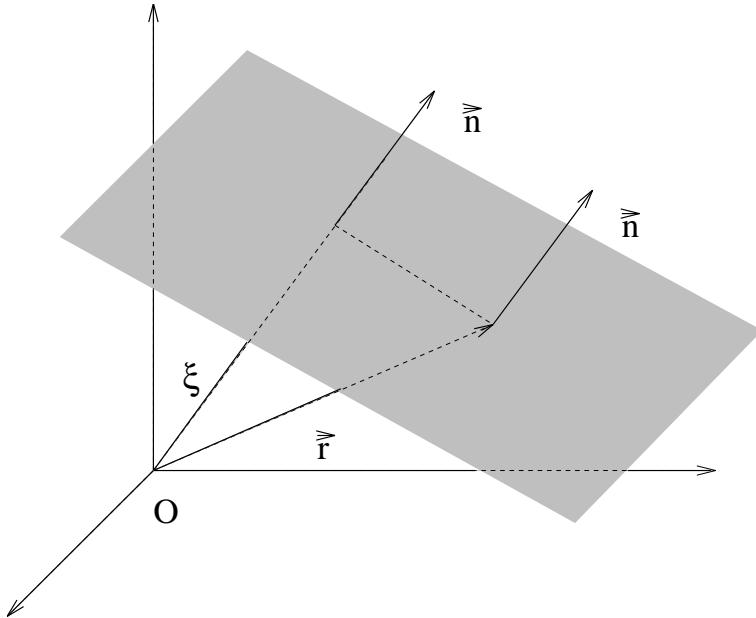


Figura 4.2: Ondas planas homogéneas

$$\xi = \vec{r} \cdot \vec{n} = x n_x + y n_y + z n_z \quad (4.26)$$

La definición anterior incluye a campos constantes y uniformes que no juegan ningún papel en el transporte de energía y que no serán tenidos en cuenta. Dado que las soluciones buscadas dependen espacialmente de la variable ξ , el operador ∇ puede ser substituido por la derivada direccional

$$\nabla \rightarrow \vec{n} \frac{\partial}{\partial \xi} \Rightarrow \nabla^2 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (4.27)$$

y la ecuación de onda 4.24a toma la forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0 \quad (4.28)$$

La solución general de estas ecuaciones puede obtenerse de diversas formas⁶. Aquí se utilizará con este fin a la transformada espacial de Fourier

⁶Problema 4-3.

$$f(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi} f(\xi, t) e^{jk\xi} d\xi \quad (4.29a)$$

$$f(\xi, t) = \int_k f(\vec{k}, t) e^{-jk\xi} dk \quad (4.29b)$$

cuya aplicación a la ecuación 4.28 la reduce a una ecuación diferencial ordinaria con respecto a la variable temporal. Efectivamente, véase III.22,

$$\nabla \rightarrow -j\vec{k} = -j k \vec{n} \quad , , \quad \nabla^2 \rightarrow -k^2 \quad , , \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = k\xi \quad (4.30)$$

de lo que se deduce que

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(k, t)}{\partial t^2} = -c^2 k^2 \vec{E}(k, t)$$

La solución general de esta ecuación, por ser de segundo orden, se expresa en función de dos constantes arbitrarias (en éste caso, dos funciones arbitrarias de \vec{k}) que pueden escribirse como $\vec{f}(\vec{k})$ y $\vec{g}(\vec{k})$:

$$\vec{E}(k, t) = \vec{f}(k) e^{jkct} + \vec{g}(k) e^{-jkct}$$

Para obtener la solución en el dominio espacio-temporal, se aplica a la expresión anterior la transformación inversa 4.29b:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\xi, t) &= \int_k \vec{E}(k, t) e^{-jk\xi} dk = \int_k \vec{f}(k) e^{-jk(\xi-ct)} dk + \int_k \vec{g}(k) e^{-jk(\xi+ct)} dk \\ &= \int_k \vec{f}(k) e^{-jk u} dk + \int_k \vec{g}(k) e^{-jk w} dk \end{aligned}$$

donde

$$u \equiv \xi - ct = \vec{r} \cdot \vec{n} - ct \quad , , \quad w \equiv \xi + ct = \vec{r} \cdot \vec{n} + ct \quad (4.31)$$

o, realizando las integrales,

$$\vec{E}(\xi, t) = \vec{E}_+(u) + \vec{E}_-(w) \quad , , \quad \vec{E}_+(u) = \vec{f}(u), \quad \vec{E}_-(w) = \vec{g}(w) \quad (4.32)$$

Esta solución general, para una dirección determinada \vec{n} , se expresa como la suma de dos funciones arbitrarias que se propagan en el sentido positivo, ($\vec{f}(u)$), y negativo, ($\vec{g}(w)$), de la coordenada ξ . En la figura 4.3 se representan las amplitudes de estos dos modos en un instante determinado.

De forma análoga a la utilizada en III.17⁷, se define a u y a w como fases respectivas de cada una de estos sumandos. De acuerdo con III.18, sus velocidades de fase son

$$v_{f\pm} = \left(\frac{d\xi}{dt} \right)_{u,w=cte} = \pm c$$

lo que implica que una onda plana homogénea en el vacío se propaga sin deformación con la velocidad de la luz c . Se dirá que el vacío es un medio no dispersivo, puesto que todas sus componentes espectrales se propagan con la misma velocidad.

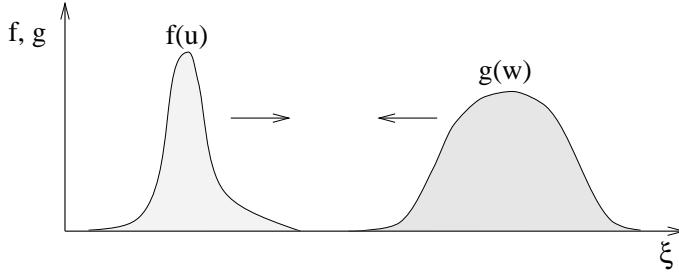


Figura 4.3: Ondas que viajan en sentidos contrarios

Pero, como se ha puesto de manifiesto anteriormente, no todas estas soluciones son válidas; la ecuación de la divergencia impondrá restricciones a la orientación vectorial del campo eléctrico. Para establecer estas restricciones, téngase en cuenta que los campos $\vec{f}(u)$ ($\vec{g}(w)$) dependen de ξ y de t a través de u (w). Derivando como función de función

$$\frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial t} = \frac{d \vec{f}(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{d \vec{f}(u)}{du} \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial x} = \frac{d \vec{f}(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = n_x \frac{d \vec{f}(u)}{du}$$

por lo que

$$\frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial t} = -c \frac{d \vec{f}(u)}{du} \quad , \quad \frac{\partial \vec{g}(w)}{\partial t} = c \frac{d \vec{g}(w)}{dw} \quad (4.34a)$$

$$\int \vec{f}(u) dt = -\frac{1}{c} \int \vec{f}(u) du \quad , \quad \int \vec{g}(w) dt = \frac{1}{c} \int \vec{g}(w) dw \quad (4.34b)$$

$$\nabla * \vec{f}(u) = \vec{n} * \frac{d \vec{f}(u)}{du} \quad , \quad \nabla * \vec{g}(w) = \vec{n} * \frac{d \vec{g}(w)}{dw} \quad (4.34c)$$

⁷Sin embargo, esta fase se define con dimensión de longitud mientras que la de la definición de partida es adimensional. En el caso general de ondas planas en medios dispersivos, el término fase carece de una definición simple.

donde el asterisco indica la aplicación de ∇ como divergencia o rotacional.

Puesto que el campo 4.32 tiene divergencia nula, teniendo en cuenta 4.34c y que tanto f como g son soluciones independientes, resulta que

$$\vec{n} \cdot \frac{d\vec{E}_+(u)}{du} = 0 \quad , , \quad \vec{n} \cdot \frac{d\vec{E}_-(w)}{dw} = 0$$

Esta ecuación puede ser integrada. De acuerdo con lo comentado anteriormente, se ignoran las constantes de integración (son independientes de ξ y de t), con lo que

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_+(u) = 0 \quad , , \quad \vec{n} \cdot \vec{E}_-(w) = 0 \quad (4.35)$$

Esto indica que solo los campos eléctricos perpendiculares a la dirección de propagación \vec{n} pueden formar parte de una onda plana homogénea.

En cuanto al campo magnético, introduciendo 4.32 en la ecuación 4.24c y teniendo en cuenta a 4.34b y 4.34c,

$$\vec{B}_+(u) = \frac{1}{c} \vec{n} + \wedge \vec{E}_+(u) \quad , , \quad \vec{B}_-(w) = -\frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E}_-(w) \quad (4.36)$$

donde $\vec{n}_+ \equiv \vec{n}$ y $\vec{n}_- \equiv -\vec{n}$ indican las direcciones y sentidos respectivos de la propagación de cada una de las ondas.

Las ecuaciones 4.35 y 4.36 constituyen la *Relación de estructura de las ondas planas y homogéneas* (véase la figura 4.4). Estas son de tipo TEM, u ondas "Transversales Electro-Magnéticas", con respecto a la dirección \vec{n} ; \vec{E} , \vec{B} y \vec{n} forman un triángulo rectángulo a derechas.

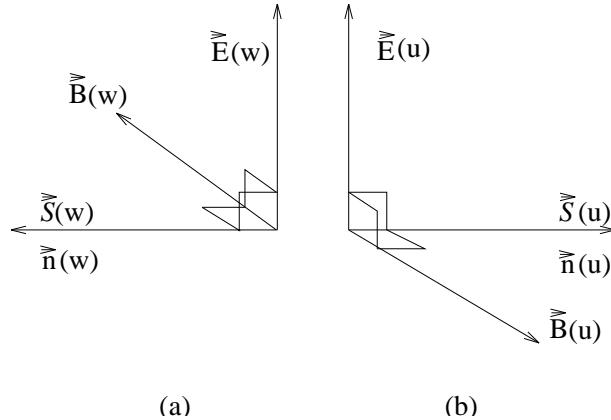


Figura 4.4: Relación de estructura de las ondas TEM

Para cada dirección \vec{n} existen dos *Modos de propagación*, el que viaja en sentido positivo y el que lo hace en sentido negativo.

La solución general del problema planteado puede expresarse como una combinación lineal de ondas que se propagan en tres direcciones independientes \vec{n}_1 , \vec{n}_2 y \vec{n}_3 .

Para una onda que se propague en la dirección y sentido \vec{n} , la relación de estructura puede resumirse en

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.37a)$$

$$\vec{n} \wedge \vec{E} = c \vec{B} \quad , , \quad E = c B \quad (4.37b)$$

Como refleja la ecuación 4.37b, la forma del campo eléctrico de un modo simple es la misma que la del campo magnético, es decir, sus amplitudes vienen descritas por la misma función de ξ y de t . Esto no es cierto si se mezclan modos ni tampoco lo será, en general, en el seno de medios dispersivos.

La energía almacenada y la transportada por la onda vienen descritas por la densidad de energía ω_{em0} y el vector de Poynting \vec{S}_0 . De las relaciones de estructura se deduce que la densidad de energía se reparte por igual entre las contribuciones eléctrica y magnética y que, en este caso, \vec{S}_0 puede interpretarse localmente como densidad de corriente de energía. c es, por consiguiente, la velocidad de fase, la de grupo (aquella con que se propaga la forma global de la onda) y la de propagación de la energía.

$$\omega_{em0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2 = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2 \quad , , \quad \omega_{e0} = \omega_{m0} = \frac{1}{2} \omega_{em0} \quad (4.38a)$$

$$\vec{S}_0 \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = c \omega_{em0} \vec{n} \quad (4.38b)$$

4.4.1.1. Propiedades relativistas

Interesa ahora establecer las leyes de transformación relativista de las magnitudes fundamentales que describen a las ondas planas homogéneas. Estas son las amplitudes E y B de los campos, que se designarán indistintamente por A porque, al estar ambas magnitudes relacionadas por el escalar c , se transforman según la misma regla, la densidad de energía electromagnética ω_{em0} , la dirección de propagación \vec{n} y la fase u .

Dado que la densidad de energía es la componente T_c^{00} del tensor energía-momento del campo, es fácil de comprobar que, dada la relación de estructura de estas ondas, su ley de transformación es⁸

⁸Problema 2-33.

$$\omega'_{em0} = \omega_{em0} \gamma^2 (1 - \beta n_x)^2 \quad (4.39)$$

y que la densidad 4.38a es proporcional al cuadrado de las amplitudes a través de escalares. Luego $A \sim \sqrt{\omega_{em0}}$ y

$$A' = A \gamma (1 - \beta n_x) \quad (4.40)$$

Las leyes de transformación de la dirección de propagación se deducen de la ley de composición de velocidades 1.40 tomando $\vec{v} = \vec{c} = c \vec{n}$ y $\vec{v}' = \vec{c}' = c \vec{n}'$ ⁹

$$\vec{n}' = \frac{\left(n_x - \beta, \frac{n_y}{\gamma}, \frac{n_z}{\gamma} \right)}{1 - \beta n_x} \quad (4.41)$$

La ley de transformación de la fase se obtiene introduciendo 4.41 y la transformación de Lorentz en $u' = \vec{r}' \cdot \vec{n}' - ct'$

$$u' = \frac{u}{\gamma (1 - \beta n_x)} \quad (4.42)$$

4.4.2. Ondas monocromáticas

Transformando temporalmente por Fourier a las ecuaciones 4.24, se obtiene

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) \vec{E} = 0 \quad (4.43a)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.43b)$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{j\omega} \nabla \wedge \vec{E} \quad (4.43c)$$

que son las *Ecuaciones de las ondas monocromáticas en el vacío*. En principio, \vec{E} y \vec{B} representan a las densidades espectrales, $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ y $\vec{B}(\vec{r}, \omega)$, correspondientes a ondas cuyas amplitudes temporales, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y $\vec{B}(\vec{r}, t)$, se supone transformables. Pero \vec{E} y \vec{B} pueden representar también a una onda monocromática¹⁰

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \quad (4.44)$$

⁹Véase el problema 1-21.

¹⁰ ω es la frecuencia angular (rad.s^{-1}), $f = \frac{\omega}{2\pi}$ la frecuencia (Hz) y $T = \frac{2\pi}{\omega}$ el periodo (s).

o a su amplitud independiente del tiempo $\vec{E}(\vec{r})$, como puede comprobarse por separación de la variable temporal en 4.24 o por sustitución de 4.44 en la misma¹¹. En cualquier caso, estas ecuaciones son complejas por lo que debe considerarse que sus soluciones y, en particular $\vec{E}(\vec{r})$, son vectores complejos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_r(\vec{r}) + j \vec{E}_i(\vec{r}) \quad (4.45a)$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{r})] \quad , \quad \vec{E}_i(\vec{r}) = \text{Im}[\vec{E}(\vec{r})] \quad (4.45b)$$

$$E_\alpha(\vec{r}) = E_{r\alpha}(\vec{r}) + j E_{i\alpha}(\vec{r}) = |E_\alpha(\vec{r})| e^{j\psi_\alpha(\vec{r})} \quad (4.45c)$$

con parte real \vec{E}_r e imaginaria \vec{E}_i (su componente α es compleja con parte real $E_{r\alpha}$, imaginaria $E_{i\alpha}$, módulo $|E_\alpha|$ y fase ψ_α).

Si las fases $\psi_\alpha(\vec{r}_0)$ de las componentes, en un punto determinado \vec{r}_0 , difieren entre sí en un múltiplo entero de π , $e^{j\psi_x(\vec{r}_0)} = \pm e^{j\psi_y(\vec{r}_0)} = \pm e^{j\psi_z(\vec{r}_0)}$, con lo que

$$\vec{E}(\vec{r}_0, t) = (|E_x(\vec{r}_0)| \hat{x} \pm |E_y(\vec{r}_0)| \hat{y} \pm |E_z(\vec{r}_0)| \hat{z}) e^{j(\omega t + \psi_x(\vec{r}_0))} = |\vec{E}(\vec{r}_0)| \hat{E}(\vec{r}_0) e^{j(\omega t + \psi_x(\vec{r}_0))} \quad (4.46)$$

y el campo eléctrico oscila en \vec{r}_0 según la dirección de polarización definida por el vector unitario

$$\hat{E}(\vec{r}_0) = \frac{|E_x(\vec{r}_0)| \hat{x} \pm |E_y(\vec{r}_0)| \hat{y} \pm |E_z(\vec{r}_0)| \hat{z}}{\sqrt{|E_x(\vec{r}_0)|^2 + |E_y(\vec{r}_0)|^2 + |E_z(\vec{r}_0)|^2}} \quad (4.47)$$

En este caso se dice que la onda está linealmente polarizada¹² en dicho punto.

Resumiendo, las soluciones de 4.43 pueden interpretarse, según el caso, como densidades especiales o como amplitudes complejas de una onda monocromática. En el primer caso, la solución real en el dominio del tiempo se obtiene mediante la transformada inversa de Fourier y, en el segundo, la onda monocromática real resulta de multiplicar la solución por el factor $e^{j\omega t}$ y quedarse con la parte real, de forma análoga a la utilizada en la teoría de circuitos ordinaria.

De acuerdo con el tipo de coordenadas en que se resuelvan las ecuaciones 4.43a, se obtendrán las ondas monocromáticas planas, esféricas, cilíndricas, etc.

4.4.3. Ondas monocromáticas planas

Las ecuaciones de las ondas monocromáticas, planas y homogéneas, en el vacío, se obtienen transformando espacialmente a las ecuaciones para ondas monocromáticas 4.43 o, lo que es lo mismo, transformando espacial y temporalmente a las correspondientes en el dominio del tiempo

¹¹Puede incluirse a las ondas monocromáticas entre las transformables por Fourier asignándoles la densidad espectral singular III.13.

¹²Más adelante se analizará el caso de la polarización de ondas monocromáticas y planas.

4.24¹³. En este caso, para ondas que viajan en la dirección $+\vec{n}$, los operadores se substituyen por los términos algebraicos¹⁴

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega, \quad \nabla \rightarrow -j k \vec{n}, \quad \nabla^2 \rightarrow -k^2 \quad (4.48)$$

El resultado de estas transformaciones es el conjunto de ecuaciones algebraicas

$$(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) \vec{E} = 0 \quad (4.49a)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.49b)$$

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{n} \wedge \vec{E} \quad (4.49c)$$

donde, de acuerdo con III.16b y análogamente a lo expuesto en la sección anterior, \vec{E} puede interpretarse como una densidad espectral, función de (\vec{k}, ω) , o como una onda monocromática y plana

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{j(wt - k \vec{n} \cdot \vec{r})} = \vec{E}_0 e^{j\varphi} \\ \varphi &= wt - k \vec{n} \cdot \vec{r} = \omega t - k \xi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\xi}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

\vec{E}_0 , la amplitud compleja de la onda monocromática y plana, es un vector complejo independiente de \vec{r} y de t y $|\vec{E}_0|$ es su módulo, o, simplemente, su amplitud.

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{0r} + j \vec{E}_{0i} \quad (4.51)$$

$$|\vec{E}_0| = \sqrt{\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*} \quad (4.52)$$

$k = 2\pi/\lambda$ es el *Número de onda*, λ la *Longitud de onda* y T el periodo. Dividiendo las ecuaciones 4.49 por $e^{j\varphi}$ se comprueba que \vec{E}_0 es también solución de dichas ecuaciones.

4.49a implica que solo existen soluciones no triviales, distintas de $\vec{E} = 0$, si se cumple la *Relación de dispersión de las ondas monocromáticas en el vacío*¹⁵

¹³Véanse 4.29, III.16a e III.22.

¹⁴Mientras no se indique lo contrario, se tomará k como real y positivo, lo cual corresponde a las ondas que se propagan en el sentido $+\vec{n}$.

¹⁵Esta definición de la relación de dispersión de las ondas” no coincide con la que se dió para la relación de dispersión del medio.^{en} el capítulo anterior, pero ambas son de uso corriente. Son funciones de la frecuencia asociadas al fenómeno dispersive.

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (4.53)$$

donde se ha tomado para k el valor positivo.

La velocidad de fase es

$$v_f = \left(\frac{d\xi}{dt} \right)_{\varphi=cte} = \frac{\omega}{k} = c \quad (4.54)$$

es independiente de la frecuencia, por lo que el vacío es un medio no dispersivo.

El carácter solenoidal del campo eléctrico se traduce en su ortogonalidad con la dirección de propagación (4.49b). No es necesario tener en cuenta a la ecuación de Ampère 4.23d puesto que en este caso equivale a 4.49b y 4.49c, como es fácilmente verificable. Estas ecuaciones definen la estructura general de las ondas monocromáticas planas¹⁶, la cual, como es lógico, coincide con la de las ondas planas homogéneas y no monocromáticas.

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (4.55a)$$

$$\vec{n} \wedge \vec{E}_0 = c \vec{B}_0 \quad , , \quad E_0 = c B_0 \quad (4.55b)$$

Las expresiones 4.38, para el vector de Poynting y la densidad de energía, son aplicables a este caso si se toman para \vec{E} y \vec{B} sus valores reales. A menudo, especialmente para frecuencias del orden o superiores al gigaciclo, solo interesan los valores medios de dichas magnitudes. En este caso, como en C.89, se definen los términos complejos correspondientes¹⁷. De acuerdo con III.26

$$\langle \omega_{em0} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\omega_{em0}^c] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\varepsilon_0 |\vec{E}|^2] = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\vec{E}_0|^2 \quad (4.56a)$$

$$\langle \vec{S}_0 \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{S}_0^c] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}^*\right] = c \langle \omega_{em0} \rangle \vec{n} \quad (4.56b)$$

donde $\langle \rangle$ indica el valor medio temporal sobre un periodo.

¹⁶Este tipo de ondas suele clasificarse como TEM. En este caso $\nabla \rightarrow -jk \vec{n}$ y, haciendo $\vec{e} = \vec{r}$, de acuerdo con lo tratado en la sección 4.3,

$$\vec{X}_i = -jk A \Psi \vec{n} \quad , , \quad \vec{X}_t = -jk B \Psi \vec{n} \wedge \vec{r} \quad , , \quad \vec{X}_{nt} = -C k^2 \Psi \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{r})$$

Los tres tipos de solución resultan mútuamente ortogonales. La primera solución es longitudinal y, como ya se ha comentado, solo es factible para el campo eléctrico; de éste tipo son las *Ondas electrostáticas* que se dan en los plasmas y para las cuales el campo magnético asociado es nulo. En los medios en los que el campo eléctrico es solenoideal, solo son posibles las soluciones del segundo y tercer tipo. Ambas son transversales a la dirección de propagación \vec{n} aunque solo la primera lo es también a \vec{r} . A estos modos se les define como tipo *Transversal electromagnético* (TEM), a pesar de que el vector que ahora define la transversalidad es \vec{n} y no \vec{r} .

¹⁷En el vacío son reales.

4.4.3.1. Polarización de las ondas planas momocromáticas

Se define como *Dirección de polarización* de la onda a la dirección de \vec{E} y como *Plano de polarización* al que contiene a dicho campo y a la dirección de propagación \vec{n} . La dirección y el plano de polarización del campo puede variar con el tiempo, en un punto determinado, y a lo largo de la distancia de propagación, en un instante determinado. Para caracterizar la polarización de una onda se referirá el campo a un sistema de tres vectores unitarios, $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ que forman un triángulo rectángulo a derechas y definen a los *Ejes de polarización*¹⁸.

El campo eléctrico de una onda que se propaga en el sentido $+\vec{n}$ es, de acuerdo con 4.50,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\varphi} \quad (4.57)$$

Para buscar el triángulo mencionado, considérese al número complejo $\mathcal{C} = \vec{E}_0^2$, el cual puede escribirse, según 4.51, de la forma

$$\mathcal{C} = \vec{E}_0^2 = \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 = |\mathcal{C}| e^{2j\alpha} \quad (4.58)$$

donde $|\mathcal{C}| = \sqrt{\mathcal{C}\mathcal{C}^*}$ es su módulo y $2\alpha = \operatorname{arctg}(Im[\mathcal{C}]/Re[\mathcal{C}])$ su fase. Si ahora se define

$$\vec{e} \equiv \vec{E}_0 e^{-j\alpha} \quad (4.59)$$

donde \vec{e} es un vector complejo cuyas partes real e imaginaria son \vec{e}_r y \vec{e}_i

$$\vec{e} = \vec{e}_r + j\vec{e}_i \quad (4.60)$$

y se sustituye 4.59 en 4.58, se tiene que

$$\vec{e}^2 = |\mathcal{C}| = \text{real}$$

Luego, de acuerdo con 4.60

$$\vec{e}^2 = \vec{e} \cdot \vec{e} = \vec{e}_r^2 - \vec{e}_i^2 + 2j\vec{e}_i \cdot \vec{e}_r \Rightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_r = 0$$

Los vectores reales \vec{e}_r y \vec{e}_i son perpendiculares entre sí y, por ser la onda transversal, también lo son a la dirección de propagación \vec{n} . Estos tres vectores forman, por lo tanto, un triángulo rectángulo.

El campo eléctrico complejo viene dado, según 4.57 y 4.59, por

$$\vec{E} = \vec{e} e^{j(\varphi+\alpha)} \quad (4.61)$$

¹⁸Problema 4-8.

y el real, según 4.60, por¹⁹

$$\vec{E} = \operatorname{Re}[\vec{E}] = \operatorname{Re} \left[\vec{e}_r e^{j(\varphi+\alpha)} + \vec{e}_i e^{j(\varphi+\alpha+\pi/2)} \right] \quad (4.62)$$

donde se ha escrito $j = e^{j\pi/2}$.

Para representar al campo en función del tiempo, en el frente de onda $\xi = \xi_0$, se escribe

$$\varphi + \alpha = \omega t + \delta \quad , \quad \delta = \alpha - k\xi_0$$

y se toma un sistema de vectores unitarios de referencia (\hat{e}_α) que formen un triángulo rectángulo a derechas

$$\vec{e}_r = e_r \hat{e}_1 \quad , \quad \vec{e}_i = \pm e_i \hat{e}_2 \quad , \quad \vec{n} = \hat{e}_3$$

Para asegurar que estos vectores unitarios formen un triángulo rectángulo a derechas, se elige el signo + si $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_i = +\hat{z}$ y el - si $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_i = -\hat{z}$. Se verá a continuación que en el primer caso las ondas están polarizadas a izquierdas y en el segundo a derechas.

Efectivamente, teniendo en cuenta que $-1 = e^{-j\pi}$, las componentes del campo con respecto a esta base son

$$\begin{aligned} \vec{E}(\xi_0, t) &= \operatorname{Re} \left[\hat{e}_1 e_r e^{j(\omega t + \delta)} \pm \hat{e}_2 e_i e^{j(\omega t + \delta + \pi/2)} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[\hat{e}_1 e_r e^{j(\omega t + \delta)} + \hat{e}_2 e_i e^{j(\omega t + \delta \pm \pi/2)} \right] \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\vec{E} = E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2 \quad (4.64)$$

Si se normalizan las componentes del campo, de la forma

$$X_1 = \frac{E_1}{e_r} = \cos(\omega t + \delta) \quad (4.65a)$$

$$X_2 = \frac{E_2}{e_i} = \cos(\omega t + \delta \pm \pi/2) = \mp \sin(\omega t + \delta) \quad (4.65b)$$

y se elimina el ángulo en estas ecuaciones paramétricas, se comprueba que el vector $\vec{X} = (X_1, X_2)$ describe, en general, una circunferencia en el plano ξ_0 y el campo una elipse cuyos semiejes son $e_r \hat{e}_1$ y $e_i \hat{e}_2$ (véase la figura 4.5).

¹⁹Se empleará la misma notación para los vectores reales y complejos, por lo que la igualdad $\vec{E} = \operatorname{Re}[\vec{E}]$ no es una errata.

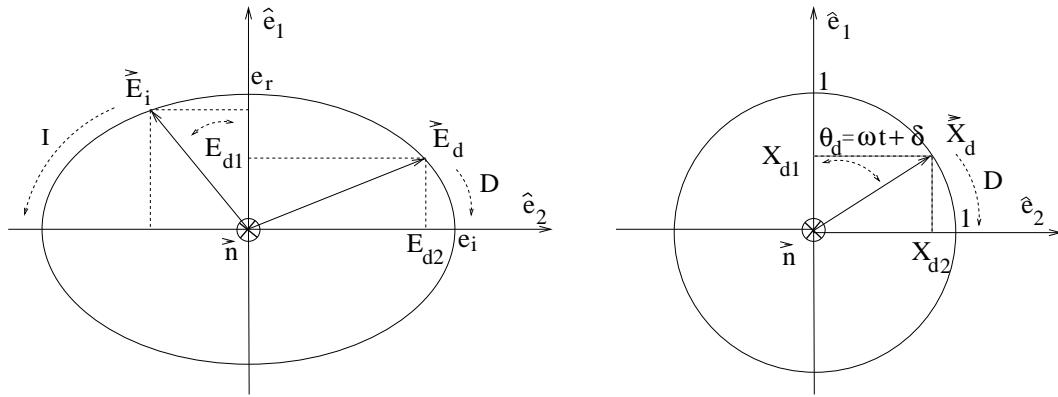


Figura 4.5: Polarización

La onda tendrá *Polarización elíptica* si $e_r \neq e_i$, *Polarización circular* si $e_r = e_i$ y *Polarización lineal* si $e_r = 0$ ó $e_i = 0$.

En cuanto al sentido de giro del campo, el ángulo que \vec{X} forma con el eje \hat{e}_1 es, de acuerdo con la figura y con 4.65,

$$\theta = \arctg \left[\frac{X_2}{X_1} \right] = \mp(\omega t + \delta) \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \mp\omega \quad (4.66)$$

El campo eléctrico, y el magnético, giran a derechas alrededor de la dirección de propagación \vec{n} , *Polarización a derechas*, si $\frac{d\theta}{dt} = +\omega$, lo que corresponde a un signo $(-)$ en el $\cos(\omega t + \delta \pm \pi/2)$ de la expresión 4.65b (la componente X_1 está adelantada en $\pi/2$ con respecto a la componente X_2) y a $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_i = -\vec{z}$. En caso contrario, el campo gira a izquierdas y la onda posee una (*Polarización a izquierdas*).

Por último, es importante comprobar que una onda con polarización arbitraria, ecuación 4.64, puede ser descompuesta en la suma de dos ondas lineal o circularmente polarizadas, lo que permite expresar a las soluciones generales en función cualesquiera de estos tipos de solución²⁰.

4.4.3.2. Propiedades relativistas

Las ondas planas monocromáticas participan de las propiedades relativistas de las ondas planas, pero es necesario investigar las propiedades de transformación de nuevos parámetros como la frecuencia ω y el número de onda k . Ambos, junto con la dirección de propagación, cuyas leyes de transformación han sido establecidas para las ondas planas en general, serán incluidos en un tetravector. Asimismo, se estudiarán las leyes de transformación de la energía y la cantidad de movimiento de un paquete de ondas, como símil clásico del fotón.

²⁰Problema 4-10.

Tetravector de onda :

Se pueden tomar diversos caminos para encontrar las leyes de transformación de ω y de k y para demostrar que la fase φ es un escalar²¹. Aquí se hará de la siguiente forma:

Las componentes de las ondas planas monocromáticas tienen la forma genérica de la expresión 4.50

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 e^{j\varphi(\vec{r}, t)}$$

En particular, puesto que el tetravector del potencial de Lorenz cumple la condición tensorial de contraste

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}_0 e^{j\varphi(\vec{r}, t)}) = 0$$

y la amplitud \vec{A}_0 es una constante, se cumple que

$$\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t) \cdot \vec{A} = 0$$

Dado que \vec{A} es un tetravector,

$$\vec{k} \equiv \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t) \Rightarrow k^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) = k(1, \vec{n}) \quad (4.67)$$

también lo es; se denomina *Tetravector de onda*. De aquí se deduce que ω y $k = \omega/c$ se transforman según

$$\omega' = \omega \gamma(1 - \beta n_x) \quad (4.68)$$

que es la misma ley 4.40 que se obtuvo para la amplitud de la onda. Por lo tanto

$$\frac{\omega'}{k'} = \frac{\omega}{k} = \text{escalar} \quad , \quad \frac{\omega'}{A'} = \frac{\omega}{A} = \text{escalar} \quad (4.69)$$

Por otra parte, es fácil de comprobar que

$$\varphi = \vec{k} \cdot \vec{s} \quad (4.70)$$

lo que asegura que φ es un escalar que no es invariante frente a las traslaciones de origen entre sistemas de referencia, puesto que \vec{s} tampoco lo es.

²¹Véanse los problemas 1-12 y 2-17 .

Efecto Doppler :

La expresión 4.68 es la versión relativista del efecto Doppler clásico, el cual describe la diferencia en los tonos (frecuencias) percibidos por un observador según el foco emisor se acerque (aumenta la frecuencia) o se aleje del mismo (disminuye la frecuencia). Supóngase que un emisor, viajando a velocidad uniforme β con respecto al observador, radia ondas planas monocromáticas cuya frecuencia, medida en el sistema del emisor S' , es ω_0 . El observador, situado en S , percibe una onda de frecuencia ω procedente de una dirección \vec{n} . Sustituyendo los datos anteriores en 4.68, se obtiene

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta n_x)} \quad (4.71)$$

que relaciona a la frecuencia observada con la frecuencia emitida y con parámetros medibles por el propio observador.

Este efecto Doppler incluye, como es lógico, al clásico, que es longitudinal, pero también contiene una contribución transversal. Como se muestra en la figura 4.6, $n_x > 0$ cuando la fuente emisora se acerca y $n_x < 0$ cuando ésta se aleja. El efecto longitudinal es máximo cuando la incidencia de la onda es frontal: $\vec{n} = (n_x = \pm 1, 0, 0)$, donde el signo (+) corresponde a un foco que se acerca y el (-) a otro que se aleja.

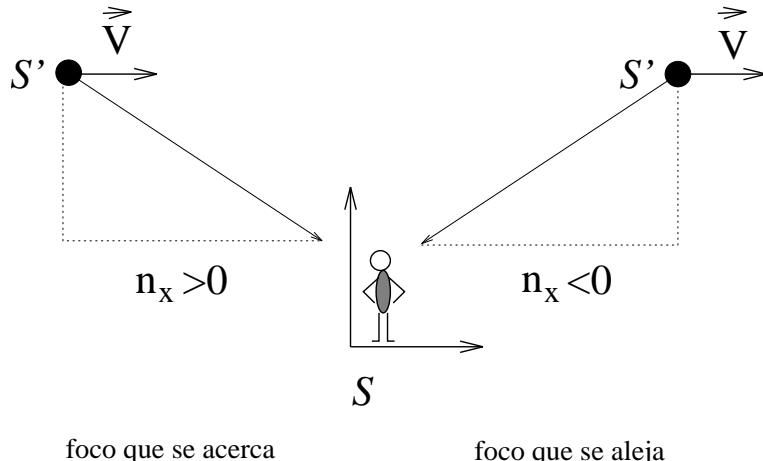


Figura 4.6: Efecto Doppler

$$\omega_l = \frac{\omega_0}{\gamma(1 \mp \beta)} \quad (4.72)$$

donde ω_l representa al *Efecto Doppler longitudinal*. En el límite de baja velocidad, éste coincide con el efecto no relativista

$$\lim_{\beta \ll 1} \omega_l = \omega_0 (1 \pm \beta)$$

Además incluye a un nuevo efecto, el *Efecto Doppler transversal*, debido a la presencia de γ en la fórmula. El efecto será puramente transversal cuando ($n_x = 0$)

$$\omega_t = \frac{\omega_0}{\gamma} = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (4.73)$$

Como puede comprobarse, este efecto es de segundo orden en β para velocidades no relativistas

$$\lim_{\beta \ll 1} \omega_t = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2\right)$$

por lo que suele quedar enmascarado por el longitudinal que es de primer orden (véase [Matveyev] o [Ohanian] para la descripción de la experiencia de Ives²²).

Tetravector energía-momento de un paquete de ondas :

Considérese a un paquete de ondas cuasi-monocromático, de frecuencia ω . Si se quiere obtener la energía que dicho paquete contiene, según los observadores de un sistema \mathcal{S} , se puede utilizar una red de detectores que, en un instante determinado t , mida el campo electromagnético en cada punto. La energía del paquete W se deduce integrando la densidad de energía sobre el volumen en que ésta es distinta de cero. La misma operación puede hacerse desde \mathcal{S}' para obtener W' .

$$W = \int_{\mathcal{V}_c} \omega_{em0} dv_c , , \quad W' = \int_{\mathcal{V}'_c} \omega'_{em0} dv'_c$$

Si se quiere encontrar la ley de transformación para W , surge la dificultad de que, si bien se conoce como se transforma ω_{em0} , los volúmenes \mathcal{V}_c y \mathcal{V}'_c no son los ocupados por el campo en su sistema propio, puesto que éste se mueve con velocidad c y es, en consecuencia, un sistema singular e inaccesible. Para resolver esta dificultad se abordará el problema mediante un proceso de límite:

Sea \mathcal{V}_0 un volumen propio del sistema \mathcal{S}_0 que se mueve con respecto a los sistemas \mathcal{S} y \mathcal{S}' con las velocidades \vec{U} y \vec{U}' . Las medidas impropias de ese volumen, \mathcal{V} desde \mathcal{S} y \mathcal{V}' desde \mathcal{S}' , son el resultado de la contracción de \mathcal{V}_0 por los factores $\gamma(U)$ y $\gamma(U')$. Así pues

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}'} = \frac{\gamma(U')}{\gamma(U)} = \gamma(V) \left(1 - \frac{\vec{V} \cdot \vec{U}}{c^2}\right)$$

donde se ha utilizado la ley de transformación de los factores γ 1.42 con $\gamma = \gamma(V)$, $\gamma_p \rightarrow \gamma(U)$, $\gamma'_p \rightarrow \gamma(U')$ y $\beta \beta_{px} \rightarrow \frac{\vec{V} \cdot \vec{v}}{c^2} \rightarrow \frac{\vec{V} \cdot \vec{U}}{c^2}$.

Si ahora se hace tender a $\vec{c} = c \vec{n}$ a la velocidad \vec{U} con que se mueve el sistema \mathcal{S}_0 respecto al \mathcal{S} , se obtiene

$$\lim_{U \rightarrow c} \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}'} = \gamma(1 - \beta n_x) = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{A'}{A} = \frac{\sqrt{\omega'_{em0}}}{\sqrt{\omega_{em0}}}$$

²²Problema 4-13.

Según este resultado, las imágenes del volumen propio del paquete de ondas se transforman entre sí como las inversas de la frecuencia, de la amplitud y de la raíz cuadrada de la densidad de energía (véanse las relaciones 4.68 y 4.69).

De esto se deduce que la energía del paquete se transforma como la frecuencia

$$W' = W \gamma (1 - \beta n_x) \quad (4.74)$$

lo que permite definir al escalar invariante

$$I_h \equiv \frac{W}{\omega} \quad (4.75)$$

La cuantificación del campo electromagnético asigna a este invariante, para el fotón, el valor de la constante de Planck racionalizada, por lo que el cuanto de energía correspondiente es

$$W_f = \hbar \omega \quad (4.76)$$

Por lo que respecta a la cantidad de movimiento transportada por el paquete,

$$\begin{aligned} \vec{G} &= \int_{\mathcal{V}_c} \vec{g}_0 dv_c = \frac{1}{c^2} \int_{\mathcal{V}_c} \vec{\mathcal{S}}_0 dv_c = \frac{\vec{n}}{c} \int_{\mathcal{V}_c} \omega_{em0} dv_c = \\ &= \frac{\vec{n}}{c} W = I_h \frac{\omega}{c} \vec{n} = I_h \vec{k} \end{aligned}$$

Por analogía con las partículas (2.18), el *Tetravector energía-cantidad de movimiento* del paquete de ondas puede escribirse como, véase 4.67,

$$\vec{G} = I_h \vec{k} \Rightarrow G^i = \left(\frac{W}{c}, \vec{G} \right) \quad (4.77)$$

que es manifiestamente un tetravector porque I_h es un escalar y \vec{k} un tetravector.

En el caso de un fotón

$$\vec{p}_f = \hbar \vec{k} \quad (4.78)$$

donde \hbar es la constante de Planck racionalizada.

4.4.4. Ondas monocromáticas esféricas

Por las razones expuestas en la sección 4.3, una forma conveniente de obtener las soluciones de la ecuación vectorial de las ondas esféricas es por medio de los potenciales de Debye que en este caso son solución de la ecuación

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(r, \theta, \varphi) = 0 \quad , \quad k = \frac{\omega}{c}$$

cuya solución general, como puede verse en [Stratton]-[Panofsky y Phillips]-[Jackson]-[Reitz et al.]-[Vanderlinde], viene dada por la combinación lineal de las soluciones independientes

$$\Psi_{lm} = f_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (4.79)$$

donde Y_{lm} son los *Armónicos esféricos* de orden (l, m) . Si solo se busca a aquellas soluciones relacionadas con las ondas que viajan alejándose del origen de coordenadas,

$$f_l(kr) = h_l(kr) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \left[J_{l+\frac{1}{2}}(kr) - j N_{l+\frac{1}{2}}(kr) \right] \quad (4.80)$$

donde k se toma como real para que las ondas sean propagativas y el signo $(-)$ corresponde a aquellas que viajan hacia afuera. h_l es una de las *Funciones de Hankel*, la otra lleva el signo $(+)$ y corresponde a ondas que inciden hacia el origen. En el límite para $kr \gg 1$

$$\lim_{kr \gg 1} h_l = j^{l+1} \frac{1}{kr} e^{-jkr} \quad (4.81)$$

por lo que, al multiplicar por $e^{j\omega t}$ resultan ondas cuya fase es $\varphi = \omega t - kr$. Sus superficies de igual fase, o frentes de fase, son esféricas y se propagan en la dirección requerida; estas ondas no son homogéneas porque el armónico esférico hace que sobre la superficie del frente de fase la amplitud sea función de θ y de ϕ . $J_{l+\frac{1}{2}}$ son las *Funciones de Bessel* y $N_{l+\frac{1}{2}}$ las *Funciones de Neumann* de orden $(l + \frac{1}{2})$.

Si se le asigna a Ψ la dimensión $[V.L^{-1}]$ y se toma $\vec{e} = \vec{r}$, los modos TE pueden definirse como²³

$$\vec{E}_{lm}^{TE} = \nabla \wedge (\vec{r} \Psi_{lm}) \quad , \quad \vec{B}_{lm}^{TE} = \frac{-1}{j\omega} \nabla \wedge [\nabla \wedge (\vec{r} \Psi_{lm})] \quad (4.82)$$

$$(E_r^{TE})_{lm} = 0 \quad (4.83a)$$

$$(E_\theta^{TE})_{lm} = -jm \frac{1}{\sin \theta} \Psi_{lm} \quad (4.83b)$$

$$(E_\varphi^{TE})_{lm} = \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_{lm} \quad (4.83c)$$

²³La obtención de E^{TE} es sencilla. Para la de B^{TE} véase [Stratton]-[Panofsky y Phillips]. La dependencia de Ψ_{lm} con φ es $e^{jm\varphi} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} \rightarrow jm$.

$$(B_r^{TE})_{lm} = \frac{j l(l+1)}{c} \frac{1}{kr} \Psi_{lm} \quad (4.84a)$$

$$(B_\theta^{TE})_{lm} = \frac{j}{c} \frac{1}{kr} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r \Psi_{lm}) \quad (4.84b)$$

$$(B_\varphi^{TE})_{lm} = \frac{-m}{c} \frac{1}{kr} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi_{lm}) \quad (4.84c)$$

Los campos TE, o de tipo M (magnético), corresponden a los producidos por multipolos magnéticos de orden 2^l , donde $l \neq 0$ puesto que los campos se anulan para $l = 0$. El índice m denota la simetría del multipolo (véase la bibliografía). De forma análoga, los campos TM, o de tipo E, corresponden a los producidos por multipolos eléctricos. Estos campos vienen dados por

$$\vec{B}_{lm}^{TM} = \frac{1}{c} \nabla \wedge (\vec{r} \Psi_{lm}) , \quad \vec{E}_{lm}^{TM} = \frac{1}{jk} \nabla \wedge [\nabla \wedge (\vec{r} \Psi_{lm})] \quad (4.85)$$

$$(B_r^{TM})_{lm} = 0 \quad (4.86a)$$

$$(B_\theta^{TM})_{lm} = \frac{jm}{c} \frac{1}{\sin \theta} \Psi_{lm} \quad (4.86b)$$

$$(B_\varphi^{TM})_{lm} = \frac{-1}{c} \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_{lm} \quad (4.86c)$$

$$(E_r^{TM})_{lm} = j l(l+1) \frac{1}{kr} \Psi_{lm} \quad (4.87a)$$

$$(E_\theta^{TM})_{lm} = \frac{j}{kr} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r \Psi_{lm}) \quad (4.87b)$$

$$(E_\varphi^{TM})_{lm} = -m \frac{1}{kr} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi_{lm}) \quad (4.87c)$$

La asociación de estas soluciones esféricas de las ecuaciones de onda a campos producidos por multipolos es especialmente conveniente para aproximar el desarrollo general multipolar de los campos de radiación de un sistema extenso de cargas y corrientes.

4.5. Ondas en medios materiales

El objetivo de ésta sección es el de ilustrar los modos fundamentales de propagación en medios materiales ilimitados. Como se ha apuntado anteriormente los medios que se toman en consideración son lineales, homogéneos, isotropos y con propiedades independientes del tiempo. En el apéndice D se trata el caso de los medios anisótropos, el de los medios limitados y el de la propagación guiada.

4.5.1. Ondas planas, homogéneas y monocromáticas

Aunque aquí solo se considere a la propagación en medios no dispersivos, en el sentido de las definiciones del capítulo anterior²⁴, la extensión de esta cuestión al caso dispersivo no presenta dificultad. Dado que, por su simplicidad, éste puede ser considerado como el tipo fundamental de onda, la exposición de sus características y propiedades se hará con un cierto detalle.

4.5.1.1. Ecuaciones de los campos

Las ecuaciones de las ondas planas homogéneas y monocromáticas en este tipo de medios son formalmente análogas a las correspondientes del vacío 4.49. Transformando espacialmente a las ecuaciones 4.12 se tiene

$$(k^2 + \gamma^2) \vec{E} = 0 \quad (4.88a)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.88b)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega \mu} \vec{k} \wedge \vec{E} \quad (4.88c)$$

ecuaciones en la que el término $-\frac{\omega^2}{c^2}$ es substituido por el cuadrado de la constante compleja de propagación $+\gamma^2$ (4.12a)

$$\gamma^2 \equiv j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon \quad (4.89)$$

γ es consecuentemente compleja y posee una parte real además de la imaginaria²⁵. En lo que sigue, esta constante se escribirá con la notación

$$\gamma \equiv \alpha + j\beta \quad (4.90)$$

donde α y β se tomarán en un principio como reales y positivas²⁶. La primera es la *Constante de atenuación* y la segunda la *Constante de propagación* o número de onda.

Para que el campo (ecuación 4.88a) pueda tener soluciones no nulas, debe cumplirse que

$$k^2 = -\gamma^2$$

²⁴Tambien se dice que un medio conductor, disipativo, es dispersivo en cuanto que la velocidad de fase de las ondas es función de la frecuencia.

²⁵En el caso de medios dispersivos, las constantes ε , μ y σ son complejas pero el tratamiento correspondiente es análogo.

²⁶En el apéndice D se considera la conveniencia de dar a β y a \vec{n} valores complejos.

De otra forma, tomando solo la raíz que corresponde a las ondas que viajan en el sentido $+\vec{n}$,

$$k = -j\gamma = \beta - j\alpha \Rightarrow \vec{k} \equiv k\vec{n} = -j\gamma\vec{n} \equiv -j\vec{\gamma} \quad (4.91)$$

con lo que el operador ∇ , de acuerdo con 4.48, puede sustituirse, cuando se aplica a este tipo de ondas, por

$$\nabla \rightarrow -\gamma\vec{n} \quad (4.92)$$

Substituyendo k por $-j\gamma$ en 4.50, se obtienen las expresiones para los campos de la onda que viaja en el sentido $+\vec{n}$:

$$\vec{\Psi}(\vec{r}, t) = \vec{\Psi}_0 e^{-\gamma\vec{n}\cdot\vec{r}} e^{jw t} = \vec{\Psi}_0 e^{-\alpha\vec{n}\cdot\vec{r}} e^{j(wt - \beta\vec{n}\cdot\vec{r})} = \vec{\Psi}_0 e^{-\frac{\xi}{\delta}} e^{j\varphi} \quad (4.93)$$

donde $\vec{\Psi}$ representa a cualquiera de los campos, se ha definido la *Profundidad de penetración*

$$\delta \equiv \frac{1}{\alpha} \quad (4.94)$$

distancia a lo largo de la cual la amplitud de la onda se atenúa en $1/e$, y se ha redefinido la fase ²⁷

$$\varphi = wt - \beta\vec{n}\cdot\vec{r} \quad (4.95)$$

Como puede comprobarse, los planos de igual amplitud $e^{-\alpha\xi} = cte$ y los de igual fase $\phi = cte$ coinciden con los $\xi = cte$.

La constante de propagación β juega el mismo papel en el medio que k en el vacío, por lo que la longitud de onda en el primero, el periodo espacial de la fase, viene dada por

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (4.96)$$

4.5.1.2. Relaciones de estructura

Las relaciones de estructura en éste contexto son análogas a las del vacío, con la salvedad de que es necesario reemplazar al número de onda por el factor de propagación complejo de acuerdo con 4.91. Las ecuaciones 4.49b y 4.49c pueden ahora escribirse de la forma

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (4.97a)$$

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{Z} \vec{n} \wedge \vec{E}_0 \quad (4.97b)$$

²⁷Nótese que en el vacío $\gamma = jk$ y $\beta = k$ y que, por lo tanto, esta definición de la fase incluye a la dada en 4.50.

donde aparece el término Z , definido como la *Impedancia del medio*. Su valor para el vacío es

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \simeq 120 \pi \Omega \simeq 377 \Omega \quad (4.98)$$

En general

$$\begin{aligned} Z &= \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\omega\mu(\beta + j\alpha)}{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon^c}} \\ |Z| &= \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \varphi_Z = \arctg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (4.99)$$

La definición de la *Constante dieléctrica compleja* equivalente

$$\epsilon^c \equiv \epsilon \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right) \quad (4.100)$$

análoga a la de C.55, presta a la impedancia y a las ecuaciones de Maxwell, como en el caso del plasma considerado en el apéndice C, una expresión análoga a la que corresponde a un dieléctrico dispersivo no conductor. Efectivamente

$$\nabla \wedge \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega\epsilon \vec{E} = j\omega\epsilon^c \vec{E}$$

Como se muestra en la figura 4.7, los vectores \vec{E} , \vec{H} y \vec{n} forman también aquí un triángulo rectángulo a derechas.

El campo eléctrico viene dado por (4.93)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\gamma\vec{n}\cdot\vec{r}} e^{j\omega t} \quad (4.101)$$

\vec{E}_0 , la amplitud compleja del campo eléctrico, debe cumplir la condición de ortogonalidad con \vec{n} exigida por la ecuación 4.97a, lo que implica que, una vez establecida la dirección de propagación, de las tres componentes de dicho campo solo dos, las transversales, pueden elegirse arbitrariamente. La amplitud compleja del campo magnético \vec{H}_0 queda determinada por 4.97b. En medios no conductores, \vec{H} está en fase con \vec{E} pero, en general, sufre un retraso de φ_Z con respecto a éste último:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}_0}{|Z|} e^{-\gamma\vec{n}\cdot\vec{r}} e^{j(\omega t - \varphi_Z)} \quad (4.102)$$

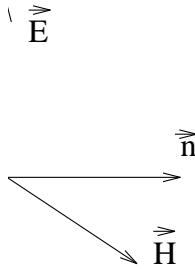


Figura 4.7: Relación de estructura

4.5.1.3. Relaciones de dispersión de la onda en el medio; Factor Q

Como se deduce de 4.89, γ es función de la frecuencia; $\alpha = \alpha(\omega)$ y $\beta = \beta(\omega)$. Estas funciones son las *Relaciones de dispersión de la onda* plana en el medio y se expresan de forma conveniente en función de los parámetros

$$\beta_0 = \beta_{\sigma=0} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (4.103)$$

, valor de la constante de propagación cuando $\sigma = 0$, y del *Factor Q*, o factor de calidad, del medio para la onda. Una forma significativa de definir a éste factor es como el producto de 4π por la razón entre los valores medios temporales de la energía eléctrica W_{ae} almacenada en un volumen \mathcal{V} , por el campo eléctrico \vec{E} , y la W_{dj} disipada por efecto Joule, durante un periodo T. Q es, por lo tanto, el factor adimensional

$$Q \equiv 4\pi \frac{\langle W_{ae} \rangle}{\langle W_{dj} \rangle} = 2\omega \frac{\langle W_{ae} \rangle}{\langle P_{dj} \rangle} = \frac{\omega \epsilon}{\sigma} = \omega \tau \quad (4.104)$$

donde $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$ es la constante de relajación del medio, $\langle P_{dj} \rangle = \frac{1}{2} \sigma |\vec{E}|^2 \mathcal{V}$ la potencia disipada en \mathcal{V} , T el periodo de la onda, $\langle W_{ae} \rangle = \frac{1}{4} \epsilon |\vec{E}|^2 \mathcal{V}$ y $\langle W_{dj} \rangle = \langle P_{dj} \rangle T$.

Puede comprobarse que Q expresa también la relación entre la corriente de desplazamiento $\vec{j}_D = j\omega \vec{D}$ y la de conducción \vec{j}

$$Q = \frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}|} \quad (4.105)$$

El factor de calidad toma valores comprendidos entre $Q = 0$, para los *Conductores ideales*, y $Q = \infty$, para los *Dieléctricos ideales*. Entre estos extremos, se considera que un medio es *Buen conductor* si $Q \ll 1$ y *Buen dieléctrico* si $Q \gg 1$. La figura 4.8

propone al intervalo $Q \in (0,1, 10)$ para caracterizar a aquellos medios que no están comprendidos en ninguna de éstas categorías pero, evidentemente, la significación de estos criterios de clasificación dependen de la precisión con que se aborde a una experiencia concreta.

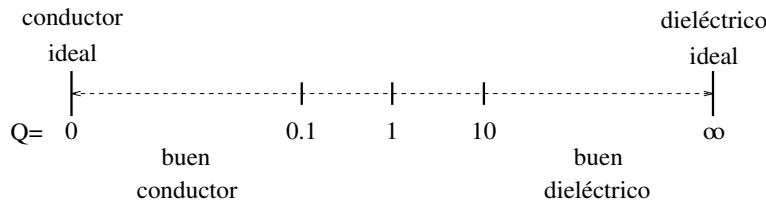


Figura 4.8: Clasificación de medios no dispersivos

Las relaciones de dispersión $\alpha(\omega)$ y $\beta(\omega)$ se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones²⁸

$$\begin{aligned}\alpha^2 - \beta^2 &= -\omega^2 \mu \epsilon \\ 2\alpha\beta &= \omega \mu \sigma\end{aligned}$$

que resulta de sustituir 4.90 en 4.89 y separar las partes real e imaginaria de la ecuación resultante. Las raíces reales y positivas de las ecuaciones anteriores son

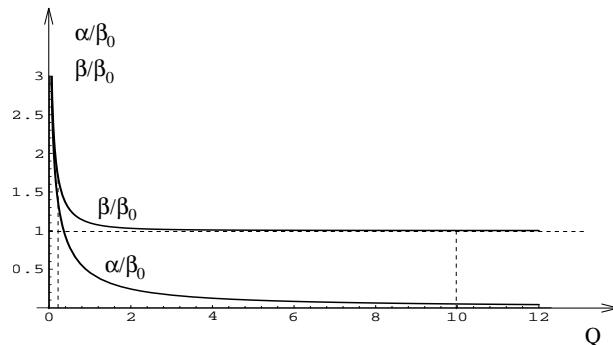


Figura 4.9: Relaciones de dispersión de la onda

$$\alpha = \frac{\beta_0}{\sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.106a)$$

$$\beta = \frac{\beta_0}{\sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.106b)$$

Como puede verificarse en las ecuaciones anteriores y se representa en la figura 4.9, en los buenos conductores ambas constantes tienden a igualarse mientras en los buenos dielécticos la de atenuación se hace muy pequeña y la de propagación tiende a β_0 .

²⁸Problema 4-14.

En la figura 4.10 se representan los campos en función de ξ/λ ; están normalizados de forma que $\vec{E}(\xi = 0) = 1$. En un buen dieléctrico ambos campos están en fase y se atenúan muy poco a lo largo de su propagación, en los medios con $Q \sim 1$ son notables la atenuación y el desfase y, por último, en los buenos conductores la atenuación disipa a la onda en una distancia del orden de $\lambda = 2\pi\delta$ y el retraso de \vec{H} con respecto a \vec{E} se aproxima al límite de $\lambda/8$.

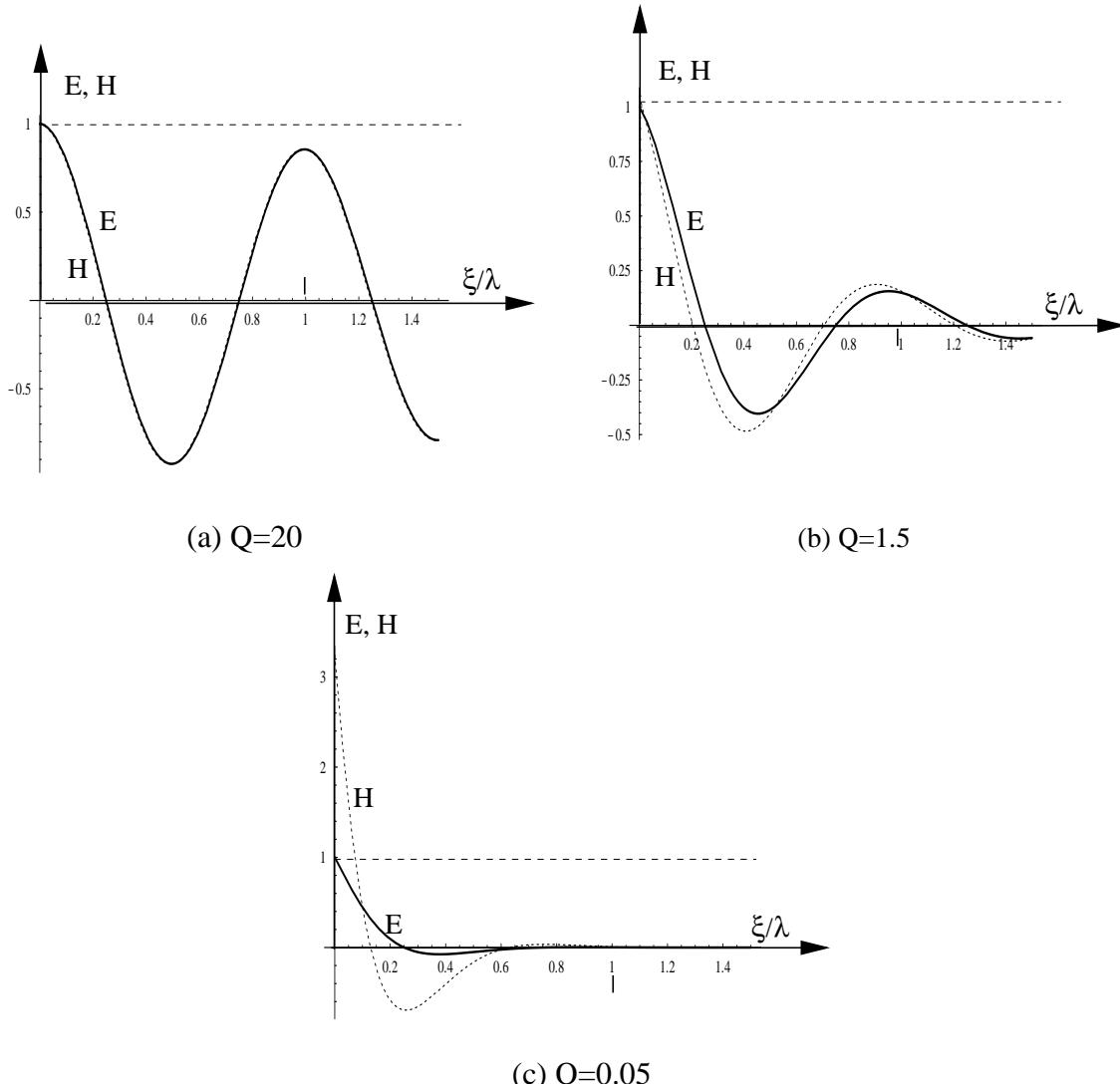


Figura 4.10: Ondas en medios

El caso de los medios dispersivos no es esencialmente distinto del que aquí se ha expuesto pero, como las constantes del medio son complejas y dependen de la frecuencia, las expresiones de las constantes de atenuación y propagación son más complicadas. No obstante, cuando los medios son magnéticamente no dispersivos, la ecuación de Ampère puede escribirse en función de las constantes equivalentes, definidas en el apéndice C,

$$\sigma_{eq} \equiv \sigma' + \omega \varepsilon'' , , \quad \varepsilon_{eq} \equiv \varepsilon' - \frac{\sigma''}{\omega} \quad (4.107)$$

como

$$\nabla \wedge \vec{H} = (\sigma_{eq} + j\omega \varepsilon_{eq}) \vec{E}$$

Las constantes equivalentes pueden ser utilizadas, en el lugar de σ y de ε , en las expresiones anteriores para obtener α y β ²⁹.

4.5.1.4. Velocidades de fase y de grupo

La velocidad de fase en un medio viene dada por

$$v_f = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{\phi=cte} = \frac{\omega}{\beta} \quad (4.108)$$

En la figura 4.11 se muestra la variación de la velocidad de fase relativa v_f/v_0 , donde $v_0 = (v_f)_{\sigma=0}$, frente a Q .

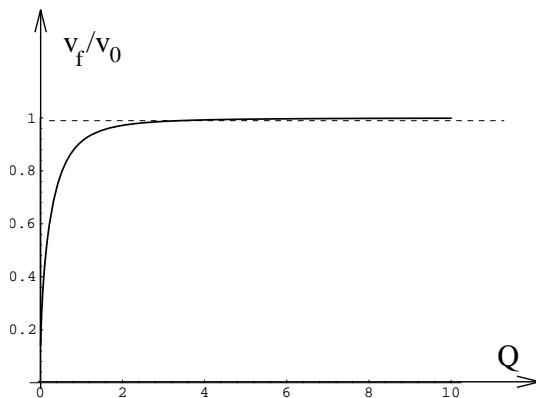


Figura 4.11: Velocidad de fase en función de Q

Según puede verse, la velocidad de fase es nula para los conductores ideales (la onda no se propaga) y crece rápidamente en función de Q dentro de la zona donde $Q \sim 1$. Si se considera que el medio está determinado y que ω es la variable, se comprueba que en esta zona dicho medio

²⁹Problema 4-14.

dispersa fuertemente a la onda³⁰ porque la velocidad de fase de cada componente espectral de un paquete de ondas varía rápidamente con la frecuencia. Para $Q \gg 1$ ($\omega \gg \frac{1}{\tau}$), la velocidad de fase es prácticamente independiente de la frecuencia y el paquete sufre una dispersión pequeña.

Además de esta velocidad, pueden definirse otras velocidades que describen aproximadamente la propagación de ondas espectralmente complejas. De particular interés es la velocidad de grupo que mide, cuando su definición tiene sentido, la velocidad con que se propaga la forma global de un paquete de ondas. Dado que, en general, cada componente armónico tiene una velocidad de fase distinta y se atenúa con la distancia también de forma diferente, los paquetes de onda se deforman según se propagan a través de medios disipativos y dispersivos. No existe un tratamiento analítico general que permita caracterizar la propagación de grupos de ondas a través de medios altamente dispersivos mediante un solo parámetro; ésto solo es posible cuando el paquete espectral tiene un ancho de banda relativamente estrecho³¹ y las relaciones de dispersión son funciones de ω suaves dentro del rango de frecuencias del grupo. En la figura 4.12a se muestra como la amplitud del campo de un paquete de ondas se dispersa conforme se propaga a través de un dieléctrico dispersivo de segundo orden. En 4.12b se comparan los distintos grados de dispersión del grupo, al propagarse hasta un punto determinado, en función de la relación existente entre el ancho de banda $\Delta\omega$ del espectro del grupo y la de la resonancia ω_0 del medio. Cuanto mayor sea el solapamiento del espectro del paquete con la relación de dispersión del medio, más importante será la deformación que sufra la forma del primero.

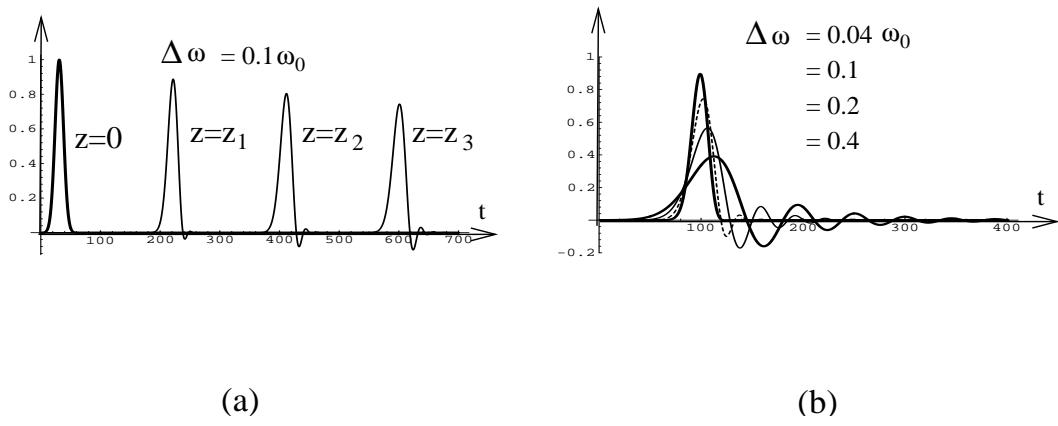


Figura 4.12: Propagación de un grupo de ondas

Para simplificar, se supondrá que α es despreciable. En el punto $\xi = 0$ se genera una onda en la dirección positiva $\xi > 0$. Su amplitud en el origen es

³⁰Existe un cierto grado de ambigüedad en la definición de medio dispersivo. Si se define como medio dispersivo a aquel en el que la velocidad de fase varía con la frecuencia, habría que incluir entre éstos a los "no dispersivos", según la definición del capítulo anterior, que son conductores. Como se acaba de ver, para que las diversas componentes de una onda no monocromática "se dispersen" durante su propagación, basta con que $\sigma \neq 0$.

³¹Según la relación de incertidumbre III.29 la anchura, o duración, temporal del pulso sería relativamente grande".

$$f(0, t) = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

pero, como se trata de una onda que se propaga en la dirección $\xi > 0$, el argumento para $\xi \neq 0$ de cada una de sus componentes espectrales no es $\omega t = (\varphi)_{\xi=0}$, sino $\omega t - \beta(\omega) \xi$, luego

$$f(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{j(\omega t - \beta(\omega) \xi)} d\omega$$

Para un paquete de ondas, centrado en la frecuencia ω_0 y cuya densidad espectral $f(\omega)$ sea despreciable fuera de un intervalo de varias anchuras de banda $I_\omega = (\omega_0 - n \Delta\omega, \omega_0 + n \Delta\omega)$

$$f(\xi, t) \simeq \int_{I_\omega} f(\omega) e^{j(\omega t - \beta(\omega) \xi)} d\omega \quad (4.109)$$

Si $\beta(\omega)$ es una función suave de forma que, dentro del intervalo I_ω y alrededor de su frecuencia central, pueda aproximarse en primer orden de ω ,

$$\beta(\omega) \simeq \beta(\omega_0) + \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) \equiv \beta_0 + \frac{(\omega - \omega_0)}{v_g}$$

donde $\beta_0 = \beta(\omega_0)$ y $\frac{1}{v_g} = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega_0}$.

Sustituyendo la aproximación anterior en 4.109 y sacando fuera de la integral a los factores que no dependen de la frecuencia, se tiene que

$$\begin{aligned} f(\xi, t) &\simeq e^{j(\frac{\omega_0}{v_g} - \beta_0)\xi} \int_{I_\omega} f(\omega) e^{j\omega(t - \frac{\xi}{v_g})} d\omega \\ &\simeq e^{j(\frac{\omega_0}{v_g} - \beta_0)\xi} f(0, t - \frac{\xi}{v_g}) \end{aligned}$$

de donde se deduce que el valor absoluto de la amplitud de la onda en (ξ, t)

$$|f(\xi, t)| = |f(0, t - \frac{\xi}{v_g})|$$

es el mismo que ésta tenía en el origen en un tiempo anterior en $\Delta t = \frac{\xi}{v_g}$. Esto significa que la forma del paquete se mueve con la *Velocidad de grupo*

$$v_g \simeq \left(\frac{d\omega}{d\beta} \right)_{\omega_0} \quad (4.110)$$

Conviene resaltar el carácter aproximado del concepto de velocidad de grupo: su validez se limita a aquellos medios en los que la dispersión es suficientemente pequeña o a paquetes cuya anchura espectral sea lo bastante estrecha. A pesar de lo anotado, éste es un concepto de gran utilidad práctica. La figura 4.13 muestra la relación geométrica entre las velocidades de fase y de grupo y la curva de dispersión $\omega(\beta)$.

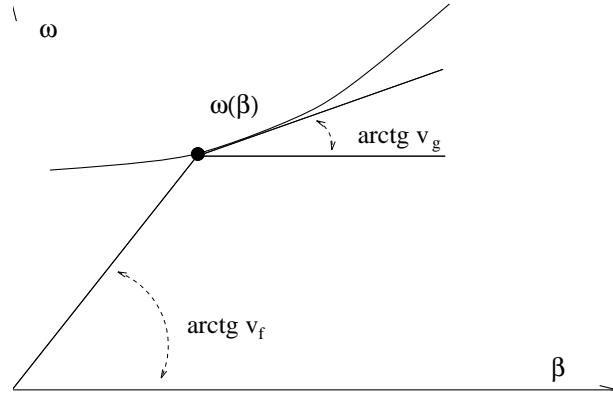


Figura 4.13: Velocidades de fase y de grupo

4.5.1.5. Almacenamiento, dissipación y propagación de energía

Para expresar de forma concreta a los términos que intervienen en los balances energéticos de ondas planas monocromáticas, se considera a una onda linealmente polarizada en la dirección del eje x y propagándose en la dirección del eje z . Su expresión compleja es

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \hat{x} \\ \vec{H}(z, t) &= \frac{E_0}{|Z|} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z - \varphi_Z)} \hat{y}\end{aligned}$$

donde E_0 se toma como real para no arrastrar una fase constante adicional en ambos campos ³².

Los campos reales son

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \text{Re}[\vec{E}(z, t)] = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{x} \\ \vec{H}(z, t) &= \text{Re}[\vec{H}(z, t)] = \frac{E_0}{|Z|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \varphi_Z) \hat{y}\end{aligned}\quad (4.111)$$

de donde pueden obtenerse los valores reales del vector de Poynting $\vec{S}(\vec{r}, t)$, de la densidad de energía $\omega_{em}(\vec{r}, t)$ y de la potencia disipada por unidad de volumen $\frac{dP_d(\vec{r}, t)}{dv}$

³²La polarización sería elíptica si se le añade un campo eléctrico en la dirección del eje y y las amplitudes se toman como complejas y con distinta fase: $E_{0x} = |E_{0x}|e^{j\varphi_{0x}}$ y $E_{0y} = |E_{0y}|e^{j\varphi_{0y}}$.

$$\vec{S}(z, t) = E H \hat{z} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|Z|} e^{-2\alpha z} \left[\underbrace{\cos \varphi_Z}_{(a)} + \underbrace{\cos(2\omega t - 2\beta z - \varphi_Z)}_{(b)} \right] \hat{z} \quad (4.112)$$

$$\begin{aligned} \omega_{em}(z, t) &= \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 + \mu H^2) = \frac{E_0^2}{4} e^{-2\alpha z} \left\{ \varepsilon \left[\underbrace{1}_{(a)} + \underbrace{\cos(2\omega t - 2\beta z)}_{(b)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{|Z|^2} \left[\underbrace{1}_{(a)} + \underbrace{\cos(2\omega t - 2\beta z - 2\varphi_Z)}_{(b)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$\frac{d P_d(z, t)}{d v} = \sigma E^2 = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 e^{-2\alpha z} \left[\underbrace{1}_{(a)} + \underbrace{\cos(2\omega t - 2\beta z)}_{(b)} \right] \quad (4.114)$$

Estas magnitudes son cuadráticas en las amplitudes de los campos y presentan las siguientes características:

- Pueden desglosarse en dos tipos de sumandos: los (a), asociados a su valor medio, y los (b), correspondientes a magnitudes oscilantes de media nula.
- Su constante de atenuación 2α , su frecuencia 2ω y su constante de propagación 2β son el doble de las correspondientes a las amplitudes.
- El vector de Poynting puede tener las direcciones $\pm \vec{n}$, según el valor de la fase de la impedancia φ_Z , mientras que los otros dos términos son positivos en medios no dispersivos.

Los valores medios pueden obtenerse directamente de las magnitudes complejas:

$$\langle \vec{S} \rangle(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{S}^c] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E} \wedge \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re}[Z]}{|Z|^2} e^{-2\alpha z} |E_0|^2 \hat{z} \quad (4.115a)$$

$$\langle \omega_{em} \rangle(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}(\varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^*)\right] = \frac{|E_0|^2}{4} e^{-2\alpha z} \left(\varepsilon + \frac{\mu}{|Z|^2}\right) \quad (4.115b)$$

$$\langle \frac{d P_d}{d v} \rangle(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^*] = \frac{1}{2} \sigma |E_0|^2 e^{-2\alpha z} \quad (4.115c)$$

Las magnitudes energéticas asociadas a grupos de onda, totalizadas a lo largo del tiempo, pueden calcularse directamente en el dominio de la frecuencia con la ayuda del teorema de Parseval III.25.

Así, pues, la energía total que atraviesa una superficie \mathcal{S} debida a un paquete de ondas cuyas amplitudes reales sean $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y $\vec{H}(\vec{r}, t)$ es

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{S}} &= \int_{t=-\infty}^{t=\infty} \int_{\mathcal{S}} \{\vec{E}(\vec{r}, t) \wedge \vec{H}(\vec{r}, t)\} \cdot d\vec{s} dt = 2\pi \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} \int_{\mathcal{S}} \{\vec{E}(\vec{r}, \omega) \wedge \vec{H}^*(\vec{r}, \omega)\} \cdot d\vec{s} d\omega \\ &= 4\pi \int_{\omega=0}^{\omega=\infty} \int_{\mathcal{S}} \text{Re}[\vec{\mathcal{S}}^c(\vec{r}, \omega)] \cdot d\vec{s} d\omega \end{aligned} \quad (4.116)$$

De forma análoga puede calcularse la energía depositada por el paso de un paquete de ondas a través de un determinado volumen \mathcal{V} del medio.

4.5.1.6. Buenos dieléctricos y buenos conductores

En las aplicaciones más simples los medios pueden considerarse como conductores o dieléctricos ideales. En otros muchos casos de importancia práctica pueden ser considerados simplemente como buenos y aproximar sus parámetros incluyendo aquellos términos que permiten expresar los efectos de primer orden asociados a la desviación de la idealidad. A continuación se consideran las aproximaciones pertinentes de los parámetros de propagación bajo estos supuestos.

Buenos dieléctricos :

Los buenos dieléctricos se caracterizan por su alto valor del factor de calidad, por lo que las constantes α y β pueden aproximarse en función de $x = \frac{1}{Q} \ll 1$. Reteniendo solo hasta los términos en x^2 de la serie de Taylor, se obtiene

$$\alpha \simeq \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} , \quad \beta \simeq \beta_0 \left[1 + \frac{1}{8Q^2} \right] \quad (4.117)$$

Dentro de esta aproximación, todas las componentes armónicas de un grupo de ondas se atenúan en la misma medida pero existe una pequeña dispersión de segundo orden que se traduce en una velocidad de fase dependiente de la frecuencia pero próxima a $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$.

$$v_f \simeq v_0 \left[1 - \frac{1}{8Q^2} \right] \quad (4.118)$$

Derivando β con respecto a ω en 4.117, particularizando a la frecuencia central del paquete y aproximando hasta el segundo orden en x , se obtiene una velocidad de gupo que también es próxima a v_0

$$v_g \simeq v_0 \left[1 + \frac{1}{8Q_0^2} \right] \quad (4.119)$$

donde $Q_0 = (Q)_{\omega=\omega_0}$

Buenos conductores :

En el caso opuesto de los buenos conductores $Q \ll 1$ y $x = \frac{1}{Q} \gg 1$ por lo que, despreciando la unidad frente a x en 4.106,

$$\alpha \simeq \beta \simeq \frac{\beta_0}{\sqrt{2Q}} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \quad (4.120)$$

En este caso la profundidad de penetración de los campos

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \simeq \frac{\lambda}{2\pi} \simeq \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2}\pi} \lambda_0 \ll \lambda_0 \quad (4.121)$$

es pequeña, comparada con λ y con $\lambda_0 = \frac{2\pi}{\beta_0}$, por lo que se le denomina *Profundidad pelicular*.

Los campos prácticamente no se propagan, dado que su velocidad de fase es muy pequeña, y se amortiguan rápidamente, como se muestra en la figura 4.10 y en la expresión

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{\xi}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{\xi}{\delta})} \quad (4.122)$$

En una longitud de onda $\lambda = 2\pi\delta$, se atenúa aproximadamente por el factor $2 \cdot 10^{-3}$.

En cuanto a la impedancia del medio, toma los valores

$$Z \simeq (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \quad , \quad |Z| \simeq \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} \quad , \quad \varphi_Z \simeq \frac{\pi}{4} \quad (4.123)$$

En los conductores ideales $Z = 0$.

4.6. Problemas

4-1. Demostrar que \vec{X}_t y \vec{X}_{nt} son soluciones de la ecuación de onda vectorial 4.13 y que $\vec{X}_t = -\frac{1}{C\gamma^2} \nabla \wedge \vec{X}_{nt}$, por lo que estos dos campos son fuente vectorial el uno del otro.

SOLUCION :

En el texto se indican los pasos fundamentales para la demostración de que \vec{X}_t es solución de la ecuación vectorial de onda

$$\nabla [\nabla \cdot \vec{X}_t] - \nabla \wedge [\nabla \wedge \vec{X}_t] - \gamma^2 \vec{X}_t = 0$$

Partiendo de este punto, se demostrarán las otras dos cuestiones del enunciado.
En primer lugar, dado que $\vec{X}_{nt} = C \nabla \wedge \vec{X}_t$ y que $\nabla \cdot \vec{X}_t = 0$, se tiene que

$$\vec{X}_t = -\frac{1}{C\gamma^2} \nabla \wedge \vec{X}_{nt}$$

Por último, hallando el rotacional de la expresión anterior y teniendo en cuenta la definición de \vec{X}_{nt} y que su divergencia es nula, se comprueba que estas funciones son, efectivamente, solución de la ecuación de onda vectorial.

- 4-2. Demostrar que, para un campo solenoideal \vec{X} , $\vec{e} \cdot \vec{X}$ es solución de la ecuación de Helmholtz 4.14 (Véase la sección 4.3 y el apéndice IV).

SOLUCION :

Para $\vec{X} = \vec{X}_t$, la demostración es trivial ya que $\vec{e} \cdot \vec{X}_t = 0$. Se supondrá, por lo tanto, que \vec{X} es no transversal.

Dada la definición de ∇^2 ,

$$\nabla^2(\vec{e} \cdot \vec{X}) \equiv \nabla \cdot [\nabla(\vec{e} \cdot \vec{X})]$$

Desarrollando el gradiente de un producto escalar y teniendo en cuenta las propiedades de \vec{e} , 4.16 y siguientes,

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{e} \cdot \vec{X}) &= (\vec{e} \cdot \nabla) \vec{X} + \underbrace{(\vec{X} \cdot \nabla) \vec{e}}_{=k_2 \vec{X}} + \vec{e} \wedge (\nabla \wedge \vec{X}) + \vec{X} \wedge \underbrace{(\nabla \wedge \vec{e})}_{=0} = \\ &= \underbrace{(\vec{e} \cdot \nabla) \vec{X}}_{(a)} + k_2 \vec{X} + \vec{e} \wedge (\nabla \wedge \vec{X}) \end{aligned}$$

Si ahora se hace uso del desarrollo del rotacional de un producto vectorial

$$\nabla \wedge (\vec{e} \wedge \vec{X}) = \vec{e} \underbrace{\nabla \cdot \vec{X}}_{=0} - \underbrace{\vec{X} \nabla \cdot \vec{e}}_{=k_1 \vec{X}} + \underbrace{(\vec{X} \cdot \nabla) \vec{e}}_{=k_2 \vec{X}} - \underbrace{(\vec{e} \cdot \nabla) \vec{X}}_{(a)}$$

lo que permite escribir

$$(a) = k_3 \vec{X} - \nabla \wedge (\vec{e} \wedge \vec{X}) , , \quad k_3 = k_2 - k_1$$

$$\nabla(\vec{e} \cdot \vec{X}) = k_4 \vec{X} - \nabla \wedge (\vec{e} \wedge \vec{X}) + \vec{e} \wedge (\nabla \wedge \vec{X}) , , \quad k_4 = 2k_2 - k_1$$

y, aplicando la divergencia a la expresión anterior,

$$\nabla^2(\vec{e} \cdot \vec{X}) = \nabla \cdot [\vec{e} \wedge (\nabla \wedge \vec{X})]$$

El segundo miembro es la divergencia del producto vectorial de dos vectores, luego, desarrollando la divergencia

$$\nabla^2(\vec{e} \cdot \vec{X}) = (\nabla \wedge \vec{X}) \cdot \underbrace{(\nabla \wedge \vec{e})}_{=0} - \vec{e} \wedge (\nabla \wedge \vec{X}) = \gamma^2 \vec{e} \cdot \vec{X}$$

dado que, para soluciones solenoidales de la ecuación de onda,

$$\nabla \wedge [\nabla \wedge \vec{X}] = -\gamma^2 \vec{X}$$

4-3. Demostrar que $f(u=x-ct)$ y $g(w=x+ct)$ son solución de la ecuación de onda unidimensional para el campo electromagnético en el vacío. Hacer uso de las ecuaciones de Maxwell para hallar la relación entre $\vec{E}(u)$, $\vec{B}(u)$, $\vec{E}(w)$ y $\vec{B}(w)$.

4-4. Una onda plana se propaga en el vacío en la dirección del eje z . El campo eléctrico en $z = 0$ es

$$\vec{E} = \rightarrow \begin{cases} E_0 \hat{x} [e^{-t} - e^{-2t}], & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

donde $E_0 = 100 \mu V \cdot m^{-1}$. Hallar, para $z > 0$,

- a) Campo magnético.
- b) Vector de Poynting.
- c) Energía total que atraviesa a un casquete hemisférico, de radio $a = 1\text{ m}$, cuyo eje es paralelo al z .

SOLUCION:

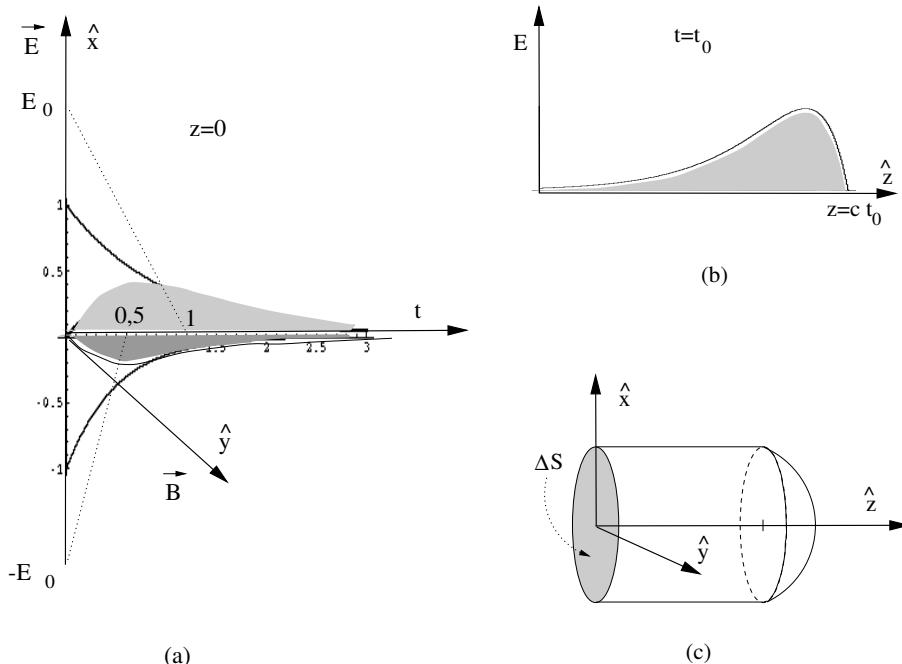


Figura 4.14:

(a) - Para encontrar la expresión del campo electromagnético en cualquier posición z , basta con tener en cuenta que la onda viaja, a través del vacío, en la dirección positiva del eje z , por lo que $t = (t - \frac{z}{c})_{z=0}$ y

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \left[e^{-(t-\frac{z}{c})} - e^{-2(t-\frac{z}{c})} \right] \hat{x}$$

Haciendo uso de la relación de estructura con $\vec{n} = \hat{z}$

$$\vec{B}(z, t) = \frac{1}{c} \hat{z} \wedge \vec{E}(z, t) = \frac{1}{c} E(z, t) \hat{y}$$

(b) - el vector de Poynting es

$$\vec{S}_0 = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = c \omega_0 \hat{z} = c \varepsilon_0 E^2 \hat{z}$$

(c) - Puesto que el vacío no es disipativo, la energía que atraviesa el casquete es la misma que atraviesa un disco del mismo radio y con el mismo eje, por ejemplo, el situado en $z = 0$ que se muestra en la figura 4.14-c. Así, dicha energía puede calcularse de la forma

$$W = \int_{t=0}^{\infty} \left[\int_{\Delta S} (\vec{S}_0)_{z=0} \cdot d\vec{s} \right] dt = \varepsilon_0 c E^2 \pi a^2 \int_{t=0}^{\infty} [e^{-t} - e^{-2t}]^2 dt$$

4-5. Comprobar si

$$\vec{E} = \hat{x} e^{(-a^2 t^2 - b^2 z^2 + 2abz)t}$$

puede corresponder a una onda que viaja a través del vacío. En caso afirmativo, determinar:

- a) Las condiciones que deben cumplir las constantes a y b .
- b) El campo magnético.
- c) Supóngase que dicha onda incide, desde el vacío, sobre un dieléctrico ideal que ocupa el semiespacio $z > 0$. Hallar el campo electromagnético total en cada una de las regiones $z \leq 0$ y $z > 0$.

SOLUCION :

(a) - Obviamente, si $\frac{a}{b} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$, el campo eléctrico puede escribirse de la forma

$$\vec{E}(z, t) = \hat{x} e^{-b^2(z-ct)^2}$$

que pone de manifiesto que $E = f(z - ct)$ es una onda que viaja en el sentido positivo del eje z .

(b) - El campo magnético viene dado por la relación de estructura de las onda electromagnéticas en el vacío

$$\vec{B}(z, t) = \frac{1}{c} \hat{z} \wedge \vec{E}(z, t) = \frac{1}{c} E(z, t) \hat{y}$$

(c) - Si la onda incide sobre el dieléctrico, deben existir, además de la incidente, una onda reflejada y otra transmitida, de forma que en el primer medio, el vacío,

$$\vec{E}_1(z, t) = \vec{E}^i(z, t) + \vec{E}^r(z, t) = \hat{x} \left[e^{-b^2(z-ct)^2} + A e^{-b^2(z+ct)^2} \right]$$

El argumento de la onda reflejada lleva un signo + puesto que ésta viaja en sentido contrario que la incidente. La constante A se determinará mediante las condiciones de frontera en $z = 0$.

Aplicando por separado la relación de estructura a las ondas incidente y reflejada, a la primera con $\vec{n} = \hat{z}$ y a la segunda con $\vec{n} = -\hat{z}$,

$$\vec{B}_1(z, t) = \vec{B}^i(z, t) + \vec{B}^r(z, t) = \frac{1}{c} \hat{y} \left[e^{-b^2(z-ct)^2} - A e^{-b^2(z+ct)^2} \right]$$

El dieléctrico tendrá por constantes μ_0 y $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, por lo que la velocidad de fase es $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$. Los campos en este medio son $\vec{E}_2 = \vec{E}^t$ y $\vec{B}_2 = \vec{B}^t$ y están ligados mediante la relación de estructura

$$\vec{B}_2(z, t) = \frac{1}{v} \hat{z} \wedge \vec{E}_2(z, t) = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{c} E_2(z, t) \hat{y}$$

Las relaciones entre las distintas ondas se obtienen mediante las condiciones de continuidad en $z = 0$. Dado que ambos campos son tangenciales

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(0, t) &= \vec{E}_2(0, t) \Rightarrow \vec{E}_2(0, t) = \hat{x} (1 + A) e^{-b^2 c^2 t^2} \\ \frac{\vec{B}_1(0, t)}{\mu_0} &= \frac{\vec{B}_2(0, t)}{\mu_0} \Rightarrow \vec{B}_2(0, t) = \hat{y} \frac{1}{c} (1 - A) e^{-b^2 c^2 t^2} \end{aligned}$$

Introduciendo la relación de estructura en el última condición y eliminando el módulo del campo eléctrico se tiene que

$$A = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_r}}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}}$$

En general, en el dominio del tiempo no puede hablarse de coeficientes de reflexión y transmisión sino, más bien, de operadores de reflexión y transmisión, pero, en el caso de medios no disipativos ni dispersivos, como acaba de mostrarse, la forma de onda no cambia en estos procesos y puede extenderse a ellos estos conceptos.

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \frac{\vec{B}^r(0, t)}{\vec{B}^i(0, t)} = A = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_r}}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}} \\ \tau &\equiv \frac{\vec{B}^t(0, t)}{\vec{B}^i(0, t)} = 1 + A = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}} \end{aligned}$$

Para hallar los campos en (z, t) , solo es necesario tener en cuenta que para la onda reflejada $t = (t + \frac{z}{c})_{z=0}$ y para la transmitida $t = (t - \frac{z}{v})_{z=0}$, por ejemplo,

$$\vec{E}^t(z, t) = \hat{x} \tau e^{-b^2 \frac{c^2}{v^2} (z-vt)^2}$$

- 4-6. Hallar la ley de transformación para el vector de Poynting de una onda plana homogénea. Demuéstrese que si un vehículo espacial se retira de un observador a la velocidad v , al tiempo que emite una señal de radio con un vector de Poynting de módulo S_{em} , medido en el sistema en reposo del vehículo, el módulo del vector observado está dado por:

$$S_{obs} = S_{em} \frac{1 - (v/c)}{1 + (v/c)}$$

- 4-7. Dado el campo

$$E(z, t) = 0,3 \cos(2z + 20t) V \cdot m^{-1}$$

Calcular:

- a) La velocidad de la onda.
- b) La longitud de onda.
- c) La frecuencia.
- d) La amplitud.

- 4-8. Para una onda plana monocromática que se propaga en un medio con:

$$\vec{E}(z, t) = [\hat{y} + (2 + j)\hat{x}] \exp[j(10^9 t + 30z)] V \cdot m^{-1}$$

Calcular:

- a) La frecuencia angular ω de la onda.
- b) El número de onda β .
- c) La dirección de propagación, la velocidad de fase y la constante dieléctrica del medio, considerandolo no magnético.
- d) Los vectores de polarización de la onda y el tipo de dicha polarización.
- e) El campo electromagnético real.

SOLUCION:

Se hará el apartado (d) referente al tipo de polarización

(d) -

$$\vec{E}_0 = (2 + j)\hat{x} + \hat{y} \Rightarrow \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 = 4(1 + j) = 5,7, / \underline{45^\circ} = |\mathcal{C}|e^{2j\alpha} \Rightarrow \alpha = 22,5^\circ$$

Dado que $\vec{e} = \vec{E}_0 e^{-j\alpha} = \vec{e}_r + j\vec{e}_i$

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= 2,23\hat{x} + 0,924\hat{y} \Rightarrow \hat{e}_1 = 0,924\hat{x} + 0,383\hat{y} \\ \vec{e}_i &= 0,159\hat{x} - 0,383\hat{y} \Rightarrow \hat{e}_2 = \pm(0,383\hat{x} - 0,924\hat{y}) = -(0,383\hat{x} - 0,934\hat{y}) \end{aligned}$$

Para \hat{e}_2 se ha tomado el signo negativo porque $\hat{e}_r \wedge \hat{e}_i = -\hat{z}$ y la polarización es a derechas. Por otra parte, $e_r = 2,41$ y $e_i = 0,414$, lo que indica que la polarización es elíptica.

4-9. Considerar una onda electromagnética que se propaga en la dirección $+x$ en el vacío, la cual se descompone en la suma de otras dos:

(a) -

$$\vec{E} = \hat{y}E_1e^{j(\omega t-kx)} + \hat{y}E_2e^{j(\omega t-kx+\alpha)}$$

Obtener \vec{S} y $\langle \vec{S} \rangle$. Los valores obtenidos ¿son la suma de los correspondientes a cada componente de la onda?

(b) - Repetir el problema si

$$\vec{E} = \hat{y}E_1e^{j(\omega t-kx)} + \hat{z}E_2e^{j(\omega t-kx+\alpha)}$$

SOLUCION:

(a) - En este apartado se resolverán las cuestiones propuestas operando en el dominio del tiempo.

Aplicando la relación de estructura

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_0} \hat{x} \wedge \vec{E} = \frac{E}{Z_0} \hat{z} = \frac{\hat{z}}{Z_0} \left(E_1 e^{j\varphi} + E_2 e^{j(\varphi+\alpha)} \right) , \quad \varphi = \omega t + kx$$

y el vector de Poynting real (se suponen E_1 y E_2 reales)

$$\vec{S} = Re[\vec{E}] \wedge Re[\vec{H}] = \frac{\hat{x}}{Z_0} [E_1^2 \cos^2 \varphi + E_2^2 \cos^2 (\varphi + \alpha) + 2 E_1 E_2 \cos \varphi \cos (\varphi + \alpha)]$$

Dado que $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$, $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \frac{\hat{x}}{Z_0} \left[\underbrace{E_1^2 + E_2^2 + 2 \overbrace{E_1 E_2 \cos \alpha}^{(c)}}_{(a)} + \underbrace{E_1^2 \cos 2\varphi + E_2^2 \cos (2\varphi + 2\alpha) + 2 E_1 E_2 \cos (2\varphi + \alpha)}_{(b)} \right]$$

Como puede verse, los términos (b) oscilan en el tiempo sobre un valor medio nulo, por lo que el valor medio viene dado por los (a). Las dos componentes de la onda no constituyen modos independientes, por lo que aparece el sumando (c) que representa a la interferencia entre las dos componentes

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\hat{x}}{Z_0} [E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 \cos \alpha]$$

(b) - En este segundo caso, se hallará solamente el valor medio del vector de Poynting trabajando fasorialmente (en el dominio de la frecuencia).

Las dos componentes están polarizadas en direcciones distintas, por lo que son independientes. Aplicando la relación de estructura y conjugando

$$\vec{H}^* = \frac{1}{Z_0} \hat{x} \wedge \vec{E}^* = \frac{1}{Z_0} (E_1 e^{-j\varphi} \hat{z} - E_2 e^{-j(\varphi+\alpha)} \hat{y})$$

y el vector de Poynting complejo es

$$\vec{S}^c = \vec{E} \wedge \vec{H}^* = \frac{\hat{x}}{Z_0} [E_1^2 + E_2^2]$$

donde, como puede comprobarse, no aparece un término de interferencia. En consecuencia

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{S}^c] = \frac{1}{2} \frac{\hat{x}}{Z_0} [E_1^2 + E_2^2]$$

- 4-10. Dos ondas planas, de igual frecuencia y fase, se propagan en la misma dirección. Ambas están circularmente polarizadas, pero una es dextrógira y la otra levógira. Las amplitudes de los campos eléctricos son E_1 y E_2 .
- ¿Qué tipo de polarización tendrá la onda resultante si $E_1 \neq E_2$?
 - ¿Y si $E_1 = E_2$?
- 4-11. El ritmo medio al que la energía solar incide sobre la Tierra es aproximadamente $1400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.
- Calcular el valor del campo eléctrico en la superficie terrestre considerando a la luz solar como monocromática y linealmente polarizada.
 - Si el Sol radia isotrópicamente, ¿con qué potencia lo hace?. La distancia de la Tierra al Sol es $1,49 \times 10^8 \text{ km}$.
 - Calcular la potencia total recibida por la Tierra sabiendo que su radio es $6,37 \times 10^3 \text{ km}$.
- 4-12. Considerar un transmisor que colocado en la Luna radia isotrópicamente a la frecuencia de 5 GHz y con una potencia de 1 W . Sabiendo que la distancia Tierra-Luna es $3,8 \times 10^5 \text{ km}$, calcular:
- El valor de los campos E y H en la superficie de la Tierra.
 - El valor medio del vector de Poynting en la superficie terrestre.
 - La densidad media de energía.
 - El tiempo que tarda una señal en alcanzar la Tierra.
- 4-13. En una experiencia realizada por Ives para detectar las contribuciones de segundo orden en β del efecto Doppler, se produjo un haz monoenergético de Hidrógeno con $\beta \simeq 6 \times 10^{-3}$, se observó la raya de frecuencia propia ω_0 desde la dirección en que el haz se acerca y desde aquella en que éste se aleja, y se registró en una misma placa a estas frecuencias, ω_{ac} y ω_{al} , y a la frecuencia propia.
- Demostrar que

$$\frac{\omega_0}{\langle \omega \rangle} = \sqrt{1 - \beta^2}$$

donde $\langle \omega \rangle = \frac{1}{2}(\omega_{ac} + \omega_{al})$

- b) Supóngase que, para detectar la contribución de segundo orden mencionada en el apartado anterior, se pretende medir el efecto Doppler transversal observando al haz con un objetivo orientado perpendicularmente al mismo. Demostrar que basta una pequeña desviación $\delta\alpha$ de la perpendicularidad para que el efecto longitudinal enmascare al transversal.

SOLUCION:

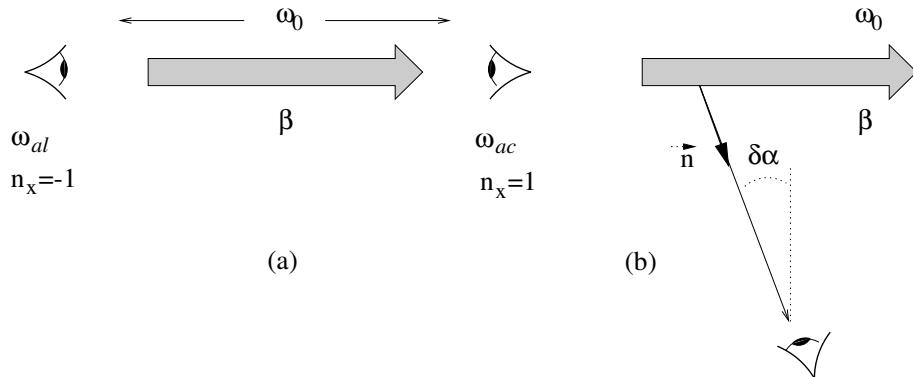


Figura 4.15:

(a) - Según se muestra en la figura 4.15-a, observando desde la dirección en que el haz se acerca, $n_x = 1$ y desde la contraria $n_x = -1$, de donde

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\gamma} \left(\frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1-\beta} \right) = \omega_0 \gamma$$

(b) - en la figura 4.15-b se representa a una experiencia en la que la observación de la raya emitida por el haz se hace con un ángulo ligeramente desviado de la transversalidad, de forma que

$$n_x = \sin \delta\alpha \simeq \delta\alpha$$

ya que $\delta\alpha$ es pequeño.

Dado que $\beta \ll 1$, pueden hacerse aproximaciones hasta el segundo orden en dicha variable

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} &= \sqrt{1 - \beta^2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\beta^2 \quad , \quad \frac{1}{1 - \beta n_x} \simeq 1 + \beta n_x \quad \Rightarrow \\ \omega &= \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta n_x)} \simeq \omega_0 \left(1 + \beta n_x - \frac{1}{2}\beta^2 \right) \end{aligned}$$

Luego, para que el efecto de primer orden no enmascare al de segundo orden

$$\delta\alpha \ll \frac{1}{2}\beta = 3 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \delta\alpha \ll 1^\circ$$

- 4-14. a) Demostrar las expresiones que se dan en 4.106 para α y β .
 b) Comprobar que dichas expresiones son válidas para medios lineales dispersivos y no magnéticos si se definen las constantes equivalentes

$$Q_{eq} = \frac{\omega \varepsilon' - \sigma''}{\sigma' - \omega \varepsilon''} , , \quad \beta_{0eq} = \omega \sqrt{\mu(\varepsilon' - \frac{\sigma''}{\omega})}$$

c) Aplicar los resultados anteriores al caso de un dieléctrico de primer orden.

SOLUCION:

(a) - Supuestas reales las constantes del medio

$$\gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon \Rightarrow$$

Desglosando las partes real e imaginaria de esta ecuación

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= -\omega^2\mu\varepsilon \\ 2\alpha\beta &= \omega\mu\sigma \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado la segunda de estas ecuaciones y definiendo

$$\beta_0 \equiv \omega\sqrt{\mu\varepsilon} , , \quad Q \equiv \frac{\omega\varepsilon}{\sigma}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= -\beta_0^2 \\ \alpha^2\beta^2 &= \frac{1}{4}\frac{\beta_0^2}{Q^2} \end{aligned}$$

Eliminando α y resolviendo la ecuación bicuadrática resultante, se tiene que

$$\beta^2 = \frac{1}{2}\beta_0^2 \left[1 \underbrace{\pm}_{\rightarrow+} \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} \right]$$

Para que β sea real, su cuadrado debe ser positivo y, como se indica, ha de elegirse el signo positivo.

(b) - Las ecuaciones rotacionales de Maxwell para medios lineales pueden escribirse, en el dominio de la frecuencia, como

$$\nabla \wedge \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (4.124)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E} \quad (4.125)$$

Si los medios son dispersivos y no magnéticos,

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' , , \quad \sigma = \sigma' - j\sigma''$$

por lo que la ecuación 4.125 toma la forma

$$\nabla \wedge \vec{H} = (\sigma_{eq} + j\omega\varepsilon_{eq}) \vec{E}$$

donde

$$\sigma_{eq} \equiv \sigma + \omega\varepsilon'' \quad , \quad \varepsilon_{eq} \equiv \varepsilon'' - \frac{\sigma''}{\omega}$$

y

$$Q_{eq} = \frac{\omega\varepsilon_{eq}}{\sigma_{eq}} = \frac{\omega\varepsilon' - \sigma''}{\sigma' - \omega\varepsilon''} \quad , \quad \beta_{0eq} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon_{eq}} = \omega \sqrt{\mu(\varepsilon' - \frac{\sigma''}{\omega})}$$

(c) - En un medio dieléctrico dispersivo $\sigma = 0$, por lo que

$$Q_{eq} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} \quad , \quad \beta_{0eq} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon'}$$

y, si éste es de primer orden,

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \xi_e) = \varepsilon_0(1 + \frac{\xi_{e0}}{1 + j\omega\tau_e}) = \underbrace{\varepsilon_0(1 + \frac{\xi_{e0}}{1 + \omega^2\tau_e^2})}_{\varepsilon'} - j\underbrace{\frac{\varepsilon_0\xi_{e0}\omega\tau_e}{1 + \omega^2\tau_e^2}}_{\varepsilon''}$$

4-15. Usando el criterio de $Q \leq 0,01$ para que un medio sea buen conductor y considerando la tierra con las siguientes constantes: $\sigma = 5 \times 10^{-3} S \cdot m^{-1}$; $\varepsilon_r = 5$; $\mu = \mu_0$.

- a) ¿ Cuál es la máxima frecuencia a la que la tierra es un buen conductor ?
- b) ¿ Cuáles son la profundidad de penetración y la longitud de onda a esta frecuencia ?
- c) Hallar Z/Z_0 .

4-16. Representar gráficamente, para $Q \in [0,1,10]$, la razón entre los valores medios de las densidades de energía eléctrica y magnética de una onda plana, homogénea y monocromática, que viaja a través de un medio lineal y no dispersivo.

SOLUCION:

$$\frac{\langle \omega_e \rangle}{\langle \omega_m \rangle} = \frac{\frac{1}{4}\varepsilon|\vec{E}|^2}{\frac{1}{4}\mu|\vec{H}|^2} = \frac{|\mathcal{Z}|^2}{|\mathcal{Z}_{m0}|^2}$$

donde se ha definido $\mathcal{Z}_{m0} \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = (\mathcal{Z})_{\sigma=0}$, con lo que

$$\frac{\langle \omega_e \rangle}{\langle \omega_m \rangle} = \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/Q^2}} \simeq \begin{cases} 1 - 1/(2Q^2) & \text{para } Q \gg 1 \\ 1/\sqrt{2} & \text{para } Q = 1 \\ Q & \text{para } Q \ll 1 \end{cases}$$

La gráfica está representada en la figura 4.16

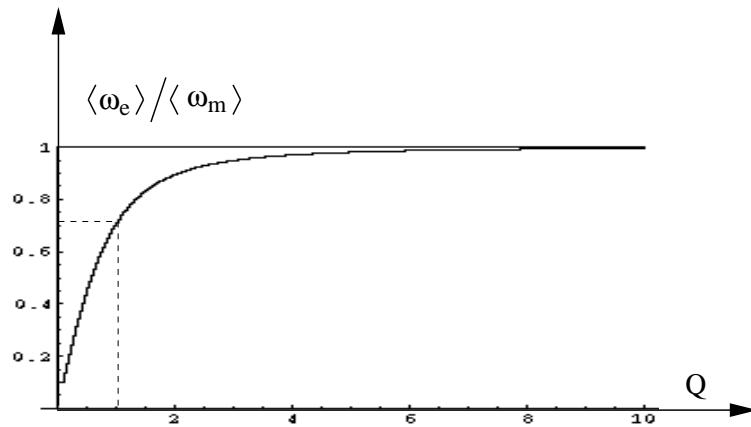


Figura 4.16:

4-17. El agua del mar a la frecuencia $f = 4 \times 10^8 \text{ Hz}$ tiene las siguientes características: $\sigma = 4,4 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$; $\epsilon_r = 81$; $\mu = \mu_0$.

- a) Calcular α y β .
- b) Aproximar dichas constantes considerando al medio como buen conductor y comparar los valores obtenidos con los del apartado anterior.
- c) ¿Y si se toma al agua de mar como buen dieléctrico?

4-18. El decibelio de atenuación se define como:

$$At_{Db} = 20 \log [E(z)/E(z = 0)] = 20 \log (e^{-\alpha z})$$

- a) Demostrar que $At_{Db} = 8,7 \alpha z$.
- b) Sea un material no magnético cuya constante dieléctrica $\epsilon_r = 9$ y cuya conductividad es $0,1 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ pudiéndose considerar independiente de la frecuencia. Calcular la atenuación en Db para una onda que se propaga 200 m en este material a las frecuencias (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$): $\omega_1 = 10^4$, $\omega_2 = 10^6$, $\omega_3 = 10^8$.

4-19. Determinar las pérdidas por Km sufrida por una onda plana, de frecuencia 0,5 Mhz, que se propaga a través de:

- a) Tierra húmeda ($\sigma = 10^{-3} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$; $\mu_r = 1$; $\epsilon_r = 10$).
- b) Tierra seca ($\sigma = 10^{-5}$; $\mu_r = 1$; $\epsilon_r = 3$).

4-20. Calcular, en función de δ , la distancia en un buen conductor para la cual la amplitud de una onda se atenúa hasta: a) un 1% ; b) un 0,1%.

4-21. Una onda plana y monocromática se propaga en un medio con $\mu = \mu_0$ y $\sigma = 0$. Determinar la constante dieléctrica relativa del medio si:

- a) La impedancia característica es de 200Ω .
- b) La longitud de onda es de 1.5 cm para una frecuencia de 10 GHz .

4-22. La relación de dispersión de las ondas planas y homogéneas en un plasma tenué y frío es

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \beta^2 c^2$$

donde ω_p es la frecuencia de plasma. Representar a la frecuencia ω , la velocidad de fase v_f y la velocidad de grupo v_g frente al número de onda β y a la longitud de onda λ .

SOLUCION:

Como se verá en otra parte, esta relación de dispersión es análoga a la de los modos (no homogéneos) TE y TM en una guía aunque responden a sistemas físicos distintos.

Las definiciones de las velocidades de fase y de grupo son

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad , \quad v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

por lo que

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c \quad \text{para} \quad \omega > \omega_p$$

Si se deriva con respecto a β la relación de dispersión, se tiene que

$$v_f \cdot v_g = c^2 \Rightarrow v_g = \frac{c^2}{v_f} < c \quad \text{para} \quad \omega > \omega_p$$

Como se comprueba en las figuras 4.17, ω_p es una "frecuencia de corte", a la cual el número de onda β se anula, la longitud de onda se hace infinita, la velocidad de fase toma también valor infinito y la de grupo se hace cero. Por debajo de dicha frecuencia todos los parámetros de propagación se hacen imaginarios, como puede comprobarse de las relaciones obtenidas, y la onda deja de propagarse (se dice que está en corte).

En 4.17-a puede verse la relación geométrica entre las velocidades en cuestión y la relación de dispersión y como, para $\omega \gg \omega_p$, éstas tienden a c , lo que significa que la onda se propaga como en el vacío y que el plasma no interviene en este proceso. Esto se debe a que, a dichas frecuencias, la inercia de los componentes del plasma dificulta la aceleración de los mismos y, por lo tanto, hace que su respuesta sea despreciable.

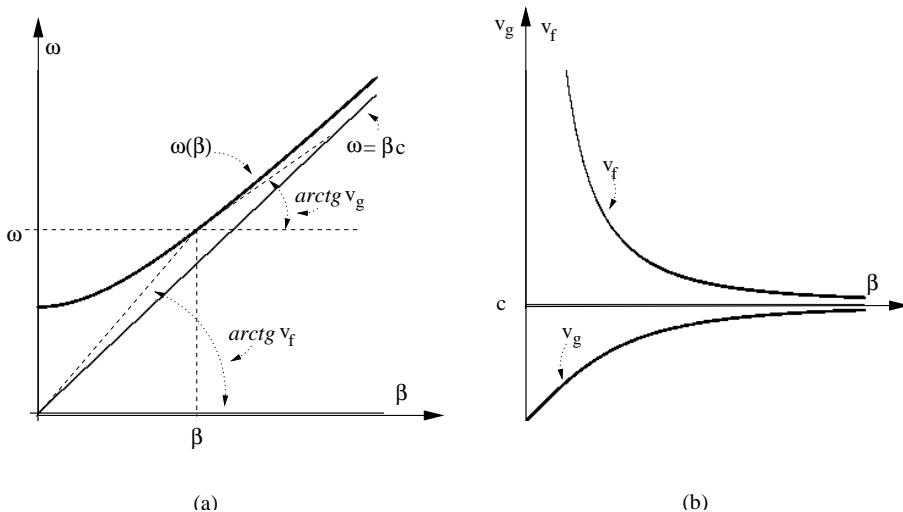


Figura 4.17:

- 4-23. Hallar la velocidad de fase y de grupo para una onda que se propaga a través de un medio dieléctrico de segundo orden para el cual para el cual $\chi_0 = 1$ y $v_d/w_{0d} = 0,1$ (Véase la sección C.2.1). Discutir los resultados obtenidos.

4-24. Comprobar las expresiones de las velocidades de fase y de grupo dadas en 4.118 y 4.119 para un buen dieléctrico.

4.7. Ejemplos con Mathematica

4.7.1. Resolución de las ecuaciones de Maxwell mediante el método FD-TD

33

A continuación se ilustra la solución numérica de la ecuación de ondas, en medios lineales y sin pérdidas, mediante el uso del método de las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FD-TD)³⁴.

4.7.1.1. Introducción

La ecuación de onda unidimensional :

Las ecuaciones rotacionales de Maxwell, para ondas que están polarizadas en la dirección del eje y y se propagan, en el vacío, a lo largo del eje x , pueden expresarse como

$$\frac{\partial E_y(x, t)}{\partial (ct)} = -\frac{\partial h_z(x, t)}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial h_z(x, t)}{\partial (ct)} = -\frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} \quad (\text{M.4.1})$$

para lo cual se ha normalizado al campo magnético multiplicándolo por la impedancia del vacío

$$h_z \equiv Z_0 H_z \quad , \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (\text{M.4.2})$$

Eliminando al campo magnético, o al eléctrico, de las ecuaciones anteriores, se obtienen las ecuaciones de onda para estos campos:

$$\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial (ct)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 h_z(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h_z(x, t)}{\partial (ct)^2} \quad (\text{M.4.3})$$

La solución general de las ecuaciones de onda que es compatible con las ecuaciones de Maxwell tiene la forma

$$E_y(x, t) = f(x - c t) + g(x + c t) \quad , \quad h_z(x, t) = f(x - c t) - g(x + c t) \quad (\text{M.4.4})$$

en la que f y g son funciones arbitrarias, aunque de buen comportamiento, que se propagan respectivamente en el sentido positivo y negativo del eje x .

³³Basado en un programa de S. González.

³⁴Finite Difference-Time Domain.

Para obtener la solución temporal a partir de las condiciones iniciales

$$E_y(x, 0) = f(x) + g(x) , , \quad h_z(x, 0) = f(x) - g(x) \quad (\text{M.4.5})$$

basta con sustituir los argumentos "x" de dichas funciones

$$f(x) = \frac{1}{2} (E_y(x, 0) + h_z(x, 0)) , , \quad g(x) = \frac{1}{2} (E_y(x, 0) - h_z(x, 0)) \quad (\text{M.4.6})$$

por "x ± c t".

Por ejemplo, si se excita inicialmente el espacio con un campo eléctrico de perfil gausiano

$$E_y(x, 0) = e^{-\frac{1}{a^2}(x-x_0)^2} , , \quad h_z(x, 0) = 0 \quad (\text{M.4.7})$$

la solución a lo largo del tiempo toma la forma

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= \frac{1}{2} (e^{-\frac{1}{a^2}(x-c t-x_0)^2} + e^{-\frac{1}{a^2}(x+c t-x_0)^2}) \\ h_z(x, t) &= \frac{1}{2} (e^{-\frac{1}{a^2}(x-c t-x_0)^2} - e^{-\frac{1}{a^2}(x+c t-x_0)^2}) \end{aligned} \quad (\text{M.4.8})$$

que representa a dos ondas de igual amplitud y que viajan en sentidos opuestos.

Por el contrario, si la excitación es del tipo

$$E_y(x, 0) = e^{-\frac{1}{a^2}(x-x_0)^2} , , \quad h_z(x, 0) = +E_y(x, 0) \quad (\text{M.4.9})$$

la solución temporal es una sola onda que viaja en la dirección $+\hat{x}$.

$$E_y(x, t) = e^{-\frac{1}{a^2}(x-c t-x_0)^2} , , \quad h_z(x, t) = e^{-\frac{1}{a^2}(x-c t-x_0)^2} \quad (\text{M.4.10})$$

Condiciones de contorno :

La solución numérica de un problema de este tipo solo es posible dentro de un recinto espacial finito $\mathcal{X} = [0 \leq x \leq L]$ en cuyos extremos deben aplicarse condiciones de contorno adecuadas.

En el primer ejemplo se supondrá a \mathcal{X} limitado por planos conductores ideales $x = 0$ y $x = L$. Según lo visto en el capítulo anterior, dado que el campo eléctrico es tangencial,

$$\underline{\text{Condiciones reflectantes}} : E_y(0, t) = 0 , , \quad E_y(L, t) = 0 \quad (\text{M.4.11})$$

En el segundo ejemplo se impondrán “Condiciones absorbentes”, con las cuales se representa la existencia en los puntos extremos de materiales perfectamente absorbentes (no reflectantes). Esto equivale a simular un dominio espacial infinito.

En un dominio ilimitado, las ondas que inciden desde el interior de \mathcal{X} sobre el punto $x = L$ son las $f(x - c t)$, que viajan en el sentido positivo del eje x . Por lo tanto,

$$E_y(L, t) = f(L - c t) \quad (\text{M.4.12})$$

Si el medio es homogéneo y las condiciones iniciales son nulas en las proximidades de este extremo, el campo en un punto cercano $x = L - \delta x$ tiene la misma forma

$$E_y(L - \delta x, t) = f(L - \delta x - c t) = f\left(L - c\left(t + \frac{\delta x}{c}\right)\right) \quad (\text{M.4.13})$$

porque se supone que en $x = L$ no hay reflexión.

Luego, la condición absorbente en este punto es

$$\underline{\text{Condición absorbente en } x = L} : E_y\left(L, t + \frac{\delta x}{c}\right) = E_y(L - \delta x, t) \quad (\text{M.4.14})$$

que describe el hecho de que la amplitud se propaga con velocidad c entre los dos puntos próximos.

Análogamente, dado que las ondas que inciden sobre el punto $x = 0$ lo hacen desde la izquierda,

$$\underline{\text{Condición absorbente en } x = 0} : E_y\left(0, t + \frac{\delta x}{c}\right) = E_y(\delta x, t) \quad (\text{M.4.15})$$

4.7.1.2. Comienzo de la sesión

Se comenzará comprobando que los campos M.4.8

$$\mathbf{E}\mathbf{y}[\mathbf{x}_-, \mathbf{t}_-] := (\mathbf{Exp}\left[-\frac{1}{\mathbf{a}^2}((\mathbf{x} - \mathbf{c} \mathbf{t}) - \mathbf{x0})^2\right] + \mathbf{Exp}\left[-\frac{1}{\mathbf{a}^2}((\mathbf{x} + \mathbf{c} \mathbf{t}) - \mathbf{x0})^2\right]); \quad (\text{M.4.16})$$

$$\mathbf{h}\mathbf{z}[\mathbf{x}_-, \mathbf{t}_-] := \frac{1}{2}(\mathbf{Exp}\left[-\frac{1}{\mathbf{a}^2}((\mathbf{x} - \mathbf{c} \mathbf{t}) - \mathbf{x0})^2\right] - \mathbf{Exp}\left[-\frac{1}{\mathbf{a}^2}((\mathbf{x} + \mathbf{c} \mathbf{t}) - \mathbf{x0})^2\right]); \quad (\text{M.4.17})$$

cumplen las condiciones iniciales M.4.7

$$\mathbf{Ey}[x, 0] \quad (\text{M.4.18})$$

$$\mathbf{hz}[x, 0] \quad (\text{M.4.19})$$

y son solución de las ecuaciones M.4.1

$$\text{Simplify}[\text{PowerExpand}\left[\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{Ey}[x, t] + \partial_x \mathbf{hz}[x, t]\right]] \quad (\text{M.4.20})$$

$$\text{Simplify}[\text{PowerExpand}\left[\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{hz}[x, t] + \partial_x \mathbf{Ey}[x, t]\right]] \quad (\text{M.4.21})$$

En adelante se definirán los campos de otra forma a la empleada hasta ahora, por lo que se anularán las definiciones anteriores

$$\text{Clear}[\mathbf{Ey}, \mathbf{hz}] \quad (\text{M.4.22})$$

4.7.1.3. Diferencias finitas centradas

Es posible resolver numéricamente las ecuaciones rotacionales de Maxwell mediante la aproximación de los operadores diferenciales por otros numéricos en diferencias centradas. Con este fin, se divide el espacio x en intervalos de longitud h y se define el operador derivada centrada de una función $v(x)$ de la forma

$$\mathbf{dcen}[\mathbf{v}_{-}[x]] := \frac{1}{2h} (\mathbf{v}[x+h] - \mathbf{v}[x-h]) \quad (\text{M.4.23})$$

Este operador aproxima al operador derivada hasta el segundo orden en h , como se comprueba a continuación:

Desarrollando en serie de Taylor a la función $f(x)$, alrededor del punto x_0 , y evaluándola en los puntos $x_0 \pm h$, respectivamente, se tiene

$$\mathbf{eq1} = \text{Series}[\mathbf{f}[x], \{x, x0, 3\}] /. x \rightarrow x0 + h \quad (\text{M.4.24})$$

$$\mathbf{eq2} = \text{Series}[\mathbf{f}[x], \{x, x0, 3\}] /. x \rightarrow x0 - h \quad (\text{M.4.25})$$

donde $eq1 = f(x_0 + h)$ y $eq2 = f(x_0 - h)$. Restando estos dos desarrollos, despreciando los restos de cuarto orden y despejando $f'(x_0)$

$$\text{Solve}[f[x_0 + h] - f[x_0 - h] == \text{Normal}[eq1] - \text{Normal}[eq2], f'[x_0]] \quad (\text{M.4.26})$$

Luego $dcen[f[x]]$ evaluado en x_0 es la aproximación de segundo orden en h de la derivada en dicho punto

$$dcen[f[x]]/.x \rightarrow x_0 \quad (\text{M.4.27})$$

4.7.1.4. Aplicación a la solución de las ecuaciones de Maxwell

Dominio numérico :

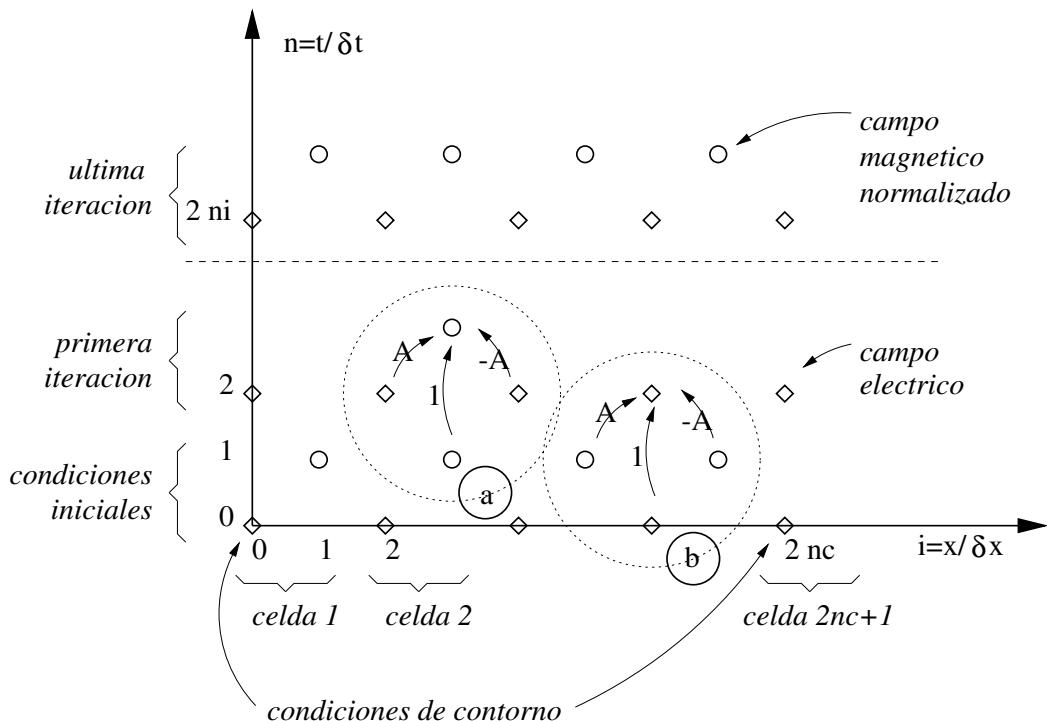


Figura 4.18: Red numérica FD-TD

Como se muestra en la figura 4.18, el espacio y el tiempo se discretizan a intervalos δx y δt de lo que resulta un dominio numérico constituido por los nudos

$$x = i\delta x \quad , \quad i = 0, \dots, 2nc$$

$$t = n\delta t \quad , \quad n = 0, \dots, 2ni + 1 \quad (\text{M.4.28})$$

Los nudos se agrupan por parejas, en "celdas", según la dirección espacial, y en "iteraciones" según la temporal. El campo eléctrico se evalúa en los nudos "pares" (i, n pares—En la figura "◊") y el magnético en los "impares" (i, n impares—En la figura "○"). nc es el número de celdas completas; en la última, $2nc - 1$, solo se toma la muestra del campo eléctrico. Los nudos de coordenadas $n = 0, 1$ (iteración 0) contienen a las condiciones iniciales, y el resto a las sucesivas iteraciones ($n = 1, \dots, 2ni$); en cada una de las iteraciones se calcula, mediante el algoritmo de avance temporal, primero el campo eléctrico y posteriormente el magnético.

Algoritmo de avance temporal :

Para obtener las expresiones que permiten calcular el campo en un instante determinado, en función de sus valores en el pasado, se procede de la siguiente forma:

El operador *decen* se generaliza para aproximar las derivadas parciales con respecto a cada una de estas variables:

$$\mathbf{DT}[\mathbf{f}_-[\mathbf{x}_-, \mathbf{t}_-]] := \frac{1}{2\delta \mathbf{t}} (\mathbf{f}[\mathbf{x}, \mathbf{t} + \delta \mathbf{t}] - \mathbf{f}[\mathbf{x}, \mathbf{t} - \delta \mathbf{t}]) \quad (\text{M.4.29})$$

$$\mathbf{DX}[\mathbf{f}_-[\mathbf{x}_-, \mathbf{t}_-]] := \frac{1}{2\delta \mathbf{x}} (\mathbf{f}[\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, \mathbf{t}] - \mathbf{f}[\mathbf{x} - \delta \mathbf{x}, \mathbf{t}]) \quad (\text{M.4.30})$$

El algoritmo que permite avanzar en el tiempo al campo eléctrico, en los distintos puntos de la red, se obtiene substituyendo a los operadores diferenciales por los correspondientes en diferencias en la primera de las ecuaciones M.4.1 y despejando $E_y(x, t + 2\delta t)$:

$$\mathbf{Solve}\left[\frac{1}{c} \mathbf{DT}[E_y[\mathbf{x}, \mathbf{t} + \delta \mathbf{t}]] == -\mathbf{DX}[\mathbf{hz}[\mathbf{x}, \mathbf{t} + \delta \mathbf{t}], E_y[\mathbf{x}, \mathbf{t} + 2\delta \mathbf{t}]]\right] \quad (\text{M.4.31})$$

El resultado anterior es $E_y(x, t + 2\delta t) = E_y(x, t) + A (h_z(x + \delta x, t + \delta t) - h_z(x - \delta x, t + \delta t))$ con lo que, como se indica en el círculo (a) de la figura 4.18, el campo eléctrico en un instante dado puede calcularse en función del mismo y del magnético en el pasado. El coeficiente que aparece en el segundo miembro es

$$A = \frac{c\delta t}{\delta x} \quad (\text{M.4.32})$$

Puede demostrarse que para que los algoritmos numéricos sean estables, es necesario que se cumpla la condición

$$\frac{\delta x}{\delta t} \geq c \quad (\text{M.4.33})$$

En adelante se tomará para dicho coeficiente el valor $A = 1$.

De forma análoga se obtiene la expresión de avance para el campo magnético despejando $h_z(x + \delta x, t + \delta t)$ a partir de la segunda de las ecuaciones M.4.1

$$\text{Solve}\left[\frac{1}{c} \mathbf{DT}[h_z[x + \delta x, t]] == -\mathbf{DX}[E_y[x + \delta x, t], h_z[x + \delta x, t + \delta t]]\right] \quad (\text{M.4.34})$$

La estructura del algoritmo se muestra dentro del círculo (b) de la figura 4.18

Condiciones iniciales y de contorno :

condiciones iniciales : Se imponen en los dos primeros instantes ($n = 0, 1$) (figura 4.18)

$$E_y(i, 0) = E_0(i) , , \quad i = 0, 2, \dots, 2nc$$

$$h_z(i, 1) = h_1(i) , , \quad i = 1, 3, \dots, 2nc - 1 \quad (\text{M.4.35})$$

condiciones de contorno : Se imponen a E_y en los extremos $n = 0$ y $n = 2nc$.

Condiciones reflectantes

$$E_y(0, n) = 0 , , \quad E_y(2nc, n) = 0 \quad (\text{M.4.36})$$

Condiciones absorbentes

$$E_y(0, n) = E_y(2, n - 2) , , \quad E_y(2nc, n) = E_y(2nc - 2, n - 2) \quad (\text{M.4.37})$$

4.7.1.5. Ejemplo 1º

En este ejemplo se simula una onda de perfil gausiano que viaja inicialmente hacia la derecha y que se refleja sucesivamente sobre dos planos conductores.

En M.4.9 se substituye $x = i \delta x$, $x_0 = nc \delta x$, $xa = na \delta x$ y $t = i \delta t$ y se elige δt , de acuerdo con el criterio de estabilidad, como $\delta t = \delta x/c$. De esta forma

$$f[i_-, n_-] = \text{Exp}\left[-\frac{1}{na^2} * ((i - n - nc)^2)\right]; \quad (\text{M.4.38})$$

Se asignan valores concretos a los parámetros del problema

$$nc = 30; ni = 60; na = 8; \quad (\text{M.4.39})$$

Los valores de los campos se almacenan en unas tablas de doble entrada cuyos elementos respectivos son $E_y(i, n)$ (para i, n pares) y $h_z(i, n)$ (para i, n impares).

Sus valores iniciales son

$$\text{Table}[Ey[i, 0] = N[f[i, 0]], \{i, 2, 2 * nc - 2, 2\}]; \quad (\text{M.4.40})$$

$$\text{Table}[hz[i, 1] = N[f[i, 1]], \{i, 1, 2 * nc - 1, 2\}]; \quad (\text{M.4.41})$$

Gráficamente (en rojo E_y y en azul h_z) :

$$\begin{aligned} grEy0 &= \text{ListPlot}[\text{Table}[\{i, Ey[i, 0]\}, \{i, 0, 2 * nc, 2\}], \\ &\quad \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{PointSize}[0.015], \text{RGBColor}[1, 0, 0]\}, \\ &\quad \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 1\}]; \end{aligned} \quad (\text{M.4.42})$$

$$\begin{aligned} grhz1 &= \text{ListPlot}[\text{Table}[\{i, hz[i, 1]\}, \{i, 1, 2 * nc - 1, 2\}], \\ &\quad \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{PointSize}[0.015], \text{RGBColor}[0, 0, 1]\}, \\ &\quad \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 1\}]; \end{aligned} \quad (\text{M.4.43})$$

$$\text{Show}[grEy0, grhz1]; \quad (\text{M.4.44})$$

Valores del campo eléctrico en la frontera :

$$\text{Table}[\{Ey[0, n] = 0, Ey[2 * nc, n] = 0\}, \{n, 0, 2 * ni\}]; \quad (\text{M.4.45})$$

El resto de los valores del campo se obtiene mediante las reglas de avance temporal

```
Table[ {Ey[i, n] = Ey[i, n - 2] - hz[i + 1, n - 1] + hz[i - 1, n - 1],
        hz[i - 1, n + 1] = hz[i - 1, n - 1] - Ey[i, n] + Ey[i - 2, n],
        hz[2 * nc - 1, n + 1] = hz[2 * nc - 1, n - 1] - Ey[2 * nc, n] + Ey[2 * nc - 2, n]}, {n, 2, 2 * ni, 2}, {i, 2, 2 * nc - 2, 2}];
```

(M.4.46)

Para visualizar la propagación del pulso electromagnético (en rojo E_y y en azul h_z) se representan los campos en cada instante temporal (h_z se multiplica por 0,9 para que no se solape con E_y) y se activa una de las gráficas pulsando doblemente al ratón.

```
Table[ Show[
    ListPlot[Table[{i, Ey[i, n]}, {i, 0, 2 * nc, 2}], PlotJoined -> True, PlotRange -> {-2, 1, 2, 1},
    DisplayFunction -> Identity, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}],
    ListPlot[Table[{i, 0.9 * hz[i, n + 1]}, {i, 1, 2 * nc - 1, 2}], PlotJoined -> True, PlotRange -> {-2, 1, 2, 1},
    DisplayFunction -> Identity, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1]}],
    DisplayFunction -> $DisplayFunction], {n, 0, 2 * ni, 2}];
```

(M.4.47)

4.7.1.6. Ejemplo 2º

```
Clear[Ey, hz]
```

(M.4.48)

En este caso se simula, junto con la onda del ejemplo anterior, otra que viaja en sentido contrario, y se utilizan las condiciones de frontera absorbentes. La segunda onda se define con un perfil que es el resultado de modular el gausiano de la primera con una función senoidal de periodo $T = 2 n0 \delta t$.

Se toman los valores

```
nc = 60; ni = 60; na = 8; n0 = 40;
```

(M.4.49)

Las funciones $f(x - ct)$ y $g(x + ct)$ son :

```
f[i_, n_] := Exp[-1/(na^2) * (i - n - nc)^2];
```

(M.4.50)

$$ge[i_, n_] := f[i, n] * 4 * Sin[(\frac{Pi * (i + n - nc))}{n0})]; \quad (M.4.51)$$

y sus perfiles para $t = 0$ ($n = 0$)

$$grge = \text{ListPlot}[\text{Table}[\{i, ge[i, 0]\}, \{i, 0, 2 * nc, 2\}], \text{PlotJoined} \rightarrow \text{True}, \text{PlotRange} \rightarrow \{-1, 2, 1, 2\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[0, 0, 1]\}]; \quad (M.4.52)$$

$$grf = \text{ListPlot}[\text{Table}[\{i, f[i, 0]\}, \{i, 0, 2 * nc, 2\}], \text{PlotJoined} \rightarrow \text{True}, \text{PlotRange} \rightarrow \{-1, 2, 1, 2\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[1, 0, 0]\}]; \quad (M.4.53)$$

$$\text{Show}[grf, grge]; \quad (M.4.54)$$

A partir de estas funciones se obtienen los valores iniciales de ambos campos

$$Ey0b = \text{Table}[Ey[i, 0] = N[f[i, 0] + ge[i, 0]], \{i, 0, 2 * nc, 2\}]; \quad (M.4.55)$$

$$hz1b = \text{Table}[hz[i, 1] = N[f[i, 1] - ge[i, 1]], \{i, 1, 2 * nc - 1, 2\}]; \quad (M.4.56)$$

y sus perfiles correspondientes

$$grEy0b = \text{ListPlot}[\text{Table}[\{i, Ey[i, 0]\}, \{i, 0, 2 * nc, 2\}], \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{PointSize}[0,015], \text{RGBColor}[0, 0, 1]\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{-1, 2\}]; \quad (M.4.57)$$

$$grhz1b = \text{ListPlot}[\text{Table}[\{i, hz[i, 1]\}, \{i, 1, 2 * nc - 1, 2\}], \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{PointSize}[0,015], \text{RGBColor}[1, 0, 0]\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{-1, 2\}]; \quad (M.4.58)$$

$$\text{Show}[grEy0b, grhz1b]; \quad (M.4.59)$$

Por último, se forman las tablas $E_y(i, n)$ y $h_z(i, n)$, se generan las gráficas temporales , como en M.4.47, y se animan. Para la primera tarea se emplea un lazo *Do* sobre la variable temporal (n) y se calculan los campos en los distintos puntos (i): mediante una orden *Table* se calcula el campo para todos los nudos interiores, salvo el campo magnético del $2nc - 1$. Este último, junto al campo eléctrico de los nudos de la frontera (condiciones absorbentes), se calculan fuera de la orden *Table*.

```

Do[{
  Table[{Ey[i, n] = Ey[i, n - 2] - hz[i + 1, n - 1] + hz[i - 1, n - 1],
         hz[i - 1, n + 1] = hz[i - 1, n - 1] - Ey[i, n] + Ey[i - 2, n]}, {
         {i, 2, 2 * nc - 2, 2}],
         hz[2 * nc - 1, n + 1] = hz[2 * nc - 1, n - 1] - Ey[2 * nc, n] + Ey[2 * nc - 2, n],
         Ey[0, n] = Ey[2, n - 2], Ey[2 * nc, n] = Ey[2 * nc - 2, n - 2}], {
         {n, 0, 2 * ni, 2}]}]
  
```

(M.4.60)

```

Table[Show[
  ListPlot[Table[{i, Ey[i, n]}, {i, 0, 2 * nc, 2}],
    PlotJoined -> True, PlotRange -> {-2, 2, 2, 2},
    DisplayFunction -> Identity, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}],
  ListPlot[Table[{i, 0.9 * hz[i, n + 1]}, {i, 1, 2 * nc - 1, 2}],
    PlotJoined -> True, PlotRange -> {-2, 2, 2, 2},
    DisplayFunction -> Identity, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1]}],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction], {n, 0, 2 * ni, 2}];]
  
```

(M.4.61)

Capítulo 5

Campos producidos por distribuciones de cargas y corrientes. Radiación

5.1. Introducción

Este capítulo se dedica al establecimiento de la relación entre el campo electromagnético y las cargas y corrientes que lo crean. Para este fin se hace uso de los potenciales retardados, los cuales son potenciales de Lorenz compatibles con el principio de causalidad. Se comienza por obtener la expresión de los potenciales producidos por distribuciones continuas de carga y, a partir de ésta, como caso particular, la de los producidos por una carga puntual en movimiento, o potenciales de Lienard-Wiechert.

Los campos se obtienen a partir de los potenciales. En primer lugar se lleva a cabo el cálculo exacto de los producidos por las distribuciones continuas y de sus aproximaciones para dos casos de especial interés: para los campos lejanos de radiación producidos por volúmenes de fuentes finitos, pero de tamaño eléctrico arbitrario, y para campos multipolares producidos por volúmenes eléctricamente pequeños. Por último, se analizan los campos debidos a cargas singulares y se introduce el problema crucial de la interacción de una carga puntual con su propio campo, donde se manifiesta el límite cuántico de aplicabilidad de la electrodinámica clásica.

5.2. Potenciales retardados

Como ya se ha apuntado, los potenciales retardados son aquellos potenciales de Lorenz cuyo estado es función del de las fuentes en instantes anteriores al de observación. Se comenzará por obtener una expresión válida para distribuciones continuas de carga y posteriormente se considerará el caso en el que dicha distribución corresponde a una carga puntual. En cualquier caso, se supone que las cargas y corrientes de la distribución, véase la figura 5.1, están contenidas en un

volumen \mathcal{V}' y representan a la totalidad de las cargas presentes, por lo que las constantes del medio corresponden a las del vacío¹.

5.2.1. Potenciales de una distribución continua

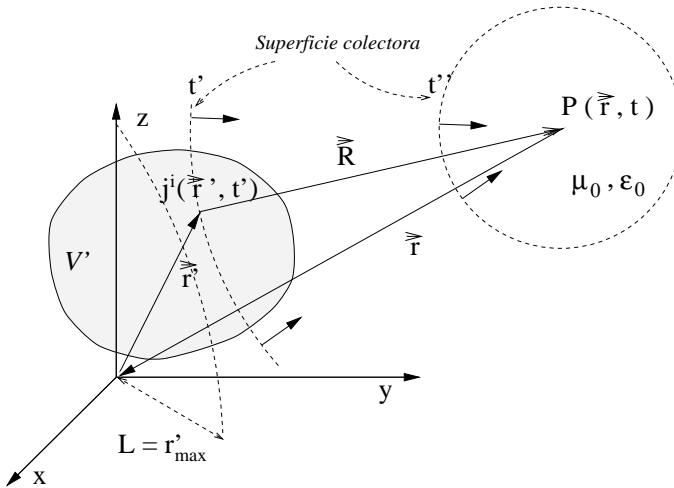


Figura 5.1: Distribución de fuentes

Una forma conveniente de calcular el campo electromagnético producido por una distribución de cargas y corrientes es a través de los potenciales retardados. Considérese, figura 5.1, la distribución acotada $j^i(\vec{r}', t')$, contenida en un volumen finito, cuya máxima distancia al origen $L = r'_{\max}$ también es finita. Las coordenadas de las fuentes son \vec{r}' y t' y las del punto de observación \vec{r} y t . $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ es el vector de posición relativa del punto de observación con respecto al punto fuente. Los vectores unitarios correspondientes se anotarán de la forma

$$\hat{\vec{R}} \equiv \frac{\vec{R}}{R} \quad , \quad \vec{n} \equiv \frac{\vec{r}}{r} \quad , \quad \hat{\vec{r}'} \equiv \frac{\vec{r}'}{r'} \quad (5.1)$$

Los *Potenciales retardados* son soluciones de la ecuación de onda para los potenciales de Lorenz 4.5

$$\boxed{\square} A^i(\vec{r}, t) = -\mu_0 j^i(\vec{r}, t) \quad (5.2)$$

que convergen a cero para $r \rightarrow \infty$ y que cumplen el principio de causalidad con respecto a las fuentes que los producen. Este problema puede resolverse recurriendo al método de Green en el dominio del tiempo, según el cual la solución se obtiene en dos etapas:

1^a - Búsqueda de la función de Green $G(\vec{r}, \vec{r}', t, t')$ del problema propuesto, como solución de la ecuación de Green

$$\boxed{\square} G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t') \quad (5.3)$$

¹Este convenio equivale a considerar $\vec{j} \rightarrow \vec{j}_T$ (véase el capítulo 3).

que cumple las mismas condiciones de contorno que el problema de partida pero corresponde a fuentes puntuales e instantáneas².

2^a - Obtención de A^i mediante la integral

$$A^i(\vec{r}, t) = \mu_0 \int_{t'=-\infty}^{\infty} \int_{\mathcal{V}'} j^i(\vec{r}', t') G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') dv' dt' \quad (5.4)$$

Al cumplir G las condiciones de contorno del problema, también las cumple A^i .

No es difícil verificar la expresión anterior. Si se multiplica la ecuación 5.3 por $\mu_0 j^i(\vec{r}', t')$ y se integra sobre \mathcal{V}' y t' , $\boxed{\quad}$ puede salir fuera de la integral² y

$$\boxed{\quad} \int_{t'} \int_{\mathcal{V}'} \mu_0 j^i(\vec{r}', t') G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') dt' dv' = -\mu_0 j^i(\vec{r}, t)$$

por lo que 5.4 es la solución buscada de 5.2.

Cabe recordar que la ventaja del método de Green reside en que, una vez resuelta la primera parte del problema, que suele ser más sencilla que el problema completo, mediante una simple integración se tiene la respuesta para toda una familia de problemas análogos, todos los cuales tienen las mismas condiciones de contorno pero responden a distribuciones de corriente distintas.

Función de Green :

Puesto que la fuente de la función de Green es puntual e instantánea, existirán soluciones con simetría esférica, función de $R \equiv |\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}'|$ y $\tau \equiv t - t'$. Para este tipo de soluciones

$$\boxed{\quad} G(R, \tau) = -\delta(R)\delta(\tau) \quad (5.5)$$

donde

$$\nabla^2 G = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (RG)}{\partial R^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}$$

Fuera del punto fuente $R \neq 0$ y la ecuación de 5.5 es homogénea

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 (RG)}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = 0$$

Multiplicando por R y definiendo $G' = RG$

$$\frac{\partial^2 (G')}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G'}{\partial \tau^2} = 0$$

² Nótese que $\boxed{\quad}$ opera sobre (\vec{r}, t) y que las fuentes están definidas en (\vec{r}', t') .

ecuación cuyas soluciones son bien conocidas:

$$\begin{aligned} G'(R, \tau) &= f(\tau - R/c) + g(\tau + R/c) \quad \Rightarrow \\ G(R, \tau) &= \frac{f(\tau - R/c)}{R} + \frac{g(\tau + R/c)}{R} = G_r(\tau - R/c, R) + G_a(\tau + R/c, R) \end{aligned} \quad (5.6)$$

El potencial resultante de sustituir G_a en 5.4, potencial adelantado, es función del estado de las fuentes en el futuro del instante de observación, por lo que no cumple el principio de causalidad. Aunque, en otro tipo de problemas, los potenciales adelantados pueden encontrar utilidad, las condiciones impuestas aquí los excluyen. Los potenciales retardados permiten la descripción de todos los fenómenos electromagnéticos salvo aquellos en los que se traspasan los límites de aplicabilidad de la electrodinámica clásica.

Esta solución general, retardada, de la ecuación homogénea, debe hacerse compatible con la existencia de fuentes puntuales e instantáneas. Si se desarrolla $f(\tau - R/c)$ en serie alrededor del origen $R = 0$

$$f(\tau - R/c) \simeq f(\tau) - \frac{1}{c}\dot{f}(\tau)R + \dots$$

donde $\dot{f} \equiv (\partial f / \partial R)_{R=0}$. De aquí se deduce que

$$\lim_{R \rightarrow 0} G(\tau, R) = \lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{f(\tau)}{R} - \frac{1}{c}\dot{f}(\tau)R + \dots \right] = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(\tau)}{R}$$

Bajo estas condiciones $G_0 \equiv f(\tau)/R$ es solución del límite estático de la ecuación de Green 5.5^{3, 4}.

$$\nabla^2 \left(\frac{f(\tau)}{R} \right) = \begin{cases} -\delta(R)\delta(\tau) \\ -4\pi\delta(R)f(\tau) \end{cases}$$

Resulta, en consecuencia, que $f(\tau) = \delta(\tau)/4\pi$. Pero el argumento de la función f es $\tau - R/c$ y $f(\tau) = [f(\tau - R/c)]_{R=0}$, luego

$$f(\tau - R/c) = \frac{\delta(\tau - R/c)}{4\pi}$$

y la función de Green buscada es

$$G(R, t - t') = \frac{\delta(t - t' - R/c)}{4\pi R} \quad (5.7)$$

³Cuando $R \rightarrow 0$, la derivada espacial $\partial G_0 / \partial R$ crece según R^{-2} mientras que la temporal $\partial G_0 / \partial \tau$ lo hace según R^{-1} , por lo que esta última es despreciable frente a la primera.

⁴ $\nabla^2(1/R) = -4\pi\delta(R)$.

Potenciales retardados :

Sustituyendo la función de Green 5.7 en 5.4 se tiene que⁵

$$A^i(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{t'=-\infty}^{\infty} \int_{\mathcal{V}'} \frac{j^i(\vec{r}', t')}{R} \delta(t' + \frac{R}{c} - t) dv' dt' \quad (5.8)$$

Integrando sobre t' se obtienen los potenciales retardados:

$$A^i(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{j^i(\vec{r}', t - R/c)}{R} dv' \quad (5.9)$$

La expresión tridimensional de éstos es

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} \frac{[\rho]}{R} dv' \quad (5.10a)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{[\vec{j}]}{R} dv' \quad (5.10b)$$

donde $[f] \equiv f(\vec{r}', t - R/c)$. En la figura 5.1 se representa a una superficie esférica, la superficie colectora de información, que se mueve con la velocidad de la luz y se colapsa en el instante t sobre el punto de observación: en su camino va detectando los valores de las densidades retardadas que habrá que introducir en las integrales de potencial⁶.

Los potenciales adelantados se expresan de forma análoga pero sustituyendo el retraso por adelanto.

Potenciales retardados en el dominio de la frecuencia :

En el dominio de la frecuencia

$$A^i(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} A^i(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{1}{R} \left[\frac{1}{2\pi} \int_t j^i(\vec{r}', t - R/c) e^{-j\omega t} dt \right] dv'$$

Cambiando a la variable $\alpha = t - R/c$ en la integral sobre t , con lo que $d\alpha = dt$, y escribiendo $k = \omega/c$

$$\phi(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} \rho(\vec{r}', \omega) \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad (5.11a)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \vec{j}(\vec{r}', \omega) \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad (5.11b)$$

donde puede apreciarse que el término $\exp(-jkR)$, de módulo unitario y fase $-arctg(\omega R/c)$, traduce el retraso temporal en un retraso de fase en función de la frecuencia.

⁵La delta de Dirac es una función simétrica.

⁶Problema 5-1.

5.2.2. Potenciales de Lienard-Wiechert

Los potenciales de Lienard-Wiechert son retardados; se deben a una partícula puntual cargada y en movimiento. Para obtener su expresión, se tomará como punto de partida a la 5.8, en la que aparecen las componentes del tetravector densidad de corriente y la función de Green retardada. En este caso se trata de una distribución singular que corresponde a una partícula de carga e y posición $\vec{r}_p(t')$ que se mueve con velocidad $\vec{v}_p(t') = d\vec{r}_p(t')/dt'$. Según 2.35, 2.24 y 2.26,

$$j^i(\vec{r}', t') = [c \rho(\vec{r}', t'), \vec{j}(\vec{r}', t')] = e [c, \vec{v}_p(t')] \delta[\vec{r}' - \vec{r}_p(t')] \quad (5.12)$$

Se supone a la partícula dentro de un volumen \mathcal{V}' , a distancia finita del observador, para $t' \in (-\infty, t)$, como se muestra en la figura 5.2.

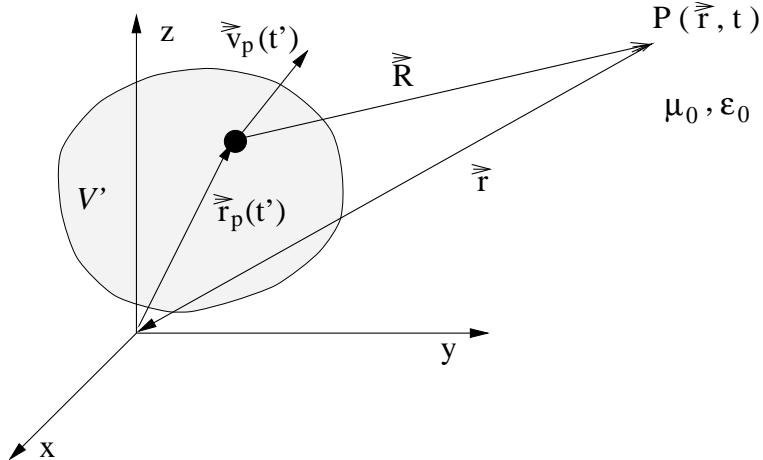


Figura 5.2: Distribución singular

La función de Green 5.7 se concreta en

$$G(R, t - t') = \frac{\delta(t' + R(\vec{r}, t')/c - t)}{4\pi R(\vec{r}, t')} , \quad R(\vec{r}, t') \equiv |\vec{r} - \vec{r}_p(t')| \quad (5.13)$$

Sustituyendo en 5.8

$$\begin{aligned} A^i(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} e \int_{t'=-\infty}^{\infty} \int_{\mathcal{V}'} \frac{[c, \vec{v}_p(t')]}{R(\vec{r}, t')} \delta(t' + \frac{R(\vec{r}, t')}{c} - t) \delta[\vec{r}' - \vec{r}_p(t')] dv' dt' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} e \int_{t'=-\infty}^{\infty} \frac{[c, \vec{v}_p(t')]}{R(\vec{r}, t')} \delta(t' + \frac{R(\vec{r}, t')}{c} - t) \left\{ \int_{\mathcal{V}'} \delta[\vec{r}' - \vec{r}_p(t')] dv' \right\} dt' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} e \int_{t'=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{[c, \vec{v}_p(t')]}{R(\vec{r}, t')}}_{(a)} \underbrace{\delta(t' + \frac{R(\vec{r}, t')}{c} - t)}_{(b)} dt' \end{aligned} \quad (5.14)$$

La integral sobre \mathcal{V}' es igual a la unidad si se exige que la partícula esté dentro de dicho volumen en el instante t' .

En la integración sobre t' , \vec{r} es un parámetro y puede considerarse $(a) = f(t')$. Por otra parte, $(b) = g(t')$ lo que no permite el uso directo de la regla integral de desplazamiento de la delta de Dirac. En este caso, véase la expresión 43.19 de [Spiegel et al.]⁷,

$$\int_{t'} f(t') \delta[g(t') - t] dt' = \sum_{t'_i} \left[\frac{f(t')}{|dg(t')/dt'|} \right]_{g(t'_i)=t} \quad (5.15)$$

donde t'_i son las raíces de la ecuación $g(t') = t$, para las cuales se anula el argumento de la delta de Dirac. Dado que

$$g(t') \rightarrow g(\vec{r}, t') = t' + \frac{1}{c} R(\vec{r}, t') \quad (5.16)$$

la ecuación a resolver es

$$R(\vec{r}, t') = |\vec{r} - \vec{r}_p(t')| = c(t - t') \quad (5.17)$$

, la cual tiene una sola raíz t_p , el *Tiempo retardado de la partícula*.

Efectivamente, si t_p es una raíz de la ecuación anterior, la norma del intervalo espacio-temporal

$$\Delta s^2 = c^2 |t - t_p|^2 - |\vec{r} - \vec{r}_p(t_p)|^2 = 0$$

es de tipo lumínico (véase la sección 1.5.1.1) luego, como se indica esquemáticamente en la figura 5.3, el punto de observación (ct, \vec{r}) y el $(ct_p, \vec{r}_p(t_p))$, ocupado por la partícula en t_p , están situados en la superficie de un mismo cono de luz. Por ser el potencial retardado, la partícula estará situada en dicho instante en el pasado del cono de luz del punto de observación. Dado que la partícula se mueve con velocidad inferior a la de la luz $v_p < c$, ésta solo puede atravesar a la superficie del semicono del pasado en un punto. Así, pues, la sumatoria de 5.15 se reduce a un único término.

Derivando 5.16⁸

$$\frac{\partial g(\vec{r}, t')}{\partial t'} = 1 + \frac{\partial R(\vec{r}, t')}{\partial t'} \equiv \sigma(\vec{r}, t') = 1 - \hat{R}(\vec{r}, t') \cdot \vec{\beta}_p(t') \quad (5.18)$$

donde $\vec{\beta}_p(t') \equiv \frac{\vec{v}_p(t')}{c}$.

σ puede ser interpretado como un factor de corrección para los potenciales retardados debido al movimiento de la partícula con respecto a la dirección \hat{R} de desplazamiento de la superficie colectora en la posición retardada $\vec{r}_p(t_p)$.

Sustituyendo en 5.14 y en 5.15

$$A^i(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} e \left[\frac{(c, \vec{v}_p(t'))}{R(\vec{r}, t') \sigma(\vec{r}, t')} \right]_{t'=t_p} = \frac{\mu_0}{4\pi} e \frac{(c, \vec{v}_p(t_p))}{R(\vec{r}, t_p) \sigma(\vec{r}, t_p)} \quad (5.19)$$

⁷ $\delta(h(x)) = \sum_{x_i} \frac{\delta(x-x_i)}{|dh(x_i)/dx|}$, donde x_i son los ceros de $h(x)$.

⁸ $\frac{\partial R}{\partial t'} = \frac{1}{2R} \frac{\partial \vec{R} \cdot \vec{R}}{\partial t'}$.

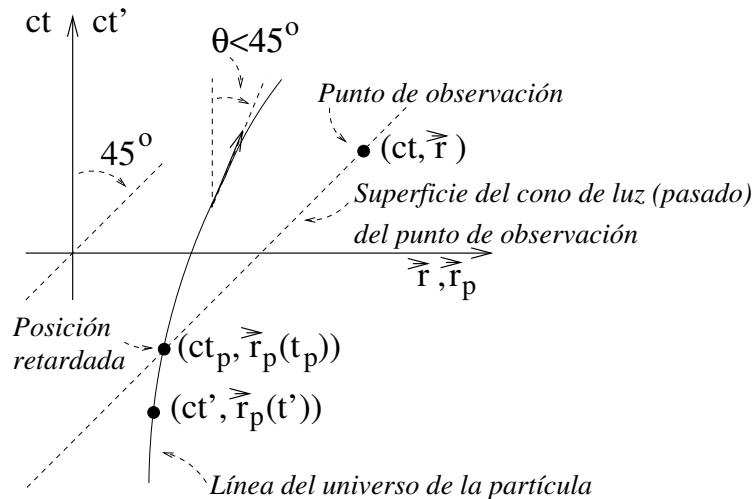


Figura 5.3: Tiempo retardado de la partícula

donde t_p es, como ya se ha dicho, el tiempo retardado de la partícula, tal que

$$R(\vec{r}, t_p) = c(t - t_p) \quad (5.20)$$

. También es el instante en el que los fotones emitidos por la partícula, en la dirección del punto de observación, llegan a este último precisamente en t .

En la notación tridimensional

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{R(\vec{r}, t_p) \sigma(\vec{r}, t_p)} \quad (5.21a)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e \vec{v}_p(t_p)}{R(\vec{r}, t_p) \sigma(\vec{r}, t_p)} = \frac{1}{c^2} \vec{v}_p(t_p) \phi(\vec{r}, t) \quad (5.21b)$$

Esta última expresión pone de manifiesto que el potencial vector tiene la dirección de la velocidad de la partícula en el instante retardado y es proporcional al potencial escalar.

5.3. Campo creado por una distribución de cargas

Conocidos los potenciales, los campos se obtienen mediante derivación de éstos con respecto a las coordenadas del punto de observación (\vec{r}, t):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \equiv -\nabla\Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial\vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (5.22a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) \equiv \nabla \wedge \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (5.22b)$$

En primer lugar se calcularán los campos producidos por una distribución continua y posteriormente los asociados a una carga puntual.

5.3.1. Campo creado por una distribución continua

Sustituyendo en 5.22 a los potenciales retardados 5.10 [Gómez-a]

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} \underbrace{\nabla \left(\frac{[\rho]}{R} \right)}_{(b)} dv' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int_{\mathcal{V}'} \frac{1}{R} \underbrace{\frac{\partial [\vec{j}]}{\partial t}}_{(a)} dv' \quad (5.23a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \underbrace{\nabla \wedge \left(\frac{[\vec{j}]}{R} \right)}_{(c)} dv' \quad (5.23b)$$

donde

$$[f] \equiv f(\vec{r}', \tau') \ , \ , \ \tau' \equiv t - R/c \ , \ , \ R = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (5.24)$$

A continuación se desarrollan y transforman estos términos con el objeto de obtener una expresión de los mismos que sea útil y significativa⁹.

En (a), (b) y (c) las derivaciones afectan a las coordenadas del punto de observación \vec{r} y t , pero no a \vec{r}' , por lo que el desarrollo de estos términos se reduce a la utilización de las reglas de derivación de función de función.

Las derivaciones de las funciones retardadas con respecto a t pueden ser sustituidas por derivaciones con respecto a τ' :

$$(a) = \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', \tau')}{\partial t} = \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', \tau')}{\partial \tau'} \frac{\partial \tau'}{\partial t} = \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', \tau')}{\partial \tau'} \equiv [\dot{\vec{j}}] \quad (5.25)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} (b) &= \nabla \rho(\vec{r}', \tau') \frac{1}{R} - \rho(\vec{r}', \tau') \frac{\nabla R}{R^2} = \frac{\partial \rho(\vec{r}', \tau')}{\partial \tau'} \nabla \tau' \frac{1}{R} - \rho(\vec{r}', \tau') \frac{\hat{R}}{R^2} \\ &= -\frac{\partial \rho(\vec{r}', \tau')}{\partial \tau'} \frac{\hat{R}}{c R} - \rho(\vec{r}', \tau') \frac{\hat{R}}{R^2} \end{aligned} \quad (5.26)$$

dado que

$$\nabla \tau' = -\frac{1}{c} \nabla R = -\frac{\hat{R}}{c} = -\nabla' \tau' \quad (5.27)$$

⁹Pueden obtenerse otras expresiones alternativas.

El término $\partial\rho/\partial\tau'$ puede ser sustituido haciendo uso de la ecuación de continuidad 2.28

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial\rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (5.28)$$

La traducción de esta ecuación a las variables \vec{r}' y τ' requiere cierta atención puesto que las variables \vec{r} y t son independientes y la aplicación de ∇ a $f(\vec{r}, t)$ no afecta a t (t se considera como constante en la aplicación de ∇). En el caso actual $\tau' = \tau'(t, \vec{r}, \vec{r}')$ no es una variable independiente para la aplicación de ∇' , por lo que la ecuación de continuidad debe ser escrita de la forma

$$\frac{\partial\rho(\vec{r}', \tau')}{\partial\tau'} = -\{\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}', \tau')\}_{\tau'=cte} \quad (5.29)$$

Aplicando las reglas de derivación de función de función

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}', \tau') &= \{\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}', \tau')\}_{\tau'=cte} + \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', \tau')}{\partial \tau'} \cdot \nabla' \tau' \\ &= \{\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}', \tau')\}_{\tau'=cte} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', \tau')}{\partial \tau'} \cdot \hat{R} \right) \end{aligned}$$

Volviendo a la notación compacta $[f] \equiv f(\vec{r}', \tau')$

$$\frac{\partial[\rho]}{\partial\tau'} = -\nabla' \cdot [\vec{j}] + \frac{1}{c} ([\dot{\vec{j}}] \cdot \hat{R})$$

e introduciendo este resultado en 5.26

$$(b) = (\nabla' \cdot [\vec{j}]) \frac{\hat{R}}{cR} - ([\dot{\vec{j}}] \cdot \hat{R}) \frac{\hat{R}}{c^2R} - [\rho] \frac{\hat{R}}{R^2} \quad (5.30)$$

Sustituyendo (a) y (b) en 5.23a¹⁰

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} [\rho] \frac{\hat{R}}{R^2} dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} ([\dot{\vec{j}}] \wedge \hat{R}) \wedge \frac{\hat{R}}{c^2R} dv' \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} (\nabla' \cdot [\vec{j}]) \frac{\hat{R}}{cR} dv'}_{(e)} \end{aligned} \quad (5.31)$$

La integral (e) puede transformarse a una forma más conveniente. Su componente α es

$$\begin{aligned} (e)_\alpha &= \int_{\mathcal{V}'} (\nabla' \cdot [\vec{j}]) \frac{R_\alpha}{cR^2} dv' = \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{V}'} \nabla' \cdot \left([\vec{j}] \frac{R_\alpha}{cR^2} \right) dv'}_{=0} - \int_{\mathcal{V}'} [\vec{j}] \cdot \nabla' \left(\frac{R_\alpha}{cR^2} \right) dv' \end{aligned}$$

¹⁰ $(\vec{a} \wedge \hat{e}) \wedge \hat{e} = \hat{e}(\vec{a} \cdot \hat{e}) - \vec{a}$.

El primer término del segundo miembro se anula porque puede calcularse, según el teorema de la divergencia, como el flujo a través de la superficie \mathcal{S}' , que envuelve a \mathcal{V}' , de $[\vec{j}] \{R_\alpha/(cR^2)\}$ y este término es nulo porque $([\vec{j}])_{\mathcal{S}'} = 0$. En cuanto al segundo término,

$$[\vec{j}] \cdot \nabla' \left(\frac{R_\alpha}{cR^2} \right) = [\vec{j}] \cdot \left\{ -\frac{\hat{e}_\alpha}{cR^2} + 2R_\alpha \frac{\hat{R}}{cR^3} \right\} = -\frac{[j_\alpha]}{cR^2} + 2R_\alpha \frac{[\vec{j}] \cdot \hat{R}}{cR^3}$$

ya que $\nabla' R_\alpha = \nabla'(x_\alpha - x'_\alpha) = -\hat{e}_\alpha$, donde \hat{e}_α es el vector unitario en la dirección α y $\nabla' R = -\hat{R}$. La combinación de las tres componentes de (e) da como resultado

$$(e) = \int_{\mathcal{V}'} \frac{[\vec{j}] - 2([\vec{j}] \cdot \hat{R}) \hat{R}}{cR^2} dv' \quad (5.32)$$

Para calcular el campo magnético, hay que desarrollar (c)¹¹

$$\begin{aligned} (c) &= \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \wedge [\vec{j}] + \frac{1}{R} \nabla \wedge [\vec{j}] = [\vec{j}] \wedge \left(\frac{\hat{R}}{R^2} \right) + \frac{1}{R} \nabla \tau' \wedge [\vec{j}] = \\ &= [\vec{j}] \wedge \left(\frac{\hat{R}}{R^2} \right) + [\dot{\vec{j}}] \wedge \frac{\hat{R}}{cR} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Por último, las expresiones buscadas se obtienen sustituyendo (e) en 5.31 y (c) en 5.23b¹²

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} \frac{[\rho] \hat{R}}{R^2} dv'}_{\vec{E}_C} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} \frac{2\hat{R}(\hat{R} \cdot [\vec{j}]) - [\vec{j}]}{cR^2} dv'}_{\vec{E}_i} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} \frac{([\dot{\vec{j}}] \wedge \hat{R}) \wedge \hat{R}}{c^2 R} dv'}_{\vec{E}_r} \end{aligned} \quad (5.34a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{[\vec{j}] \wedge \hat{R}}{R^2} dv'}_{\vec{B}_B} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{[\dot{\vec{j}}] \wedge \hat{R}}{cR} dv'}_{\vec{B}_r} \quad (5.34b)$$

\vec{E}_C tiene una forma similar a la del campo culombiano estático; decae, como éste, según R^{-2} pero es función del valor retardado de la densidad de carga, por lo que se denomina campo *Culombiano*

¹¹ $\nabla \wedge \vec{a}(u) = \nabla u \wedge \frac{d\vec{a}}{du}$.

¹² Para obtener las expresiones en el dominio de la frecuencia, basta con hacer las sustituciones $(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{r}, \omega)$, $[f] \rightarrow f(\vec{r}', \omega) \exp(-jkR)$ y $[\dot{f}] \rightarrow j\omega f(\vec{r}', \omega) \exp(-jkR)$.

retardado. \vec{E}_i tiene la misma dependencia R^{-2} que el anterior y es función de la densidad de corriente retardada; es el campo de *Inducción*. \vec{E}_r tiene una dependencia radial R^{-1} y es función de la derivada temporal de la densidad de corriente retardada. Es interesante hacer notar que la derivación espacial con respecto a las coordenadas del punto de observación se traduce en una derivación con respecto al tiempo τ' de las fuentes. Como se muestra en la figura 5.4, al diferenciar espacialmente en el punto de observación hay que comparar el valor de los potenciales en el mismo instante t pero en distintos puntos \vec{r} y $\vec{r} + \Delta\vec{r}$. Esto equivale a comparar las fuentes en un mismo punto \vec{r}' y en dos instantes distintos $\tau'_1 = t - R_1/c$ y $\tau'_2 = t - R_2/c$.

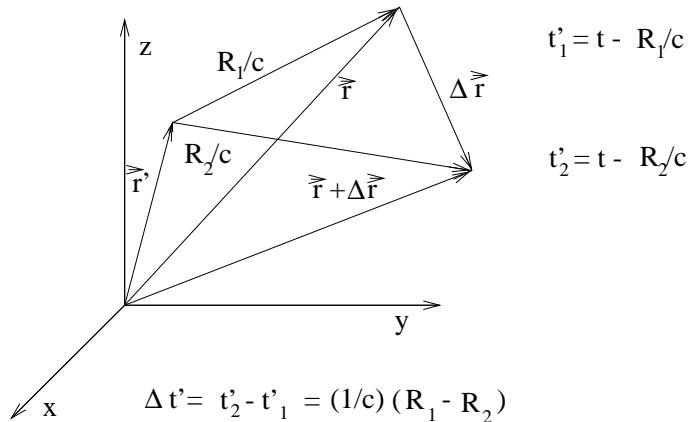


Figura 5.4: Derivación espacial - temporal

Para una onda monocromática

$$[\dot{\vec{j}}] \sim \omega[\vec{j}] \Rightarrow |\vec{E}_r|/|\vec{E}_i| \sim \frac{R}{cT} = \frac{R}{\lambda}$$

donde λ es la longitud de onda correspondiente a la máxima frecuencia significativa del espectro de las corrientes.

\vec{B}_B es el campo magnético cercano o de *Biot y Savart*, el cual es función de las corrientes retardadas $[\vec{j}]$ y decrece según R^{-2} ; será despreciable a larga distancia. \vec{B}_r , el campo de *Radiación*, es función de la derivada temporal de las corrientes retardadas $[\dot{\vec{j}}]$ y decrece con la distancia según R^{-1} , predominando sobre los anteriores a larga distancia de las fuentes. Para ondas monocromáticas

$$\frac{|\vec{B}_r|}{|\vec{B}_B|} \sim \frac{R}{cT} = \frac{R}{\lambda}$$

De acuerdo con ésto, \vec{E}_r y su homólogo magnético son los campos de radiación, los cuales predominan para distancias $R \gg \lambda$.

$$\vec{E}(\vec{r}, t)_{rad} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{([\dot{\vec{j}}] \wedge \hat{R}) \wedge \hat{R}}{c^2 R} dv' \quad (5.35a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t)_{rad} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{[\vec{j}] \wedge \hat{\vec{R}}}{cR} dv' \quad (5.35b)$$

A continuación se estudiarán los campos producidos por volúmenes \mathcal{V}' con diversos criterios de aproximación. En primer lugar se considera el caso de volúmenes radiantes de tamaño arbitrario, observados desde distancias muy superiores a la longitud de onda λ y a la distancia máxima L del mismo al origen y, en segundo lugar, se llevará a cabo el desarrollo multipolar de los campos producidos por distribuciones de corriente eléctricamente pequeñas ($L \ll \lambda$).

5.3.1.1. Campos lejanos de radiación; intensidad y potencia radiadas

Como ya se ha visto, son los campos de radiación los que predominan a distancias suficientemente grandes. Se deducirá una aproximación de los mismos, en el dominio de la frecuencia y para la zona lejana o de *Radiación*, definida como aquella en la que $r \gg \frac{L^2}{\lambda}$, $L \gg \lambda$, en la que no se limita el tamaño eléctrico de la distribución $l \equiv L/\lambda$.

Partiendo del potencial vector 5.11b en el dominio de la frecuencia, se aproxima el núcleo $f(R)$

$$f(R) = \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (5.36)$$

de la siguiente forma:

$$R = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} = r \sqrt{1 - 2 \vec{n} \cdot \frac{\vec{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}} = r \sqrt{1 - x} \simeq r \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots \right)$$

donde

$$x = 2 \vec{n} \cdot \vec{r}' \frac{r'}{r} - \frac{r'^2}{r^2}$$

Esta serie será convergente si $r'/r \ll 1$ y, por lo tanto, $|x| \ll 1$. Truncando por encima de los términos de segundo orden en r'/r

$$R \simeq r \left\{ 1 - \vec{n} \cdot \vec{r}' \frac{r'}{r} + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} [1 - (\vec{n} \cdot \vec{r}')^2] \right\}$$

Sustituyendo en la exponencial, se obtiene

$$e^{-jkR} \simeq e^{-jkr} e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} e^{-j\frac{1}{2}kr' \frac{r'}{r} [1 - (\vec{n} \cdot \vec{r}')^2]}$$

donde $\vec{k} = k \vec{n}$.

El segundo factor solo será $\simeq 1$ si $kr' \sim r'/\lambda \ll 1$, pero, en este caso, no se pretende limitar el tamaño eléctrico de \mathcal{V}' . Para poder aproximar a la unidad el argumento de la última exponencial, es

necesario que $kr'^2/r \ll 1$ o $r >> L^2/\lambda$. Por lo que respecta a $1/R$, si $r'/r \ll 1$ puede aproximarse en primer orden a $1/r$, con lo que

$$\frac{e^{-jkR}}{R} \simeq \frac{e^{-jkr}}{r} e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} \quad , \quad r \gg \frac{L^2}{\lambda} \text{ y } L \quad (5.37)$$

Estas condiciones no limitan el tamaño eléctrico de la distribución, salvo que éste debe ser finito, por lo que la expresión anterior constituye un punto de partida adecuado para el estudio de los campos de radiación de las antenas, en las que a menudo $L \sim \lambda$. De aquí se deduce que, en la zona de radiación

$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) \simeq \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{N}(\vec{n}, \omega) \Rightarrow \vec{N}(\vec{n}, \omega) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} j(\vec{r}', \omega) e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dv' \quad (5.38)$$

$\vec{N}(\vec{n}, \omega)$, el *Vector de radiación*, es función de la frecuencia y de la dirección de observación \vec{n} , es decir, de los ángulos θ y ϕ , puesto que $k = \frac{\omega}{c}$. Debido a ésto, el potencial y los campos tienen la forma de ondas esféricas no homogéneas. La fase $\varphi = \omega t - kr$ es función de r , pero la amplitud en las superficies de igual fase, $r = cte$, es función de θ y ϕ .

Además, el cálculo de los campos puede facilitarse con la aproximación

$$\nabla \rightarrow -j\vec{k} = -j\frac{\omega}{c} \vec{n} \quad , \quad r \gg \lambda, r' \quad (5.39)$$

Efectivamente, dado que $r \gg r'$, el punto de observación está fuera de \mathcal{V}' y $j(\vec{r}', \omega) = 0$, luego

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = \nabla \wedge \vec{A}(\vec{r}, \omega) \quad (5.40a)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{c^2}{j\omega} \nabla \wedge \vec{B}(\vec{r}, \omega) \quad (5.40b)$$

por lo que ambos campos pueden derivarse del potencial vector¹³.

De lo anterior se deduce que es necesario realizar operaciones del tipo¹⁴

$$\lim_{kr \gg 1} \frac{\partial f(r)}{\partial x_\alpha} = -jkn_\alpha f(r)$$

donde $f(r) = f(R)_{r'=0}$, y

$$\lim_{r \gg r'} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} e^{jkr} = \lim_{r \gg r'} jk \left(\frac{x'_\alpha}{r} - (\vec{n} \cdot \frac{\vec{r}'}{r}) n_\alpha \right) e^{jkr} = 0$$

De esta forma es fácil de ver que 5.39 es aplicable y que los campos lejanos de radiación pueden ser aproximados por

¹³Téngase en cuenta, sin embargo, que $\vec{E} \neq -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

¹⁴Véase el problema 5-2.

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, \omega) &\simeq -jk\vec{k} \wedge \vec{A}(\vec{r}, \omega) = -jk\vec{n} \wedge \vec{A}(\vec{r}, \omega) = \\ &= -jk \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{n} \wedge \vec{N}(\vec{n}, \omega)\end{aligned}\quad (5.41a)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) \simeq c \vec{B}(\vec{r}, \omega) \wedge \vec{n} \quad (5.41b)$$

Estas ecuaciones describen una relación de estructura, para los campos de radiación, análoga a la de las ondas planas homogéneas. El campo de radiación lejano es transversal, de forma que \vec{E} , \vec{B} y \vec{n} , forman un triángulo rectángulo a derechas y $E = cB$. Por otra parte, el campo magnético es también perpendicular al potencial vector.

Pasando al dominio del tiempo y teniendo en cuenta que $k = \frac{\omega}{c}$

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \int_{\omega} \vec{B}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{-1}{cr} \vec{n} \wedge \int_{\omega} j\omega \vec{N}(\vec{n}, \omega) e^{j\omega(t-r/c)} d\omega \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{cr} [[\dot{\vec{N}}]] \wedge \vec{n}\end{aligned}\quad (5.42)$$

donde

$$\begin{aligned}[[\dot{\vec{N}}]] &= \int_{\omega} j\omega \vec{N}(\vec{n}, \omega) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} d\omega \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \int_{\omega} j\omega \vec{j}(\vec{r}', \omega) e^{j\omega(t-\frac{r-\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c})} dv' d\omega = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \{j\} dv'\end{aligned}$$

es $\frac{\partial N}{\partial t}$, evaluada en el tiempo retardado del origen $t - \frac{r}{c}$, $[[f]] \equiv f(t - \frac{r}{c})$, y la corriente es evaluada en la aproximación de primer orden en $\frac{r'}{r}$ del retraso correspondiente al punto fuente, $\{f\} \equiv f(t - \frac{r - \vec{n} \cdot \vec{r}'}{c})$.

Potencia e intensidad :

El vector de Poynting de estos campos caracteriza al fenómeno de *Radiación* como aquel por el cual el volumen de fuentes pierde energía de forma irreversible.

En el dominio del tiempo

$$\vec{s}(\vec{r}, t) = \frac{c}{\mu_0} (\vec{B}(\vec{r}, t) \wedge \vec{n}) \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{c}{\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}, t) \vec{n} = \frac{1}{\mu_0 c r^2} [[\dot{\vec{N}}]] \wedge \vec{n}^2 \vec{n} \quad (5.43)$$

relaciones en las que se pone de manifiesto que este vector tiene la misma dirección y el mismo sentido que \vec{n} y que decrece explícitamente con la distancia al origen según el inverso del cuadrado

$$\vec{\mathcal{S}} \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \uparrow \vec{n} \\ \sim r^{-2} \end{array} \right.$$

aunque es necesario tener en cuenta que también depende de \vec{r} a través de la evaluación retardada [1]. En la figura 5.5 se muestra como un sistema radiante emite un pulso electromagnético y como, a lo largo de su propagación, la amplitud de su energía se atenúa según r^{-2} y el campo va ocupando volúmenes que crecen según r^2 . La energía total transportada se conserva pero la dependencia radial es del tipo $(1/r^2) f(t - r/c)$.

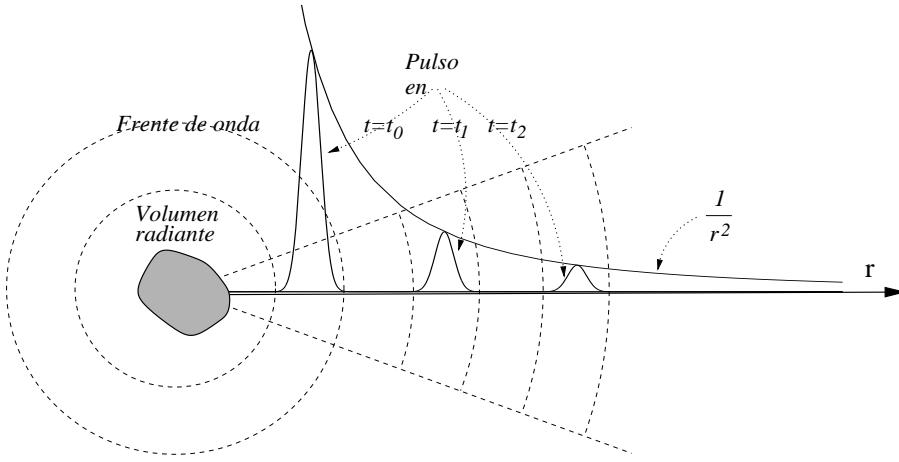


Figura 5.5: Radiación de un pulso electromagnético

El valor medio de la potencia radiada por unidad de superficie es

$$\langle \vec{\mathcal{S}} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{\mathcal{S}}^c] = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}, \omega) \wedge \vec{B}^*(\vec{r}, \omega)] = \frac{ck^2}{2\mu_0 r^2} |\vec{n} \wedge \vec{N}(\vec{n}, \omega)|^2 \vec{n} \quad (5.44)$$

. En el dominio de la frecuencia, correspondiente a un estado estacionario senoidal, la dependencia del retardo desaparece y solo queda la explícita r^{-2} .

Se suele definir la *Intensidad de radiación* como la potencia radiada por unidad de ángulo sólido

$$\mathcal{I}(\vec{r}, t) = \frac{d\mathcal{P}(\vec{r}, t)}{d\Omega} \quad , \quad d\Omega = \frac{\vec{n} \cdot d\vec{s}}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi \quad (5.45)$$

La potencia total radiada, a través de una superficie de radio r , puede calcularse a partir de $\vec{\mathcal{S}}$ o de \mathcal{I}

$$\mathcal{P}(r, t) = \int_{r=cte} \vec{\mathcal{S}}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \int_{\Omega} \mathcal{I}(\vec{r}, t) d\Omega = \int_S \frac{\mathcal{I}(\vec{r}, t) \vec{n}}{r^2} \cdot d\vec{s} \quad (5.46)$$

de donde se deduce que la intensidad en el domio del tiempo es

$$\mathcal{I}(\vec{r}, t) = (\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{S}}(\vec{r}, t)) r^2 = \quad (5.47)$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} |[[\dot{\vec{N}}]] \wedge \vec{n}|^2 \quad (5.48)$$

no solo depende del tiempo, sino que también depende de \vec{r} debido a la evaluación retardada de $\dot{\vec{N}}$.

Por el contrario, en el dominio de la frecuencia, el valor medio de la intensidad

$$\langle \mathcal{I} \rangle = (\vec{n} \cdot \langle \vec{\mathcal{S}} \rangle) r^2 = \quad (5.49)$$

$$= \frac{ck^2}{2\mu_0} |\vec{n} \wedge \vec{N}(\vec{n}, \omega)|^2 \quad (5.50)$$

solo depende de la frecuencia, por lo que toda la potencia emitida es radiada hacia el infinito y perdida de forma irreversible por el volumen radiante.

5.3.1.2. Antenas lineales

Unas distribuciones de carga radiante, que presentan un gran interés práctico, son las antenas. El cálculo de los campos de radiación producidos por éstas es, en general, complicado. Supone la resolución de un problema autoconsistente en el que deben hallarse al mismo tiempo las corrientes que circulan por la antena y los campos producidos. Un caso relativamente sencillo es el de las antenas de hilo, construidas con cable conductor de diámetro despreciable. A modo de ejemplo, se considera la antena lineal simétrica (Antena dipolo) que se muestra en la figura 5.6. En la figura 5.7 se representa a la antena, con objeto de ilustrar sus propiedades más características, como derivada de una línea de transmisión bifilar abierta en la que la distancia entre conductores se supone muy pequeña con respecto a la longitud de onda.

En principio, la guía está en abierto por lo que la intensidad en su extremo es nula y su dependencia de z es la correspondiente a una onda estacionaria¹⁵. Puede considerarse que la antena se forma doblando una sección terminal de los cables en ángulo recto con objeto de adaptar las ondas al espacio externo.

En la figura 5.6 se presenta la geometría de la línea para el cálculo del vector de radiación 5.38

$$\vec{N}(\vec{n}, \omega) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \vec{j}(\vec{r}', \omega) e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dv' \quad (5.51)$$

La distribución de corriente, que se supone armónica, es lineal, de longitud $L = 2l$ y está definida en el eje z , por lo que habrá que substituir $\vec{j}(\vec{r}', \omega) dv'$ por $I(z', \omega) \hat{z} dz'$ en la integral.

¹⁵Para que la onda sea estacionaria, es necesario que la guía no radie una fracción significativa de su energía a través de la abertura. Esto es aproximadamente cierto en la línea, si $d \ll \lambda$, pero no en el caso en que ésta se abra para formar una antena.

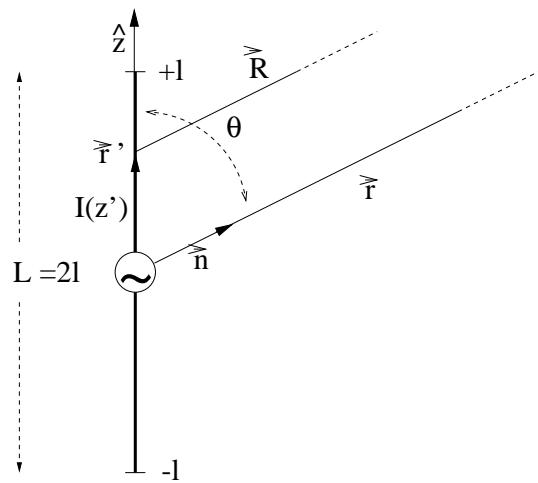


Figura 5.6: Antena lineal simétrica

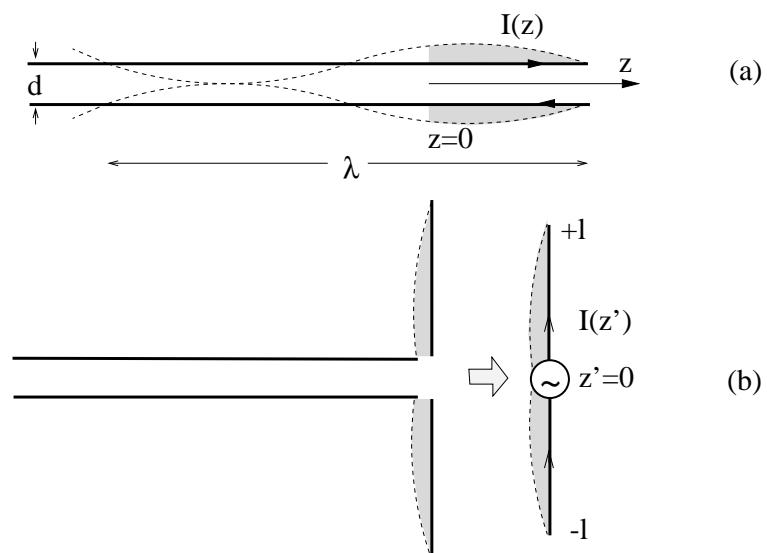


Figura 5.7: La antena como línea abierta

Para hallar los campos de radiación es necesario conocer la distribución espacial de la intensidad de corriente y tampoco en este caso el problema es simple. Una primera aproximación de $I(z')$ que, aunque responde a hipótesis intuitivas, se aproxima bastante a la realidad, puede obtenerse considerando el proceso descrito en la figura 5.7. Con este fin se emiten las siguientes hipótesis:

- Puesto que en los extremos de la antena no existe ninguna estructura capaz de almacenar carga, la intensidad en los mismos debe anularse: $I(|z'| = l) = 0$.
- Dada la simetría, la corriente es continua en el origen: $I(z' = 0_+) = I(z' = 0_-)$
- La dependencia de z' es aproximadamente senoidal:

$$I(z') \simeq \begin{cases} I_0 \operatorname{sen} k(l - z') & , , \quad z' > 0 \\ I_0 \operatorname{sen} k(l + z') & , , \quad z' < 0 \end{cases} \quad (5.52)$$

- Se supone que k es aproximadamente igual al número de onda de las ondas planas en el espacio libre. Supuesto que éste es el vacío, $k \simeq \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

Puede demostrarse, teórica y prácticamente, que, en la mayoría de las aplicaciones, estas hipótesis dan una aproximación adecuada de la corriente que circula por una antena de este tipo.

Bajo estos supuestos, el vector de onda puede obtenerse mediante la integral

$$\begin{aligned} \vec{N}(\vec{n}, \omega) &= \hat{z} \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \left\{ \int_{-l}^0 \operatorname{sen} k(l + z') e^{jkz' \cos \theta} dz' + \int_0^l \operatorname{sen} k(l - z') e^{jkz' \cos \theta} dz' \right\} = \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi k \operatorname{sen} \theta} F(\theta) \end{aligned} \quad (5.53)$$

$F(\theta, \phi)$ es el *Factor de antena*. En este caso¹⁶

$$F(\theta) = \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)}{\operatorname{sen} \theta} \quad (5.54)$$

De 5.41b y 5.41a se deduce que los campos tienen la forma

$$\vec{E} = E_\theta \hat{\theta} , , \quad \vec{H} = H_\varphi \hat{\varphi} \quad (5.55)$$

$$E_\theta = j \frac{Z_0 I_0}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} F(\theta) = H_\varphi Z_0 \quad (5.56)$$

El factor de antena describe, por lo tanto, la distribución direccional de los campos y su cuadrado la de la energía radiada. La potencia media radiada por la antena es, según 5.44,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re}[\vec{S}^c] \cdot d\vec{s} = \frac{Z_0 I_0^2}{4\pi} \int_0^\pi |F(\theta)|^2 \operatorname{sen} \theta d\theta \quad (5.57)$$

¹⁶Problema 5-5.

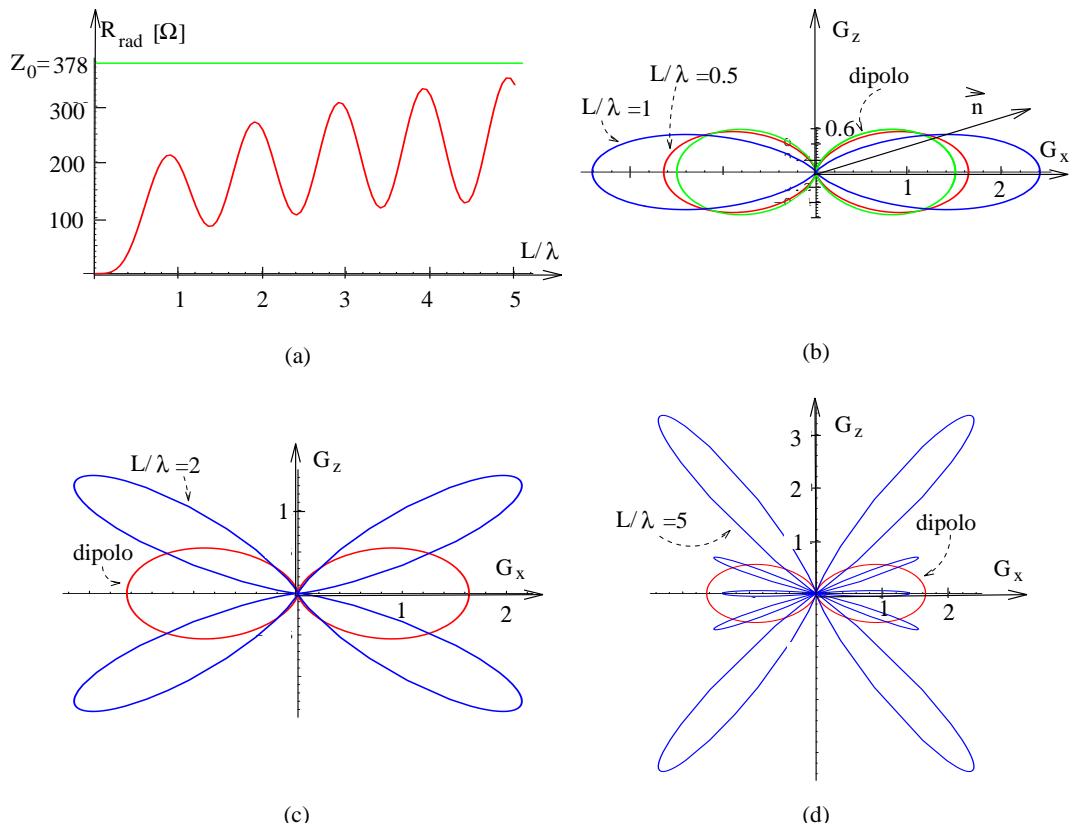


Figura 5.8: Resistencia y directividad

Para dar una medida de la eficacia de una antena como emisora se define la *Resistencia de radiación*

$$R_{rad} \equiv \frac{2\langle P \rangle}{I_0^2} = \frac{Z_0}{2\pi} \int_0^\pi |F(\theta)|^2 \sin \theta \, d\theta \quad (5.58)$$

Otro parámetro interesante es la *Ganancia directiva* $G(\theta, \varphi)$ que describe como la potencia radiada se distribuye en las distintas direcciones del espacio. Se define como la intensidad media (temporal) normalizada: la potencia media radiada por unidad de ángulo sólido, en una dirección determinada, dividida por el valor medio de dicha magnitud para todas las direcciones espaciales:

$$G(\theta, \varphi) \equiv \frac{\langle I \rangle(\theta, \varphi)}{\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \langle I \rangle d\Omega} \quad (5.59)$$

Su valor máximo D se conoce como la *Directividad* de la antena. Esta es igual a la unidad cuando el radiador es isótropo e infinita cuando toda la energía es emitida en una sola dirección.

En el caso presente,

$$G(\theta) = \frac{2|F(\theta)|^2}{\int_0^\pi |F(\theta)|^2 \sin \theta \, d\theta} \quad (5.60)$$

La figura 5.8a muestra como las antenas muy pequeñas, los dipolos eléctricos, son poco eficaces puesto que su resistencia de radiación es pequeña. Esta crece rápidamente cuando la longitud de la antena se acerca al valor $L \simeq \lambda$ y presenta máximos para longitudes que son múltiplos enteros de la anterior. Las figuras 5.8b-c-d son diagramas polares¹⁷ de la ganancia directiva para distintas antenas. Como referencia en cada gráfica se incluye la ganancia de la menos directiva, es decir, la del dipolo eléctricamente corto ($L \ll \lambda$).

5.3.1.3. Desarrollo multipolar en coordenadas cartesianas

El campo electromagnético, producido por distribuciones de corriente eléctricamente pequeñas y observado desde fuera de las mismas, puede ser descompuesto en términos multipolares de forma análoga, en cierto sentido, a la utilizada en el caso de los campos estáticos. Este desarrollo se diferencia del estático en que, aunque se realiza en función de los mismos parámetros multipolares, los campos correspondientes tienen una dependencia radial diferente. En las cercanías de la distribución se observa un campo multipolar de tipo estático, cuyos parámetros varían con el tiempo, pero a gran distancia todos los términos multipolares decaen según r^{-1} . También cabe diferenciar el tipo de aproximación que aquí se realiza con respecto al utilizado en la sección anterior, puesto que ahora las fuentes deben estar contenidas en un volumen eléctricamente pequeño pero pueden ser observadas desde puntos externos cercanos. A continuación se aborda este desarrollo empleando un sistema de coordenadas cartesianas.

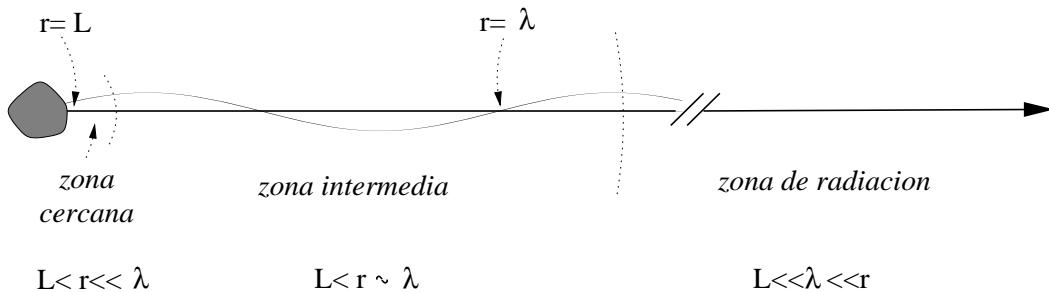


Figura 5.9: Zonas del campo multipolar

Se distinguirán tres zonas, como se muestra en la figura 5.9:

- $L < r \ll \lambda$ = cercana (cuasiestática)¹⁸.
- $L < r \sim \lambda$ = intermedia (de inducción).
- $L \ll \lambda \ll r$ = de radiación (lejana).

aunque se prestará atención preferente a la zona de radiación.

Puesto que el punto de observación es externo a la distribución, pueden utilizarse 5.41a y 5.41b y obtener los campos a partir del potencial vector 5.11b. Como en el estudio de los campos lejanos

¹⁷ $G_x = G \sin \theta$ y $G_z = G \cos \theta$.

¹⁸ La convergencia del desarrollo multipolar solo exige que $L < r, \lambda$, por lo que en un sistema radiante concreto, pueden no darse las condiciones de zona cercana.

realizado en las secciones anteriores, en la zona de radiación puede substituirse al operador rotacional por el producto vectorial por $-jk\vec{n}$.

Anotando

$$\begin{aligned} f(U) &= \frac{e^{-U}}{U} \quad , , \quad U = jkR \quad , , \quad u = jkr \quad , , \quad u' = jkr' \\ \vec{u} &= u\vec{n} \quad , , \quad \vec{u}' = u'\hat{r}' \quad , , \quad \vec{U} = U\hat{R} = \vec{u} - \vec{u}' \end{aligned} \quad (5.61)$$

el potencial puede escribirse como

$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) = jk \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \vec{j}(\vec{r}', \omega) f(U) dv'$$

Desarrollando en serie el núcleo de la integral alrededor del origen de coordenadas $\vec{r}' = 0$ y conservando solo los primeros términos del desarrollo

$$f(U) \simeq f(u) + \vec{r}' \cdot \{\nabla' f(U)\}_{\vec{r}'=0}$$

Por otra parte

$$\nabla' f(U) = jk f(U) \left(1 + \frac{1}{U}\right) \hat{R} \Rightarrow \{\nabla' f(U)\}_{\vec{r}'=0} = jk f(u) \left(1 + \frac{1}{u}\right) \vec{n} \quad (5.62)$$

$$f(U) \simeq f(u) + f(u) \underbrace{\left(1 + \frac{1}{u}\right)}_{(a)} \vec{u}' \cdot \vec{n} + \underbrace{\frac{1}{u}}_{(b)} \vec{u}' \cdot \vec{n} \quad (5.63)$$

Esta aproximación requiere que tanto (a) $\rightarrow \vec{u}' \cdot \vec{n} \sim L/\lambda$, como (b) $\rightarrow (\vec{u}' \cdot \vec{n})/u \sim L/r$, sean magnitudes pequeñas, es decir, $L \ll r, \lambda$. La convergencia de la serie se asegura con tal de que $L < r, \lambda$.

Como es fácil de comprobar, también se cumplen las relaciones

$$\nabla f(U) = -\nabla' f(U) = -jk f(U) \left(1 + \frac{1}{U}\right) \hat{R} \quad y \quad \nabla f(u) = -jk f(u) \left(1 + \frac{1}{u}\right) \vec{n} \quad (5.64)$$

Hasta este orden de aproximación

$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) \simeq \underbrace{jk \frac{\mu_0}{4\pi} f(u) \int_{\mathcal{V}'} \vec{j}(\vec{r}', \omega) dv'}_{(A)} - \quad (5.65)$$

$$\underbrace{-k^2 \frac{\mu_0}{4\pi} f(u) \left(1 + \frac{1}{u}\right) \int_{\mathcal{V}'} \vec{j}(\vec{r}', \omega) (\vec{r}' \cdot \vec{n}) dv'}_{B} \quad (5.66)$$

De cada uno de estos términos se deducen los campos:

A → Dipolar eléctrico.

B → Dipolar magnético y cudripolar eléctrico.

Campo dipolar eléctrico :

5.65 puede expresarse en función de la densidad de carga mediante el uso de la ecuación de continuidad 2.28. Si se integra sobre \mathcal{V}' la componente α de la densidad de corriente

$$\int_{\mathcal{V}'} j_\alpha dv' = \underbrace{\int_{\mathcal{V}'} \nabla' \cdot (x'_\alpha \vec{j}) dv'}_{=0} - \int_{\mathcal{V}'} x'_\alpha \nabla' \cdot \vec{j} dv' = \int_{\mathcal{V}'} x'_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial t'} dv'$$

donde se ha utilizado el teorema de la divergencia y se ha tenido en cuenta que \mathcal{V}' contiene a todas las corrientes. Uniendo las tres componentes, pasando al dominio de la frecuencia y escribiendo la densidad espectral del momento dipolar eléctrico como \vec{d}_ω

$$\int_{\mathcal{V}'} \vec{j}(\vec{r}', \omega) dv' = j\omega \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \rho(\vec{r}', \omega) dv' = j\omega \vec{d}_\omega \quad (5.67)$$

por lo que, sustituyendo en 5.65

$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) = -k^2 \frac{\mu_0 c}{4\pi} f(u) \vec{d}_\omega \quad (5.68)$$

que es el potencial vector dipolar eléctrico.

\vec{d}_ω es un vector constante, luego $\nabla \wedge \vec{d}_\omega = 0$ y

$$\nabla \wedge \{f(u) \vec{d}_\omega\} = \nabla f(u) \wedge \vec{d}_\omega$$

De acuerdo con 5.64 y 5.40a

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = jk^3 \frac{\mu_0 c}{4\pi} f(u) \left(\underbrace{\frac{1}{r}}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{u}}_{(2)} \right) (\vec{n} \wedge \vec{d}_\omega) \quad (5.69)$$

Este es el campo magnético *Dipolar eléctrico*, que incluye al de radiación (1), con dependencia r^{-1} , y al de Biot y Savart (2) con dependencia r^{-2} .

De nuevo, el cálculo del campo eléctrico es más laborioso. Partiendo de 5.40b

$$\begin{aligned} \nabla \wedge [f(u) \left(1 + \frac{1}{u} \right) (\vec{n} \wedge \vec{d}_\omega)] &= \nabla \wedge (g(u) \vec{n} \wedge \vec{d}_\omega) = \\ &\nabla g(u) \wedge (\vec{n} \wedge \vec{d}_\omega) + g(u) (\vec{d}_\omega \cdot \nabla) \vec{n} - g(u) \vec{d}_\omega \nabla \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (5.70)$$

Operando y agrupando términos¹⁹

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = jk^3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} f(u) \left[\underbrace{(\vec{n} \wedge \vec{d}_\omega) \wedge \vec{n}}_{(3)} + \left(\underbrace{\frac{1}{u}}_{(4)} + \underbrace{\frac{1}{u^2}}_{(5)} \right) \left\{ \vec{d}_\omega - 3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{d}_\omega) \right\} \right] \quad (5.71)$$

El campo eléctrico *Dipolar eléctrico* contiene tres términos diferenciados, el cercano (5) $\sim r^{-3}$, el de inducción (4) $\sim r^{-2}$ y el de radiación (3) $\sim r^{-1}$. La figura 5.10 muestra el módulo del campo eléctrico dipolar eléctrico producido por un dipolo radiante con orientación fija en la dirección z. En la figura 5.11 se representan las secciones de la figura anterior en las direcciones: del dipolo ($x = 0$) y en la transversal al mismo ($z = 0$). Los campos representados en esta última sección son, para $x \gg \lambda$, los de radiación.

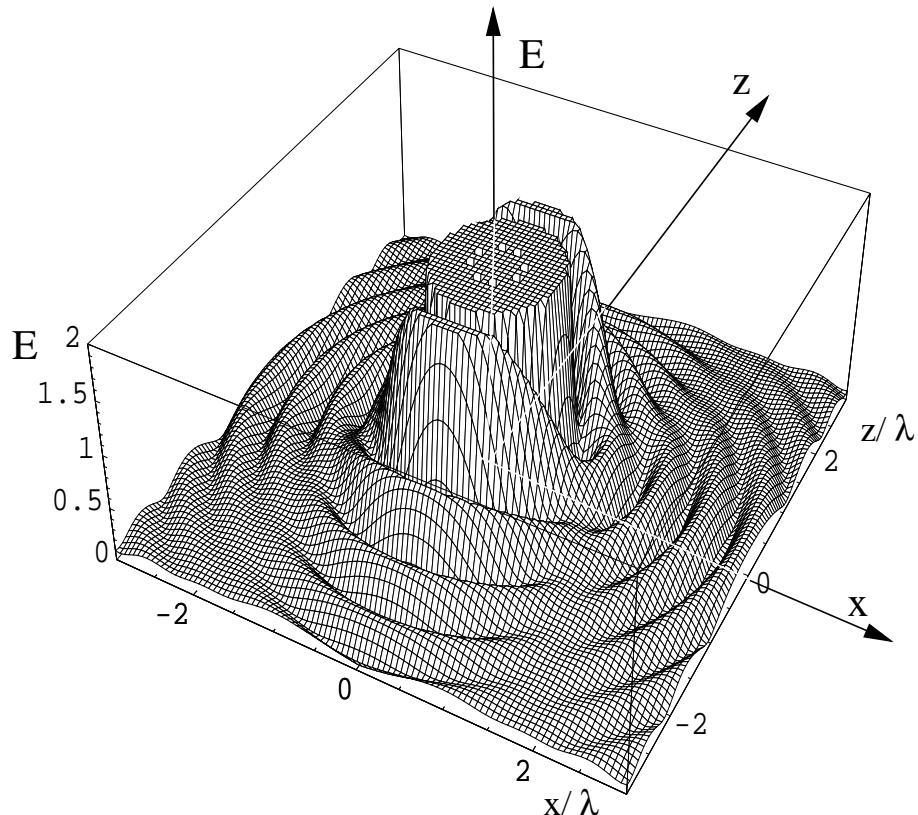


Figura 5.10: Campo eléctrico dipolar eléctrico

Zona cercana e intermedia :

En la zona cercana predomina el término (5) del campo eléctrico y el retraso es despreciable puesto que $kr = u \rightarrow 0$ y $e^{-u} \rightarrow 1$. Pasando al dominio del tiempo

¹⁹Problema 5-9.

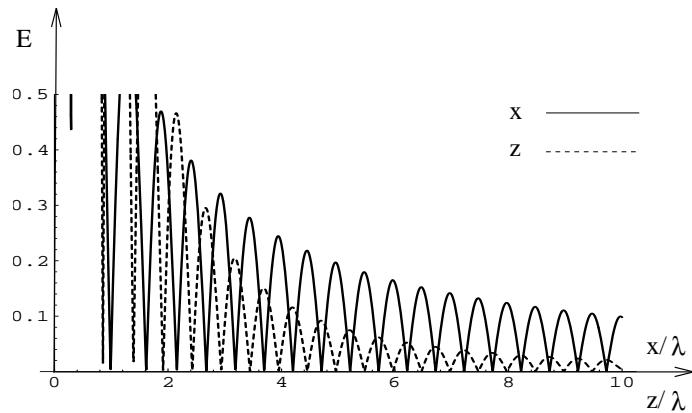


Figura 5.11: Campo eléctrico dipolar eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \{ 3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{d}(t)) - \vec{d}(t) \} \quad (5.72)$$

que es el campo instantáneo producido por un dipolo.

En la zona intermedia predominan los términos (2) y (4) y el retraso no es despreciable.

Zona de radiación:

La zona de radiación es la que presenta un mayor interés. En ella los términos predominantes son los de radiación (1) y (3)

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) \simeq c\vec{B}(\vec{r}, \omega) \wedge \vec{n} \quad (5.73)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = k^2 \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (\vec{n} \wedge \vec{d}_\omega) \quad (5.74)$$

La intensidad media de radiación viene dada por

$$\langle \mathcal{I} \rangle = \frac{ck^4}{32\pi^2\epsilon_0} |\vec{d}_\omega \wedge \vec{n}|^2 \quad (5.75)$$

y crece con la cuarta potencia de la frecuencia ($k^4 \sim \omega^4$).

Es necesario tener en cuenta que si el dipolo varía de orientación con el tiempo, solo el vector \vec{n} tiene dirección fija en el espacio. En el dominio de la frecuencia ésto se traduce en que \vec{d}_ω no tendrá sus tres componentes en fase (recuérdese la sección sobre polarización de ondas). Si el dipolo tiene una orientación fija $\vec{d}_\omega = d_\omega \hat{d}$, donde d_ω puede ser complejo y \hat{d} es un vector unitario real. En este último caso, tomando $\hat{d} = \hat{z}$

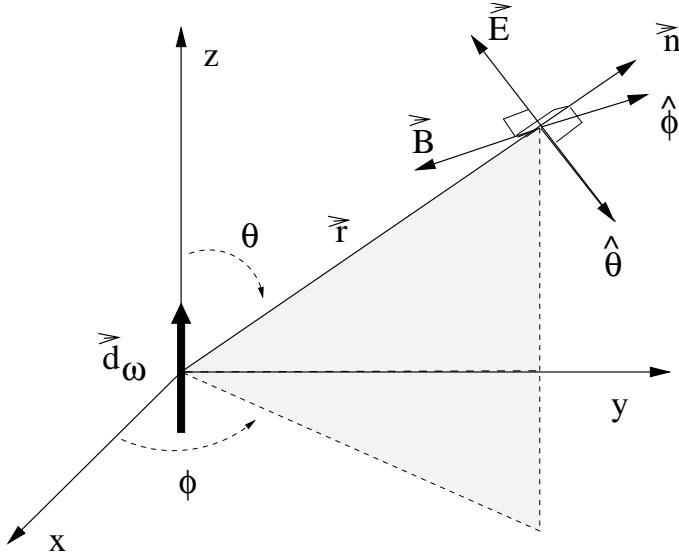


Figura 5.12: Dipolo eléctrico con orientación fija

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{-k^2}{4\pi\epsilon_0} d_\omega \sin\theta \frac{e^{-jk\vec{r}}}{r} \hat{\theta} \quad (5.76)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = \frac{-\mu_0 c k^2}{4\pi} d_\omega \sin\theta \frac{e^{-jk\vec{r}}}{r} \hat{\varphi} \quad (5.77)$$

$$\langle \vec{S} \rangle(\vec{r}) = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (\vec{E}(\vec{r}, \omega) \wedge \vec{B}^*(\vec{r}, \omega)) = \frac{c k^4 d_\omega^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^2} \sin^2\theta \vec{n} \quad (5.78)$$

$$\langle \mathcal{I} \rangle = \frac{c k^4 d_\omega^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \sin^2\theta \quad (5.79)$$

Integrando sobre el ángulo sólido se obtiene el valor medio de la potencia total radiada²⁰

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{c k^4 |d_\omega|^2}{12\pi\epsilon_0} \quad (5.80)$$

Para expresar a los campos en el dominio del tiempo es necesario aplicar la transformada inversa de Fourier al campo magnético 5.74. Dado que $k^2 = -(\jmath\omega)^2/c^2$,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{-\mu_0}{4\pi c r} \vec{n} \wedge \int_{\omega} (\jmath\omega)^2 d_\omega e^{\jmath\omega(t-r/c)} d\omega$$

luego

²⁰Problema 5-10.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \simeq c\vec{B}(\vec{r}, t) \wedge \vec{n} \quad (5.81a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c r} ([\ddot{\vec{d}}] \wedge \vec{n}) \quad (5.81b)$$

donde $[\ddot{\vec{d}}]$ es la derivada segunda temporal del momento dipolar retardado. De lo anterior se deduce que el vector de Poynting

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = c \omega_{em} \vec{n} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c r^2} \{ [\ddot{\vec{d}}] \wedge \vec{n} \}^2 \vec{n} \quad (5.82)$$

es proporcional a c y a la densidad de energía electromagnética, como el correspondiente de las ondas planas en el vacío, y a $[\ddot{\vec{d}}]^2$.

Entre las expresiones en el dominio de la frecuencia y las correspondientes en el dominio del tiempo existe una analogía expresada por

$$[\ddot{\vec{d}}] \leftrightarrow (\jmath\omega)^2 \vec{d}_\omega e^{-jk r} \quad (5.83)$$

Las características básicas de los campos dipolares de radiación pueden representarse gráficamente mediante los diagramas de radiación y las líneas de campo. A continuación se consideran dipolos cuya orientación espacial es fija.

Diagramas de radiación :

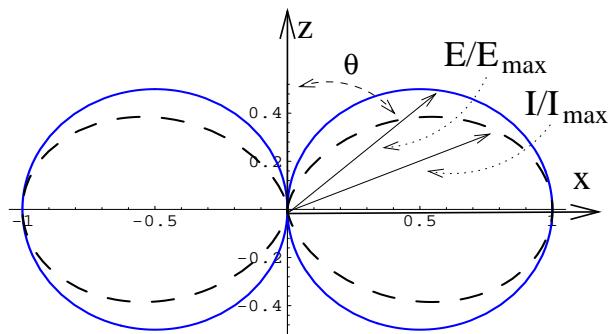


Figura 5.13: Diagramas de radiación bidimensionales

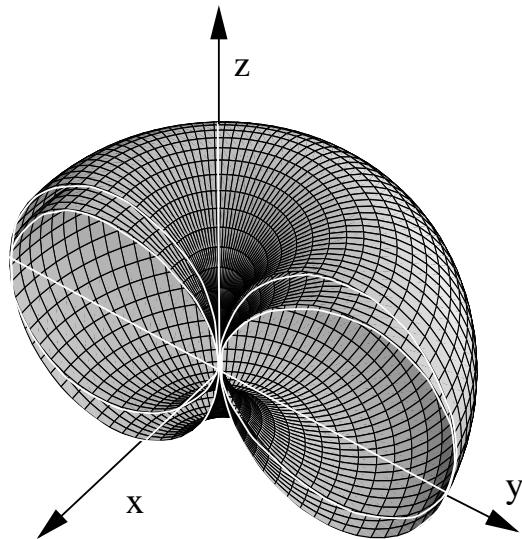


Figura 5.14: Diagramas de radiación tridimensionales

Los *Diagramas de radiación* son gráficas polares, función de los ángulos θ y φ , que representan la distribución direccional de la amplitud del campo o la intensidad de radiación. Las magnitudes representadas son, en el caso de los dipolos fijos,

$$\frac{E_\omega(\theta)}{E_{max}} = \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \frac{\langle \mathcal{I}(\theta) \rangle}{\langle \mathcal{I} \rangle_{max}} = \operatorname{sen}^2\theta$$

En las figuras 5.13 y 5.14 puede observarse que la radiación del dipolo es anisótropa, siendo máxima en la dirección diametral $\theta = \pi/2$. Dada la simetría del diagrama, la densidad de cantidad de movimiento radiada es $\vec{g}(\theta) = (1/c^2)\vec{\mathcal{S}} = \vec{g}(\theta \pm \pi)$ por lo que un dipolo radiante pierde energía pero no cantidad de movimiento. Para que una antena pueda ser utilizada como motor de reacción, es necesario que posea un diagrama de radiación asimétrico.

Líneas de campo de radiación dipolar:

Las líneas de los campos de radiación son cerradas, puesto que sus únicas fuentes son la variación temporal de los propios campos. El magnético, no solo el de radiación, tiene dirección azimutal $\hat{\varphi}$, por lo que sus líneas de campo son circunferencias centradas en el eje z. El campo eléctrico de radiación tiene dirección $\hat{\theta}$, lo anotaremos como E_θ y corresponde al término (3) de 5.71. Dado que es proporcional al $\operatorname{sen}\theta$, se anula para $\theta \rightarrow \pi/2$. En esta región predomina la componente radial $E_r \equiv E_{r(4)} = \vec{E}_{\omega(4)} \cdot \vec{n}$, la cual hace que la línea se cierre sobre sí misma formando un lazo de radiación. De acuerdo con esto, se considera el campo

$$\vec{E} = E_r \vec{n} + E_\theta \hat{\theta}$$

La ecuación de las líneas de campo se obtiene al exigir que éstas sean paralelas al mismo

$$\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{l} \quad , \quad \frac{E_r}{dr} = \frac{E_\theta}{rd\theta} \quad , \quad rE_r d\theta - E_\theta dr = 0$$

Escribiendo explícitamente las componentes reales

$$\begin{aligned} E_\theta &= Re[E_{\theta(3)} e^{j\omega t}] = A k \cos(\omega t - kr) \sin\theta \quad , \quad A = \frac{-kd_\omega}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ E_r &= Re[E_{r(4)} e^{j\omega t}] = \frac{2A}{r} \sin(\omega t - kr) \cos\theta \end{aligned}$$

, multiplicándolas por $\sin\theta/A$ e introduciéndolas en la ecuación de las líneas, resulta

$$\begin{aligned} 2 \sin(\omega t - kr) \cos\theta \sin\theta d\theta - k \cos(\omega t - kr) \sin^2\theta dr &= \\ = d\{\sin^2\theta \sin(\omega t - kr)\} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \sin^2\theta \sin(\omega t - kr) &= cte \end{aligned} \tag{5.84}$$

Como puede verse en la figura 5.15, esta ecuación paramétrica de las líneas de campo eléctrico representa a una familia de lazos, atravesados por las líneas de campo magnético, que se propagan hacia el infinito.

Campo de radiación dipolar magnética y cuadripolar eléctrica :

Los campos asociados al momento dipolar magnético y cuadripolar eléctrico se obtienen a partir de 5.66. Aunque los dipolares magnéticos guardan una relación de dualidad con los dipolares eléctricos y pueden deducirse de éstos sin necesidad de cálculo, únicamente se considerarán los campos de radiación, lo que permite despreciar en el potencial aquellos términos que tienden a cero en la zona lejana con una rapidez superior a r^{-1} y emplear la aproximación 5.39 de ∇ . De acuerdo con ésto

$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) \simeq -k^2 \frac{\mu_0}{4\pi} f(u) \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', \omega) (\vec{r}' \cdot \vec{n}) dv' \tag{5.85}$$

El integrando puede descomponerse en una parte simétrica y otra antisimétrica con respecto a \vec{j}_ω y \vec{r}' . La primera da lugar a los campos cuadripolares eléctricos y la segunda a los dipolares magnéticos. Sumando y restando $(1/2)\vec{r}'(\vec{j}_\omega \cdot \vec{n})$

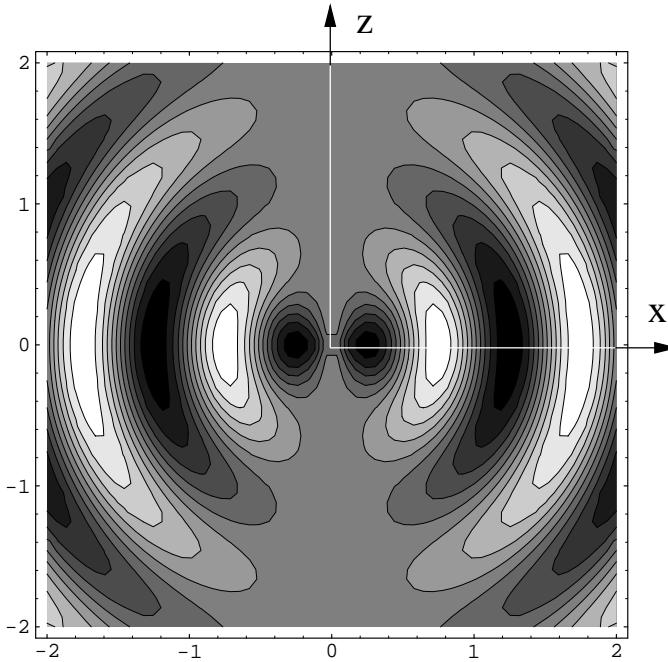


Figura 5.15: Líneas del campo

$$\vec{j}_\omega(\vec{r}' \cdot \vec{n}) = \underbrace{\frac{1}{2} \{ \vec{j}_\omega(\vec{r}' \cdot \vec{n}) + \vec{r}'(\vec{j}_\omega \cdot \vec{n}) \}}_{(a)} + \quad (5.86)$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \{ \vec{j}_\omega(\vec{r}' \cdot \vec{n}) - \vec{r}'(\vec{j}_\omega \cdot \vec{n}) \}}_{(b)} \quad (5.87)$$

Campo dipolar magnético :

El potencial dipolar magnético resulta de tomar en 5.85 la parte correspondiente al término (b) de la ecuación anterior. Este último se puede escribir como

$$(b) = \frac{1}{2}(\vec{r}' \wedge \vec{j}_\omega) \wedge \vec{n}$$

con lo que

$$\int_{\mathcal{V}'} (b) dv' = \vec{m}_\omega \wedge \vec{n} \quad , , \quad \vec{m}_\omega = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \wedge \vec{j}_\omega dv' \quad (5.88)$$

El potencial resultante es:

$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) \simeq -k^2 \frac{\mu_0}{4\pi} f(u) \vec{m}_\omega \wedge \vec{n} \quad (5.89)$$

Multiplicando vectorialmente por $-jk\vec{n}$

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = k^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{n} \wedge (\vec{m}_\omega \wedge \vec{n}) \quad (5.90)$$

expresión análoga a la del campo eléctrico dipolar eléctrico. El campo eléctrico dipolar magnético resulta, por lo tanto, análogo al magnético dipolar eléctrico y se obtiene mediante la relación de estructura

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = c \vec{B}(\vec{r}, \omega) \wedge \vec{n} \quad (5.91)$$

En la figura 5.16 puede verse la estructura del campo de radiación dipolar magnética.

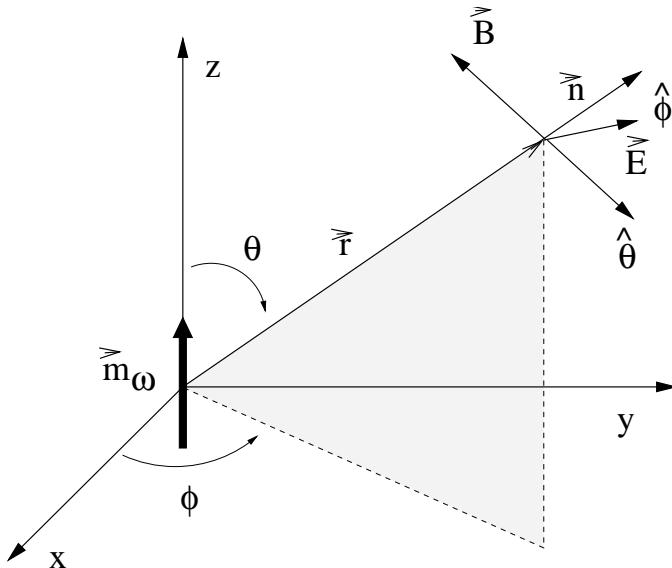


Figura 5.16: Campo dipolar magnético

Campo cuadripolar eléctrico :

El potencial cuadripolar eléctrico es la parte simétrica de 5.85, correspondiente a tomar 5.86 como argumento de la integral. Esta se escribirá, en principio, de la forma

$$\int_{\mathcal{V}'} (a) dv' = j \frac{\omega}{2} \overleftrightarrow{T} \cdot \vec{n} \quad (5.92)$$

donde \overleftrightarrow{T} es la matriz de los momentos de segundo orden de la densidad de carga

$$T_{\alpha\beta} = \int_{V'} x'_\alpha x'_{\beta} \rho_\omega dv' \quad (5.93)$$

Para demostrar esto, se integra $(a)_\alpha$, la componente α de (a),

$$\begin{aligned} \int_{V'} (a)_\alpha dv' &= \frac{1}{2} \int_{V'} \{ j_{\omega\alpha} (\vec{r}' \cdot \vec{n}) + x'_\alpha (\vec{j}_\omega \cdot \vec{n}) \} dv' \\ &= \frac{1}{2} \vec{n} \cdot \int_{V'} \{ j_{\omega\alpha} \vec{r}' + x'_\alpha \vec{j}_\omega \} dv' = \frac{1}{2} n_\beta A_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= \int_{V'} \{ j_{\omega\alpha} x'_\beta + x'_\alpha j_{\omega\beta} \} dv' = \int_{V'} \vec{j}_\omega \cdot \nabla' (x'_\alpha x'_\beta) dv' \\ &= \underbrace{\int_{V'} \nabla' (x'_\alpha x'_\beta \vec{j}_\omega) dv'}_{=0} - \int_{V'} x'_\alpha x'_\beta \nabla' \cdot \vec{j}_\omega dv' \\ &= j\omega \int_{V'} x'_\alpha x'_\beta \rho_\omega dv' \end{aligned}$$

En estos pasos se ha hecho uso, en primer lugar, de la regla del desarrollo de $\nabla \cdot (f\vec{a})$, en segundo, del teorema de la divergencia y, por último, de la ecuación de continuidad 2.28. De esta forma se verifica el punto de partida.

Como en el desarrollo cuadripolar electrostático, es conveniente sustituir $\overset{\leftrightarrow}{T}$ por la matriz cuadripolar $\overset{\leftrightarrow}{Q}$, de traza nula, cuyas componentes se definen como

$$Q_{\alpha\beta} = \int_{V'} (3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2) \rho_\omega dv' \quad (5.94)$$

Como es fácil de comprobar, $\sum_\alpha Q_{\alpha\alpha} = 0$ ²¹. Por tanto

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = \frac{1}{3} \left\{ \overset{\leftrightarrow}{Q} + \overset{\leftrightarrow}{I} \int_{V'} r'^2 \rho_\omega dv' \right\} \quad (5.95)$$

y

$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) = -k^2 \frac{\mu_0 c}{24\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ \overset{\leftrightarrow}{Q} \cdot \vec{n} + \vec{n} \int_{V'} r'^2 \rho_\omega dv' \right\} \quad (5.96)$$

²¹Problema 5-13.

El campo magnético cuadripolar eléctrico de radiación se obtiene, según 5.41a, multiplicando vectorialmente por $-jk\vec{n}$

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = jk^3 \frac{\mu_0 c}{24\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{n} \wedge (\overset{\leftrightarrow}{Q} \cdot \vec{n}) \quad (5.97)$$

y el eléctrico según 5.41b.

Por último, el valor medio de la intensidad de radiación es

$$\langle \mathcal{I} \rangle = \frac{d\langle \mathcal{P} \rangle}{d\Omega} = k^6 \frac{c}{2\varepsilon_0 (24\pi)^2} |\vec{n} \wedge (\overset{\leftrightarrow}{Q} \cdot \vec{n})|^2 \quad (5.98)$$

que crece con la frecuencia, ($\sim k^6$), más rápidamente que las correspondientes dipolares.

5.3.1.4. Desarrollo multipolar en coordenadas esféricas

5.3.2. Campo creado por una carga puntual

El campo creado por una carga puntual puede obtenerse a partir de los potenciales de Lienard-Wiechert 5.21 aplicando las relaciones 5.22 que definen a los campos en función de los potenciales. Esta operación no ofrece problemas especiales pero es laboriosa, por lo que resulta más sencilla si, como en el caso de las distribuciones continuas, se lleva a cabo sistemáticamente. Con objeto de tener más cerca a las referencias previas, éstas se reescriben a continuación con una notación adecuada.

Los potenciales de partida son

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R\sigma} \quad , , \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 c e}{4\pi} \frac{\vec{\beta}_p}{R\sigma} \quad (5.99)$$

No se han explicitado los argumentos de las funciones que aparecen en el segundo miembro pero ya se sabe que éstas deben evaluarse en el tiempo retardado de la partícula t_p , tal que

$$R \equiv R(\vec{r}, t_p) = |\vec{r} - \vec{r}_p(t_p)| = c(t - t_p) \quad (5.100a)$$

$$t_p(\vec{r}, t) = t - \frac{1}{c} R \{ \vec{r}, t_p(\vec{r}, t) \} \quad (5.100b)$$

Así, de acuerdo con 5.18,

$$\sigma \equiv \sigma(\vec{r}, t_p) = 1 - \hat{R}(\vec{r}, t_p) \cdot \vec{\beta}_p(t_p) \quad , , \quad \vec{\beta}_p(t_p) \equiv \frac{\vec{v}_p(t_p)}{c} \quad (5.101)$$

Los campos correspondientes son

$$\frac{4\pi\varepsilon_0}{e} \vec{E} = -\nabla \left(\frac{1}{R\sigma} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{\beta}_p}{R\sigma} \right) , \quad \frac{4\pi}{\mu_0 c e} \vec{B} = \nabla \wedge \left(\frac{\vec{\beta}_p}{R\sigma} \right) \quad (5.102)$$

Desarrollando las ecuaciones anteriores y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial R\sigma}{\partial t} &= \frac{\partial R\sigma}{\partial t_p} \frac{\partial t_p}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{\beta}_p}{\partial t} &= \dot{\vec{\beta}}_p \frac{\partial t_p}{\partial t} , \quad \dot{\vec{\beta}}_p \equiv \frac{d \vec{\beta}_p}{d t_p} \end{aligned}$$

y que $\nabla \wedge \vec{a}(u) = \nabla u \wedge d\vec{a}/du$ ²²

$$\frac{4\pi\varepsilon_0}{e} \vec{E} = \frac{1}{R^2 \sigma^2} \underbrace{\nabla(R\sigma)}_{(d)} + \frac{\vec{\beta}_p}{c R^2 \sigma^2} \underbrace{\frac{\partial(R\sigma)}{\partial t_p}}_{(b)} \underbrace{\frac{\partial t_p}{\partial t}}_{(a)} - \frac{\dot{\vec{\beta}}_p}{c R \sigma} \underbrace{\frac{\partial t_p}{\partial t}}_{(a)} \quad (5.103a)$$

$$\frac{4\pi}{\mu_0 c e} \vec{B} = \frac{1}{R \sigma} \underbrace{\nabla t_p}_{(c)} \wedge \dot{\vec{\beta}}_p - \frac{1}{R^2 \sigma^2} \underbrace{\nabla(R\sigma)}_{(d)} \wedge \vec{\beta}_p \quad (5.103b)$$

Luego el cálculo de los campos requiere la evaluación de los términos (a)-(d). Derivando 5.100b

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_p}{\partial t} &= 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t_p} \frac{\partial t_p}{\partial t} \Rightarrow \\ \frac{\partial t_p}{\partial t} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t_p}} \end{aligned}$$

pero, según 5.100a,

$$\frac{\partial R}{\partial t_p} = \frac{\partial}{\partial t_p} (\vec{R} \cdot \vec{R})^{\frac{1}{2}} = \hat{\vec{R}} \cdot \frac{\partial \hat{\vec{R}}}{\partial t_p} = -c \hat{\vec{R}} \cdot \vec{\beta}_p \quad (5.104)$$

ya que

$$\frac{\partial \hat{\vec{R}}}{\partial t_p} = \frac{\partial}{\partial t_p} \{ \vec{r} - \vec{r}_p(t_p) \} = -c \vec{\beta}_p \quad (5.105)$$

Volviendo atrás,

$$(a) = \frac{\partial t_p}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} \quad (5.106)$$

Para calcular (b) debe tenerse en cuenta a 5.101 y 5.104²³

²²Problema 5-16.

²³Problema 5-17.

$$(b) = \frac{\partial R\sigma}{\partial t_p} = c \{ \beta_p^2 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}_p \} - R \hat{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}_p \quad (5.107)$$

Hallando el gradiente de 5.100b

$$(c) = \nabla t_p = -\frac{1}{c} \nabla R \quad (5.108a)$$

$$(c) = -\frac{1}{c} \frac{\hat{R}}{\sigma} \Rightarrow \nabla R = \frac{\hat{R}}{\sigma} \quad (5.108b)$$

La comprobación de 5.108b es sencilla si se opera sobre una de las componentes de la ecuación anterior y se hace uso de 5.108a

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\vec{R} \cdot \vec{R})^{\frac{1}{2}} = \hat{R} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \{ \vec{r} - \vec{r}_p(t_p) \} = \hat{e}_x - c \vec{\beta}_p \frac{\partial t_p}{\partial x} = \hat{e}_x + \vec{\beta}_p \frac{\partial R}{\partial x} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, reconstruyendo ∇R , introduciendo este resultado en 5.108a y despejando ∇t_p , se obtiene 5.108b. Si en la misma ecuación anterior se tiene en cuenta a 5.108b se obtiene

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial x} = \hat{e}_x + \frac{R_x}{R\sigma} \vec{\beta}_p \quad (5.109)$$

Por último, procediendo de forma análoga a la seguida hasta este punto, se obtiene que²⁴

$$(d) = \nabla(R\sigma) = \hat{R} \left\{ 1 + \frac{1}{\sigma} (\hat{R} \cdot \vec{\beta}_p) - \frac{1}{\sigma} \beta_p^2 \right\} - \vec{\beta}_p + \frac{R}{c\sigma} \hat{R} (\hat{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}_p) \quad (5.110)$$

Los campos producidos por una carga puntual en movimiento se obtienen sustituyendo (a) 5.106, (b) 5.107, (c) 5.108b y (d) 5.110 en 5.103. Dado que una parte de dichos campos es solo función de la velocidad $c \vec{\beta}_p$, mientras que otra también lo es de la aceleración $c \dot{\vec{\beta}}_p$, éstos pueden descomponerse en los *Campos de velocidad*, ligados o de inducción,

$$\vec{E}_v(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{R^2(\vec{r}, t_p)} \frac{\hat{R}(\vec{r}, t_p) - \vec{\beta}_p(t_p)}{\gamma_p^2(t_p) \sigma^3(\vec{r}, t_p)} \quad (5.111a)$$

$$\vec{B}_v(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{R}(\vec{r}, t_p) \wedge \vec{E}_v(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \vec{\beta}_p(t_p) \wedge \vec{E}_v(\vec{r}, t) \quad (5.111b)$$

²⁴Problema 5-18.

, donde $\gamma_p = 1/\sqrt{1 - \beta_p^2}$, y los *Campos de aceleración*, o radiación,²⁵

$$\vec{E}_a(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0 c} \frac{1}{R(\vec{r}, t_p)} \frac{\widehat{R}(\vec{r}, t_p) \wedge \left\{ (\widehat{R}(\vec{r}, t_p) - \vec{\beta}_p(t_p)) \wedge \dot{\vec{\beta}}_p(t_p) \right\}}{\sigma^3(\vec{r}, t_p)} \quad (5.112a)$$

$$\vec{B}_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \widehat{R}(\vec{r}, t_p) \wedge \vec{E}_a(\vec{r}, t) \quad (5.112b)$$

En estas expresiones se resalta que los campos son evaluados en el punto e instante de observación (\vec{r}, t) y el resto de las funciones en el instante retardado de la partícula t_p . En adelante, asumidas las dependencias explícitas e implícitas, se simplificará la notación de la forma

$$\vec{E}_v = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{R^2} \frac{\widehat{R} - \vec{\beta}_p}{\gamma_p^2 \sigma^3} , , \quad \vec{B}_v = \frac{1}{c} \widehat{R} \wedge \vec{E}_v = \frac{1}{c} \vec{\beta}_p \wedge \vec{E}_v \quad (5.113a)$$

$$\vec{E}_a = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0 c} \frac{1}{R} \frac{\widehat{R} \wedge \{ (\widehat{R} - \vec{\beta}_p) \wedge \dot{\vec{\beta}}_p \}}{\sigma^3} , , \quad \vec{B}_a = \frac{1}{c} \widehat{R} \wedge \vec{E}_a \quad (5.113b)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \widehat{R} \wedge \vec{E} \quad (5.113c)$$

Obsérvese que, aunque los campos eléctrico y magnético de una carga puntual son perpendiculares entre sí, $I_2(\vec{s}) = 0$, no existe ningún sistema de referencia desde el cual se anule el campo magnético en todos los puntos del espacio. Esto es posible para los campos de velocidad, en un sistema de referencia que se mueva con velocidad β_p , pero no para los de aceleración.

Los campos de velocidad 5.113a tienen una dependencia radial R^{-2} por lo que no son campos de radiación; son campos ligados a, o arrastrados por, la partícula en su movimiento. El campo magnético es transversal a \widehat{R} , a la velocidad $\vec{\beta}_p$ y al campo eléctrico \vec{E}_v . Este último tiene componente en las direcciones \widehat{R} y $\vec{\beta}_p$.

Los campos de aceleración tienen la típica dependencia R^{-1} de los de radiación, \vec{E}_a , \vec{B}_a y \widehat{R} forman un triángulo rectángulo a derechas y el vector de Poynting

$$\vec{S}_a = \frac{1}{Z_0} E_a^2 \widehat{R} \quad (5.114)$$

implica la existencia de energía radiante que es emitida desde la partícula hacia los puntos de observación, como se muestra en la figura 5.17. Las expresiones 5.113b ponen, pues, de manifiesto que para que una partícula cargada radie es necesario acelerarla.

En 5.113c se expresa la perpendicularidad del campo magnético total con respecto al campo eléctrico total y a \widehat{R} . El campo eléctrico, sin embargo, tiene componente radial.

Cabe constatar que, dada una trayectoria arbitraria $\vec{r}_p(t_p)$ de la carga, el campo generado por ésta tiene una estructura realmente compleja. A continuación se consideran algunos casos típicos de interés, como el de la partícula con movimiento uniforme y el de los campos de radiación de partículas aceleradas.

²⁵ Problema 5-19.

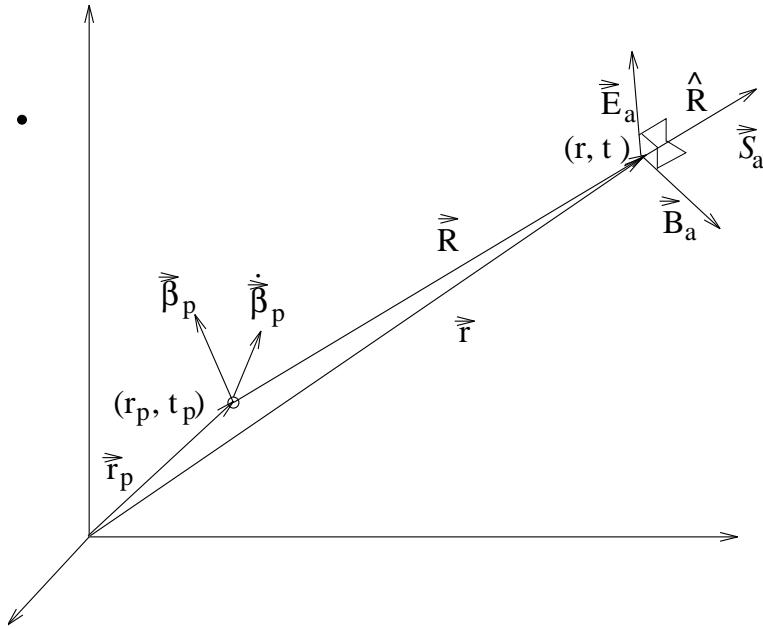


Figura 5.17: Campos radiantes de una partícula

5.3.2.1. Campo de una carga con movimiento uniforme

Una carga con $\vec{\beta}_p = c\vec{t}e$ ($\dot{\vec{\beta}}_p = 0$) sólo crea campos de velocidad. Si éstos se observan desde un sistema de referencia en el que $\beta_p \ll 1$,

$$\vec{E}_v \rightarrow \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{\hat{R}}{R^2} , \quad \vec{B}_v \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e \vec{v}_p \wedge \hat{R}}{R^2} \quad (5.115)$$

que son los campos electro-magnetostáticos (desde el sistema propio de la carga el campo se reduce al electrostático). Su validez se extiende a un amplio margen de velocidades no relativistas para las que $\beta_p \ll 1$. En particular, desde su sistema propio sólo se observa el campo eléctrico culombiano.

En el caso más general en el que la velocidad de la partícula, siendo constante, no está limitada en magnitud, es posible obtener una expresión explícita en función del tiempo de observación t ²⁶. La figura 5.18 muestra la geometría del problema referida a un origen de coordenadas O situado en la posición actual de la partícula, de forma que $\vec{r}_p(t) = \vec{0}$. El campo eléctrico solo tiene componente de velocidad 5.113a y se anotará de la forma

$$\vec{E}_v(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{R^2} \frac{\hat{R} - \vec{\beta}_p}{\gamma_p^2 \sigma^3} , \quad \vec{B}_v(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \vec{\beta}_p \wedge \vec{E}_v(\vec{r}, t) \quad (5.116)$$

Las magnitudes R , \hat{R} y σ están evaluadas en el tiempo retardado t_p , mientras que $\vec{\beta}_p$ y γ_p son independientes del mismo.

²⁶Véase el problema 2-30.

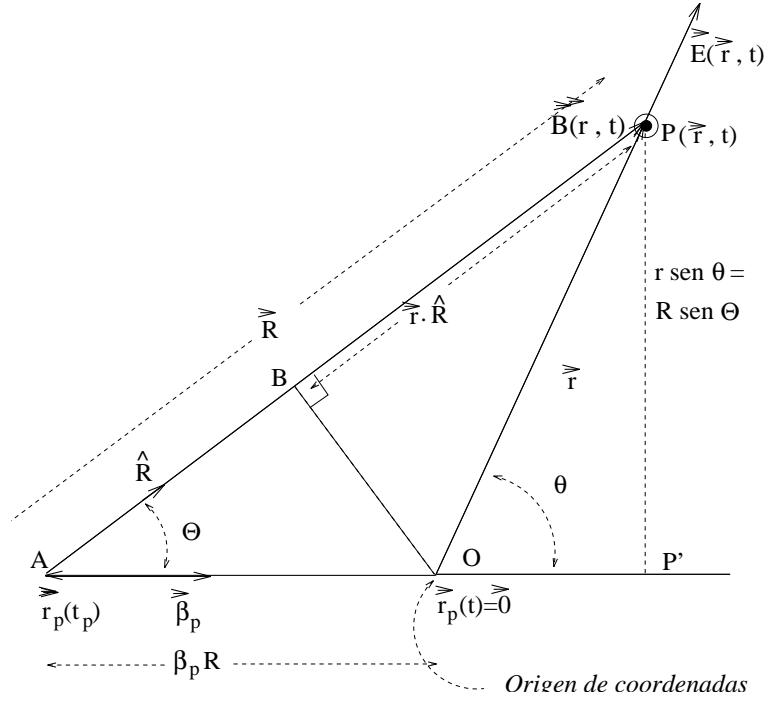


Figura 5.18: Campo de una carga con movimiento uniforme

En la figura 5.18 la partícula se halla situada en el punto A en el instante t_p y su posición con respecto al origen O es $\vec{r}_p(t_p) = \overrightarrow{OA} = -\vec{\beta}_p c(t - t_p)$, o, teniendo en cuenta 5.100a,

$$\vec{r}_p(t_p) = -\vec{\beta}_p R$$

por lo que, como se ve en la figura,

$$\vec{r} = \vec{r}_p(t_p) + \vec{R} = R(\hat{R} - \vec{\beta}_p) \Rightarrow \hat{R} - \vec{\beta}_p = \frac{\vec{r}}{R} \quad (5.117)$$

Al sustituir en 5.116, en el denominador aparece el factor $(R\sigma)^3$ que puede expresarse en función de los parámetros de observación:

Multiplicando escalarmente por \hat{R} a la primera de las expresiones anteriores, se obtiene

$$\vec{r} \cdot \hat{R} = R(1 - \vec{\beta}_p \cdot \hat{R}) = R\sigma$$

Por otra parte, dado que los triángulos OBP , OBA , APP' y OPP' de la figura son rectángulos,

$$\overline{BP} = \vec{r} \cdot \hat{R} \quad , \quad \overline{OB} = \beta_p R \sin \Theta \quad , \quad \overline{PP'} = R \sin \Theta = r \sin \theta$$

y

$$(\vec{r} \cdot \hat{R})^2 = r^2 (1 - \beta_p^2 \sin^2 \theta)$$

Sustituyendo en 5.116²⁷

$$\left(\vec{E}(\vec{r})\right)_{v_p=cte} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\hat{r}}{\gamma_p^2 (1 - \beta_p^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} , \quad \vec{B}_v(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \vec{\beta}_p \wedge \vec{E}_v(\vec{r}, t) \quad (5.118)$$

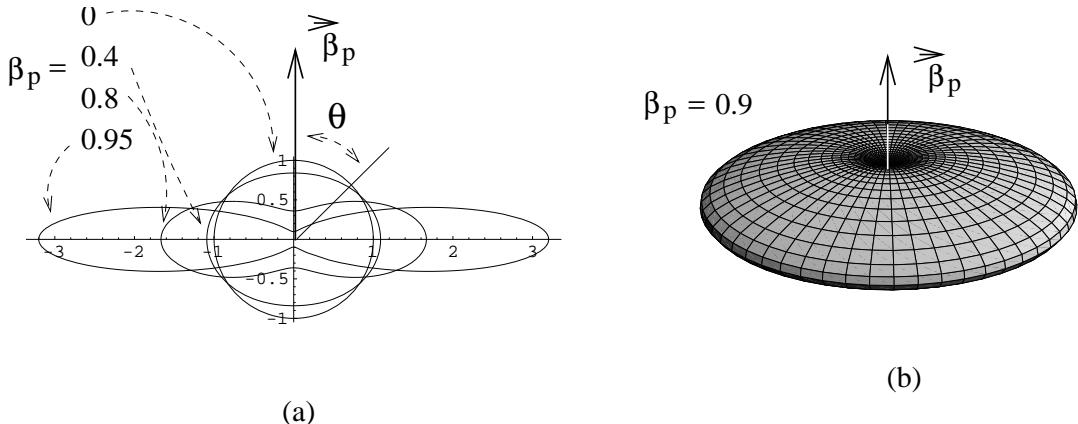


Figura 5.19: Campo de una carga con movimiento uniforme

Este es el campo electromagnético producido por una carga puntual en movimiento uniforme, expresado en función de su posición en el instante actual de observación. Desde esta perspectiva, el campo es radial pero no isotrópico: para $\beta_p = 0$ éste se reduce al electrostático, con simetría radial, pero para velocidades relativistas es altamente anisotrópico: la relación entre el campo eléctrico observado en la dirección perpendicular al movimiento $E_\perp = E(\theta = \pi/2)$ y el observado en la dirección de la marcha $E_\parallel = E(\theta = 0)$ es

$$\frac{E_\perp}{E_\parallel} = \gamma_p^3 \quad (5.119)$$

por lo que para $\beta_p \rightarrow 1$ solo se observa campo en la dirección perpendicular a la de la marcha. En la figura 5.19a se presenta un diagrama polar de la amplitud del campo observado a una distancia r de la partícula, en función del ángulo θ , para distintos valores de la velocidad; el valor máximo ocurre cuando se observa en la dirección perpendicular al movimiento. En la figura 5.19b se muestra el diagrama tridimensional correspondiente.

5.3.2.2. Radiación de una carga acelerada

Como se ha visto anteriormente, el campo de aceleración de una partícula cargada está asociado al fenómeno de radiación, ya que, según 5.114, el vector de Poynting

²⁷Obsérvese que, aunque en esta expresión no se muestra explícitamente la dependencia temporal, el origen de coordenadas se mueve con la velocidad de la carga por lo que los campos son efectivamente arrastrados por la partícula.

$$\vec{S}_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{Z_0} E_a^2(\vec{r}, t) \hat{R}(\vec{r}, t_p) \quad (5.120)$$

tiene la dependencia radial y la dirección requeridas para representar una pérdida neta de potencia por parte de la carga.

La medida de esta magnitud, de su flujo o de la intensidad, puede realizarse en el entorno próximo de la partícula o fuera del mismo:

- Si se opta por esto último, por ejemplo, si se pretende determinar el flujo total de la energía radiante que atraviesa la superficie S (figura 5.20-a) en el instante t y por unidad de tiempo, se deberá evaluar el flujo

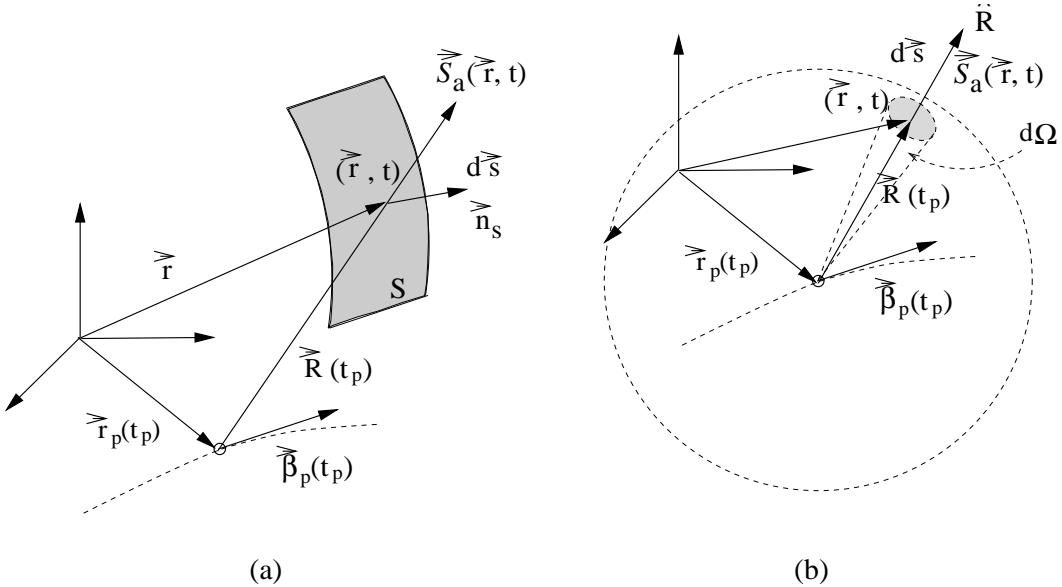


Figura 5.20: Radiación de cargas aceleradas

$$P_{rS}(t) = \int_S \vec{S}_a(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}_s \, ds \quad (5.121)$$

donde $P_{rS}(t)$ es la potencia total que atraviesa a la superficie S en el instante t y \vec{n}_s es la normal a la superficie. Por otra parte,

$$\vec{S}_a(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}_s = \frac{\partial}{\partial t} \frac{dW_r}{ds}(\vec{r}, t) \quad (5.122)$$

es el flujo de energía, por unidad de tiempo t , que atraviesa en el instante t a la unidad de superficie situada en \vec{r} . La medida de potencia se lleva a cabo, por lo tanto, al ritmo del tiempo de observación. Para una superficie S arbitraria, esta integral no es sencilla porque su realización exige la determinación de los distintos tiempos y posiciones retardados, t_p y $\vec{r}_p(t_p)$, de la partícula que corresponden a cada uno de los puntos de dicha superficie.

- Una medida más fundamental que la anterior es la de la intensidad y la potencia total radiada por la partícula, referida a su propia posición y al ritmo de su tiempo retardado. Para expresar de esta forma a la intensidad, se considerará previamente el cálculo del flujo de potencia radiada en el instante t a través de una superficie esférica S_R de radio R , según se muestra en la figura 5.20-b. En este caso, a todos los puntos de la superficie les corresponde el mismo tiempo retardado puesto que están a la misma distancia $R = c(t - t_p)$ de la posición retardada de la partícula. Además, $\vec{n}_s = \hat{R}$, por lo que,

$$P_{ro}(R, t) = \int_S \vec{S}_a(\vec{r}, t) \cdot \hat{R} ds = \int_{\Omega} \mathcal{I}_{ro}(\hat{R}, t) d\Omega \quad (5.123)$$

donde P_{ro} e I_{ro} son la potencia y la intensidad medidos en S_R y al ritmo del tiempo de observación t . En los argumentos de las funciones de esta expresión, se resalta, por una parte, que P_{ro} es función de la superficie sobre la que se integra, es decir, de R , y de t y que la intensidad es función, además, de la dirección de observación \hat{R} .

De acuerdo con lo anterior y con 5.122 y dado que, en S_R , $d\Omega = ds/R^2$

$$I_{ro}(\hat{R}, t) = R^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{dW_r}{ds}(\vec{r}, t) \quad (5.124)$$

Esta misma magnitud, pero referida al ritmo del tiempo retardado de la partícula, sería (véase 5.106)

$$I_{rp}(\hat{R}, t_p) = R^2 \frac{\partial}{\partial t_p} \frac{dW_r}{ds}(\vec{r}, t) = I_{ro}(\hat{R}, t) \frac{\partial t}{\partial t_p} = I_{ro}(\hat{R}, t) \sigma(\vec{r}, t) \quad (5.125)$$

Puesto que lo que se persigue es la medida de la intensidad en el entorno cercano de la partícula, se deberá hallar el límite de la anterior para $R \rightarrow 0$. Haciendo ésto en 5.100 y 5.101, se tiene que²⁸

$$\lim_{R \rightarrow 0} t_p = t \quad , \quad \lim_{R \rightarrow 0} \sigma(\vec{r}, t) = \sigma(\hat{R}, t) \quad (5.126)$$

En este mismo límite, la intensidad es independiente de R , depende de la dirección de observación \hat{R} , por lo que, una partícula cuya trayectoria es $\vec{r}_p(t)$ emite energía con una intensidad I_r ²⁹

$$\mathcal{I}_r(\hat{R}, t) = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{|\hat{R} \wedge \{(\hat{R} - \vec{\beta}_p) \wedge \dot{\vec{\beta}}_p\}|^2}{(1 - \vec{\beta}_p \cdot \hat{R})^5} \quad (5.127)$$

²⁸No se emplea distinta notación para σ en el límite $R \rightarrow 0$, pero se resalta en sus argumentos que es función de \hat{R} pero no de R .

²⁹Se simplifica la notación pero todas las magnitudes deben evaluarse en el entorno próximo de la posición actual de la carga.

Cargas lentas :

La intensidad radiada por una carga lenta se deduce de la anterior, pero es fácil de obtener directamente.

Observado desde un sistema en el que $\beta_p \ll 1$ ($\sigma \simeq 1$), el campo de aceleración 5.113b se reduce a las expresiones

$$\begin{aligned}\vec{E}_a &\simeq \frac{e}{4\pi \varepsilon_0 c} \frac{\hat{R} \wedge (\hat{R} \wedge \dot{\vec{\beta}}_{p0})}{R} = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0 c} \frac{\hat{R}(\hat{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}_{p0}) - \dot{\vec{\beta}}_{p0}}{R} \\ \vec{B}_a &= \frac{1}{c} \hat{R} \wedge \vec{E}_a = \frac{e \mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{\beta}}_{p0} \wedge \hat{R}}{R}\end{aligned}\quad (5.128)$$

donde todas las variables son retardadas y $\dot{\vec{\beta}}_{p0}$ es la aceleración de la carga en su sistema propio.

Estas ecuaciones corresponden a las de un dipolo eléctrico radiante³⁰. El campo eléctrico está contenido en el plano subtendido por \hat{R} y $\dot{\vec{\beta}}_{p0}$, como se muestra en la figura 5.21

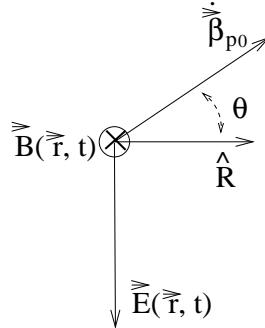


Figura 5.21: Campo de una carga con $\beta_p \ll 1$

La intensidad radiada en este sistema puede calcularse de forma sencilla. En las proximidades de la carga, donde $R \rightarrow 0$, el retraso entre la posición de la partícula y la del punto de observación es despreciable, $t_p \simeq t$, y, dada la baja velocidad de la partícula, $\frac{\partial t_p}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} \simeq 1$,

$$\mathcal{I}_0(t) = \frac{d\mathcal{P}_{r0}}{d\Omega} = R^2 \vec{S}_a \cdot \hat{R} = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} |\hat{R} \wedge (\hat{R} \wedge \dot{\vec{\beta}}_{p0})|^2 \quad (5.129a)$$

$$\mathcal{I}_0(t) = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} |\dot{\vec{\beta}}_{p0}|^2 \sin^2 \theta \quad (5.129b)$$

Los campos son de tipo dipolar: $e \vec{r}_p \rightarrow \vec{d}$ y $e \vec{a}_p \rightarrow \ddot{\vec{d}}$. Los diagramas de radiación para los campos y para la intensidad son, por lo tanto, los del dipolo, representados en la figura 5.13.

³⁰En 5.81, la aceleración de las cargas $\dot{\vec{\beta}}_{p0}$ está representada por $[\ddot{\vec{d}}]$.

La potencia radiada por la partícula se obtiene integrando la intensidad sobre Ω ($d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$), con lo que se obtiene la *Fórmula de Larmor* para la potencia radiada por una carga no relativista.³¹

$$\mathcal{P}_{r0}(t) = \int_{\Omega} \mathcal{I}_0 d\Omega = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c} |\dot{\vec{\beta}}_{p0}|^2 \quad (5.130a)$$

$$\mathcal{P}_{r0}(t) = \tau m \vec{a}_{p0}^2 , , \quad \tau \equiv \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3} \quad (5.130b)$$

donde τ es una constante de tiempo y \vec{a}_{p0} la aceleración de la partícula.

Por otra parte, dada la simetría del campo de radiación, la cantidad de movimiento radiada en la unidad de tiempo por la partícula, en su sistema propio, es nula³²

$$\frac{d\vec{\mathcal{G}}_{r0}(t)}{dt} = 0 \quad (5.131)$$

Cargas con velocidad relativista :

Cuando β_p se aproxima a la unidad, la presencia del factor $1/\sigma^5$ en 5.127 modula fuertemente a la distribución espacial de la intensidad de radiación en la dirección de la marcha. Mientras que el denominador es función cuadrática del ángulo Θ , formado por la velocidad $\vec{\beta}_p$ con la dirección de observación \hat{R} , y de los que forma la aceleración $\dot{\vec{\beta}}_p$ con \hat{R} y con $\vec{\beta}_p$, σ es una función de Θ muy directiva para velocidades relativistas. En la figura 5.22 se representa a los diagramas polares de dicho factor para distintos valores de β_p .

Es interesante observar que, mientras que en el sistema propio la intensidad radiada en la dirección \hat{R} es la misma que la radiada en la dirección $-\hat{R}$, en los sistemas no propios tal simetría no existe y, además de energía, se radia cantidad de movimiento.

La potencia total radiada puede calcularse integrando la intensidad $\mathcal{I}_r(\hat{R}, t)$ sobre Ω , pero ésta, y la cantidad de movimiento radiada por unidad de tiempo, pueden obtenerse de forma más directa englobándolas en estructuras manifiestamente tensoriales.

El tetravector energía-cantidad de movimiento $\overset{\Rightarrow}{p}$ 2.18 tiene por componente temporal a la energía \mathcal{E}/c y por componentes contravariantes espaciales a la cantidad de movimiento \vec{p} ³³.

Derivando con respecto al tiempo propio de la partícula se obtiene el tetravector³⁴

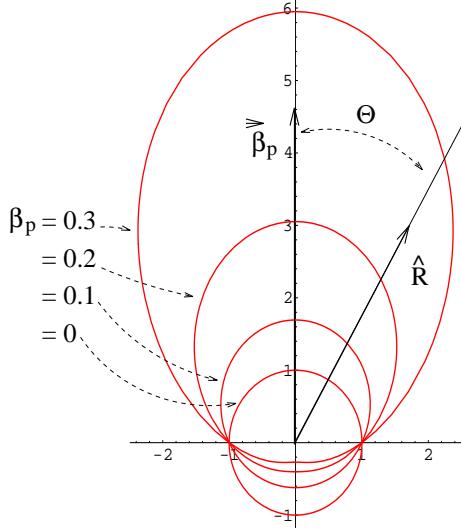
$$\frac{d\overset{\Rightarrow}{p}}{d\tau_p} = \gamma_p \frac{d\overset{\Rightarrow}{p}}{dt} \Rightarrow \frac{dp^i}{d\tau_p} = \gamma_p \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

³¹Problema 5-21.

³² $\vec{\mathcal{S}}(\vec{R}) = -\vec{\mathcal{S}}(-\vec{R})$ y, por lo tanto, $d\vec{g}(\vec{R})/dt = -d\vec{g}(-\vec{R})/dt$. Si la partícula tiene una velocidad pequeña, la simetría no será exacta y tendrá lugar la radiación de una pequeña cantidad de momento.

³³Para un paquete de ondas, el tetravector correspondiente es $\overset{\Rightarrow}{G}$ (4.77) y sus componentes $G^i = (W/c, \vec{G})$.

³⁴No se confunda al tiempo propio de la partícula τ_p con el retardado t_p .

Figura 5.22: Diagrama polar del factor $1/\sigma^5$

De la misma forma, la potencia radiada \mathcal{P}_r y a la cantidad de movimiento radiada por unidad de tiempo $d\vec{\mathcal{G}}_r/dt$ pueden incluirse en el tetravector

$$\frac{d \vec{\mathcal{G}}_r}{d\tau_p} = \gamma_p \frac{d \vec{\mathcal{G}}_r}{dt} \Rightarrow \frac{d \mathcal{G}_r^i}{d\tau_p} = \gamma_p \left(\frac{\mathcal{P}_r}{c}, \frac{d \vec{\mathcal{G}}_r}{dt} \right) \quad (5.132)$$

En el sistema propio de la partícula $\gamma_p = 1$ y \mathcal{P}_r y $d\vec{\mathcal{G}}_r/dt$ se reducen a \mathcal{P}_{r0} (5.130b) y $d\vec{\mathcal{G}}_{r0}/dt$ (5.131), por lo que cumplen el principio de correspondencia.

Para buscar una expresión general de $\mathcal{P}_r = d\mathcal{W}_r/dt$, puede tenerse en cuenta que \mathcal{W}_r/c es la componente temporal de un tetravector, por lo que se transforma como el tiempo y su derivada temporal es un escalar. Luego \mathcal{P}_r es un escalar que se reduce, para $\beta_p = 0$, a la fórmula de Larmor 5.130b ($\mathcal{P}_r = \mathcal{P}_{r0}$), la cual es una función cuadrática de la aceleración. Una función escalar del cuadrado de la aceleración es la norma del tetravector aceleración 1.46

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = c^2 \gamma_p^6 \{ (\vec{\beta}_p \wedge \dot{\vec{\beta}}_p)^2 - \dot{\vec{\beta}}_p^2 \} \quad (5.133)$$

En el sistema propio de la partícula, su velocidad es nula, $\dot{\vec{\beta}}_p = \dot{\vec{\beta}}_{p0}$ y $\gamma_p = 1$, con lo cual

$$\frac{1}{c^2} \vec{w} \cdot \vec{w} = \frac{1}{c^2} \vec{w}_0 \cdot \vec{w}_0 = -\dot{\vec{\beta}}_{p0}^2$$

La fórmula de Larmor, válida para el sistema propio de la carga, puede, pues, escribirse como $\mathcal{P}_{r0} = -e^2/(6\pi \varepsilon_0 c^3) \vec{w}_0 \cdot \vec{w}_0$ y su generalización a un sistema no propio es

$$\mathcal{P}_r(t) = \frac{-e^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \vec{w} \cdot \vec{w} = \frac{e^2}{6\pi \varepsilon_0 c} \gamma_p^6 \{ \dot{\vec{\beta}}_p^2 - (\vec{\beta}_p \wedge \dot{\vec{\beta}}_p)^2 \} \quad (5.134)$$

Esta es la *Fórmula de Lienard* para la potencia radiada por una partícula con velocidad arbitraria $\vec{\beta}_p$ ³⁵. Dado que resulta de integrar la intensidad sobre todas las direcciones de observación, solo conserva la dependencia del ángulo que forman la velocidad y la aceleración. Anotando a este último como κ

$$\mathcal{P}_r(t) = \tau m \vec{a}_p^2 \gamma_p^4 (\gamma_p^2 \cos^2 \kappa + \sin^2 \kappa) \quad (5.135)$$

En esta expresión se pone claramente de manifiesto que la potencia radiada crece rápidamente con γ_p , proporcionalmente a γ_p^6 cuando la velocidad y la aceleración son paralelas y a γ_p^4 cuando son perpendiculares.

Siguiendo la misma línea de razonamiento, puede encontrarse una expresión general de $d \vec{\mathcal{G}}_r / d\tau_p$. Para ello, basta con verificar que

$$\frac{d \vec{\mathcal{G}}_r}{d\tau_p} = \gamma_p \frac{d \vec{\mathcal{G}}_r}{dt} \equiv -\frac{e^2}{6\pi \varepsilon_0 c^5} (\vec{w} \cdot \vec{w}) \vec{u} \quad (5.136)$$

es un tetravector que incluye a 5.130b y 5.131 cuando $\beta_p \rightarrow 0$ ³⁶.

De acuerdo con 5.132, la cantidad de movimiento radiada por unidad de tiempo es

$$\frac{d \vec{\mathcal{G}}_r(t)}{dt} = \frac{e^2}{6\pi \varepsilon_0 c^2} \gamma_p^6 \{ \dot{\vec{\beta}}_p^2 - (\vec{\beta}_p \wedge \dot{\vec{\beta}}_p)^2 \} \vec{\beta}_p \quad (5.137)$$

Esta expresión permite hallar la cantidad de movimiento radiada en la unidad de tiempo por una partícula cargada si se conoce su trayectoria pero las ecuaciones del movimiento que pueden derivarse de ella son no lineales y, en general, sin utilidad práctica. Ponen de manifiesto algo importante y que indica el límite de aplicabilidad de la electrodinámica clásica, como es el hecho de que, debido a la velocidad finita de propagación de la radiación, una partícula interacciona con su propio campo. En la próxima sección se ofrece una introducción a este problema.

Otra forma interesante de expresar lo anterior, especialmente la potencia, es en función del campo electromagnético externo aplicado a la carga. Teniendo en cuenta a las expresiones de la fuerza de Minkowski \vec{M} 2.66 y 2.69b,

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = \frac{1}{m^2} \vec{M} \cdot \vec{M} = \frac{1}{m^2} M^i M_i = \frac{e^2}{m^2} \gamma_p^2 \{ (\vec{\beta}_p \cdot \vec{E})^2 - (\vec{E} + c \vec{\beta}_p \wedge \vec{B})^2 \}$$

con lo que la potencia radiada toma las formas

$$\mathcal{P}_r = \frac{1}{6\pi \varepsilon_0} \frac{e^4}{c^3 m^2} \gamma_p^2 \{ (\vec{E} + c \vec{\beta}_p \wedge \vec{B})^2 - (\vec{\beta}_p \cdot \vec{E})^2 \} \quad (5.138a)$$

$$\mathcal{P}_r = \frac{\mathcal{E}^2}{6\pi \varepsilon_0} \frac{e^4}{c^7 m^4} \{ (\vec{E} + c \vec{\beta}_p \wedge \vec{B})^2 - (\vec{\beta}_p \cdot \vec{E})^2 \} \quad (5.138b)$$

³⁵Fue obtenida en 1898 y, dada la fecha, sin el recurso a la teoría de la relatividad.

³⁶Según 1.41 $\vec{u} \rightarrow u^i = \gamma_p(c, \vec{v})$.

En la última igualdad se ha introducido a la energía de la partícula $\mathcal{E} = \gamma_p mc^2$. Dado que la potencia radiada es función inversa de la masa, los electrones son las partículas cargadas que más energía pierden por radiación.

En la sección F.2.1 se aplican estos resultados a los aceleradores lineales y circulares.

5.4. Movimiento radiativo de las cargas

El principio de equivalencia de la masa con la energía exige que el propio campo electromagnético que acompaña a la partícula cargada presente una inercia o, lo que es lo mismo, que la energía de dicho campo contribuya en alguna proporción a la masa de la partícula. Por otra parte, en la sección anterior se ha visto que una partícula acelerada pierde energía y cantidad de movimiento debido al fenómeno de radiación, lo que indica que la carga interacciona con su propio campo. Estas dos cuestiones, que están íntimamente relacionadas, no pueden ser tratadas de forma plenamente satisfactoria dentro del marco de la electrodinámica clásica y establecen claramente el límite de su competencia. El tratamiento que aquí se ofrece es elemental y no relativista pero basta para mostrar las principales contradicciones y limitaciones del modelo de las partículas cargadas, clásico y puntual, que se ha utilizado a lo largo de este texto. Tratamientos más amplios pueden encontrarse en las referencias [Gómez], [Konopinski], [Jackson], [Panofsky y Phillips], [Vanderlinde]³⁷.

5.4.1. Masa electromagnética

La predicción de la masa y la estructura de las partículas elementales es uno de los grandes retos de las teorías físicas actuales. Parece claro que una parte de la masa de las partículas debe de tener origen electromagnético y otra debe ser atribuida a los campos que mantienen cohesionada a dicha carga. Posiblemente, la demostración más dramática de la equivalencia de la masa en reposo con la energía electromagnética sea el proceso de aniquilación de una partícula con su antipartícula, ya comentado en el apéndice B.

En una primera etapa se pensó que la masa en reposo del electrón podría ser puramente electrostática. De acuerdo con el principio de equivalencia, $m c^2$ debería ser igual a la energía del campo creado por la carga; pero ésta

$$W_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{r=0}^{\infty} E^2 dv \quad (5.139)$$

es infinita a menos que la densidad de carga sea finita incluso para $r \rightarrow 0$. Si se supone que el electrón tiene a su carga distribuida uniformemente dentro de un radio r_0 , se obtiene para este último el valor

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 m c^2} \simeq 2,82 \cdot 10^{-15} m \quad (5.140)$$

³⁷ Es interesante anotar que la inclusión en el desarrollo teórico de los potenciales adelantados permite eliminar algunas de las divergencias que aparecen en el mismo. Para obtener las ecuaciones relativistas del movimiento radiativo de las partículas, Dirac emplea una receta de mitad y mitad de potenciales retardados y adelantados. Al mismo resultado, empleando hipótesis igualmente fuertes, puede llegar sin el recurso de los potenciales adelantados [Konopinski].

Esta magnitud se conoce como *Radio clásico del electrón* y es muy inferior a la longitud de onda de Compton

$$\lambda_C \equiv \frac{h}{mc} \simeq 137 r_0 \quad (5.141)$$

que marca aproximadamente el límite mínimo espacial para el tratamiento clásico de una partícula de masa m . Por otra parte, aunque los experimentos de scattering entre partículas permiten la determinación de una estructura de distribución de carga para el protón y el neutrón, dentro de una distancia del orden de r_0 , ese mismo tipo de experimentos muestra que el electrón se comporta como puntual, al menos hasta distancias del orden de los $10^{-18} m$, por lo que su masa electromagnética sería muy superior a la que se mide empíricamente. Los muones, con una masa de unas 207 veces la del electrón, se comportan igualmente como puntuales. Esto muestra que la masa en reposo m de una partícula con carga asociada³⁸ no puede ser exclusivamente electromagnética y debe escribirse

$$m = m_0 + m_{em}$$

A m_0 se le conoce como *masa desnuda de la partícula* y, plausiblemente, como sugirió Poincaré, constituye una contribución negativa que representa a los campos no-electromagnéticos que cohesionan a la carga e impiden que se disperse por repulsión mutua. La adición de este término a la masa electromagnética m_{em} es el proceso que se conoce como *Renormalización de la masa* y que es utilizado, con resultados de enorme precisión, para la resolución de la dinámica radiativa.

El principio de equivalencia exige que

$$m_{em} \rightarrow \frac{W_0}{c^2} \quad (5.142)$$

pero, con un ejemplo simple, puede verse que también en esta asignación aparecen dificultades.

Supóngase a una carga puntual, de carga e , dotada de un movimiento uniforme y no relativista con respecto al sistema del laboratorio. Desde su sistema propio el campo es puramente electrostático, $\vec{E}' \sim \widehat{R}'/R'^2$, $\vec{B}' = 0$. Los campos medidos en el sistema del laboratorio pueden obtenerse mediante las aproximaciones de primer orden en β de las leyes 2.60 de transformación de los campos

$$\vec{E} \simeq \vec{E}' , , \quad \vec{B} \simeq \frac{1}{c} \vec{\beta} \wedge \vec{E}$$

La cantidad de movimiento del campo que acompaña a la carga se obtiene integrando

$$\vec{G} = \int \vec{g} dv$$

que puede escribirse en forma diádica e integrarse con el resultado³⁹

$$\vec{G} = \vec{v}_p \cdot \frac{\varepsilon_0}{c^2} \int (E^2 \overset{\leftrightarrow}{I} - \vec{E} \vec{E}) dv = \frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2} \vec{v}_p \quad (5.143)$$

³⁸El neutrón tiene carga pero es neutro globalmente.

³⁹Problema 5-28.

La masa electromagnética que se deduce de ésto

$$m_{em} \rightarrow \frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2} \quad (5.144)$$

difiere en un factor de 4/3 de la predicha por el principio de correspondencia 5.144. Este factor aparece en otros desarrollos teóricos, como en el de Abraham-Lorentz, y es una indicación de conflicto con la invarianza relativista.

5.144, 5.141 y los datos experimentales, indican que estos problemas están situados en la frontera entre la teoría clásica y la cuántica, por lo que difícilmente admitirán soluciones, basadas en una u otra teoría, que sean plenamente satisfactorias.

5.4.2. Fuerza de reacción

La potencia suministrada a la partícula cargada por una fuerza externa \vec{F}_e no se invierte totalmente en incrementar su energía cinética \mathcal{E}_c puesto que parte de ella debe aparecer como potencia radiada \mathcal{P}_{r0} (5.130b) que, en adelante, escribiremos como \mathcal{P}_r . El balance energético correspondiente

$$\vec{F}_e \cdot \vec{v}_p = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \mathcal{P}_r \quad (5.145)$$

puede interpretarse en función de una fuerza adicional \vec{F}_r , denominada *Fuerza de reacción radiativa* o, simplemente, fuerza de reacción, tal que⁴⁰,⁴¹

$$\mathcal{P}_r \equiv -\vec{F}_r \cdot \vec{v}_p \Rightarrow (\vec{F}_e + \vec{F}_r) \cdot \vec{v}_p = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \quad (5.146)$$

Cabe entonces la pregunta de por qué se ha abordado el estudio del movimiento de cargas sin tener en cuenta a esta fuerza de reacción. Las razones son básicamente dos:

- Esta fuerza es despreciable en la mayoría de los casos prácticos.

- No se dispone de ningún tratamiento teórico de la misma, clásico o cuántico, que sea totalmente satisfactorio. La electrodinámica cuántica ofrece herramientas que permiten calcular los efectos asociados a esta fuerza con extrema precisión pero que no subsanan los defectos de fundamento implícitos en este problema. Las dificultades residen principalmente en las lagunas existentes en el conocimiento de la naturaleza de las partículas elementales y, resumiendo, en los propios límites de las teorías físicas disponibles.

Una forma natural de tratar el problema, debida a Abraham y Lorentz, sería la de modelar a la carga puntual como a una densidad de carga encerrada en una esfera de radio finito a y calcular la interacción de la partícula con sus propios campos cuando $a \rightarrow 0$. Este tratamiento, aunque tiene interés teórico, da resultados erróneos incluso en el caso no relativista [Jackson]. En el marco relativista, el modelo de una distribución rígida de carga es incompatible con las transformaciones de Lorentz y en cualquier caso, se desconoce la "posible" estructura del electrón.

⁴⁰De forma análoga se introducen otras fuerzas asociadas a intercambios de energía, como la de fricción.

⁴¹Puesto que dicha fuerza aparece en conjunción con la radiación, parece razonable suponer que sus agentes posibles son los propios campos de radiación pero un análisis más directo, como el de Abraham y Lorentz, indica que ésta debe ser considerada como la reacción de la carga con sus propios campos de velocidad retardados.

Estimación del efecto de reacción :

Para partículas lentas, la potencia radiada viene dada aproximadamente por la fórmula de Larmor 5.130b

$$\mathcal{P}_r = \tau m a_p^2 \quad (5.147)$$

donde se ha simplificado la notación $a_{p0} \rightarrow a_p$.

El tiempo característico del electrón, $\tau_e \simeq 6,26 \cdot 10^{-24} s$, equivale al tiempo invertido por la luz en recorrer la distancia de $1,9 \cdot 10^{-15} m$, próxima al radio clásico del mismo.

La potencia suministrada por la fuerza exterior es⁴²

$$\vec{F}_e \cdot \vec{v}_p = m \vec{a}_p \cdot (\vec{v}_p + \tau \vec{a}_p) \quad (5.148)$$

y los efectos radiativos serán pequeños, en general, si $\vec{a}_p \cdot \frac{\vec{v}_p}{\tau} \gg \vec{a}_p^2$.

Para hacer estimaciones de la importancia del efecto de la fuerza de reacción radiativa, se analizan dos problemas concretos en los que se supone que su efecto es pequeño y que se traduce en una ligera perturbación de la trayectoria de la partícula. De esta forma, el problema puede abordarse en dos etapas: la primera encuentra la trayectoria sin perturbar, despreciando el efecto de reacción, y la segunda corrige aproximadamente dicha trayectoria teniendo en cuenta a la pequeña perturbación:

Movimiento bajo fuerzas perpendiculares a la velocidad, $\vec{F}_e \perp \vec{v}_p$:

En este caso $\vec{F}_e \cdot \vec{v}_p = 0$ por lo que la radiación es el único agente capaz de modificar la energía cinética del movimiento: 5.145 se reduce a

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = -\mathcal{P}_r \Rightarrow \Delta\mathcal{E}_c = - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_r dt \quad (5.149)$$

Para establecer la importancia de $\Delta\mathcal{E}_c$ en el movimiento de la carga, deberá compararse con un valor medio, o característico, de la energía cinética en el intervalo de observación del movimiento de la partícula (t_1, t_2).

Para concretar, considérese, por ejemplo, al movimiento ciclotrónico de una partícula de carga e y masa m en el seno de un campo magnético uniforme \vec{B} , véase la sección B.2.2. Si el efecto de la reacción radiativa es pequeño, puede hacerse una primera aproximación de la trayectoria despreciando su efecto

$$\vec{F}_e = m \vec{a}_p = m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_p \Rightarrow a_p = \Omega v_p , , \quad \Omega = \frac{e B}{m}$$

Introduciendo a_p en la fórmula de Larmor y en 5.149 a la potencia radiada resultante, se tiene que

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_c}{\tau_\varepsilon} , , \quad \tau_\varepsilon \equiv \frac{1}{2\tau\Omega^2} \Rightarrow \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_{c0} e^{-t/\tau_\varepsilon}$$

⁴² $d\mathcal{E}_c/dt = \frac{1}{2} m d(\vec{v}_p \cdot \vec{v}_p)/dt$.

Luego τ_E es el tiempo que tarda una carga en reducir su energía inicial en el factor $1/e$. A un electrón en distintos campos magnéticos le corresponde los valores de dicha constante

$$\tau_E = \begin{cases} 2,6 \text{ s} & \text{para } B = 1 \text{ Tesla (Tokamak)} \\ 33 \text{ años} & \text{para } B = 0,5 \text{ gauss (Ionosfera)} \end{cases}$$

Movimiento lineal, $\vec{F}_e \parallel \vec{v}_p \parallel \vec{a}_p$:

En este caso, 5.148 pude escribirse como

$$F_e v_p = \underbrace{m v_p a_p}_{(a)} + \underbrace{\tau m a_p^2}_{(b)}$$

El término de radiación será despreciable si $(a) \gg (b) \Rightarrow T_0 \equiv \frac{v_p}{a_p} \gg \tau$.

Por el contrario, es apreciable si $T_0 \sim \tau$, es decir, cuando una partícula lenta sufre una fuerte aceleración. Para un oscilador lineal, $a_p \sim \omega v_p = 2\pi f v_p$, por lo que, para un electrón, la frecuencia a la que los efectos de radiación son importantes es del orden de $f \sim 1/(2\pi\tau) \simeq 2,5 \cdot 10^{22} \text{ Hz}$, lo que corresponde a una longitud de onda $\lambda \sim 10^{-14} \text{ m}$ (rayos X - γ duros) y situa a esta condición en el límite teórico. Obsérvese que, por otra parte,

$$\lim_{v_p \ll a_p \tau} \frac{(a)}{(b)} = 0$$

por lo que en el inicio del movimiento acelerado todo el trabajo de la fuerza aplicada se invertiría en el término radiante. Esto plantea dificultades teóricas cuya discusión puede verse en [Konopinski] y [Jackson]. Como se ha expuesto anteriormente, el tratamiento de las correcciones radiativas al movimiento se limitará al caso en que éstas son pequeñas.

Deducción de la fuerza a partir del principio de conservación de la energía :

La aplicación del principio de conservación de la energía condujo en el apartado anterior a la consideración de una fuerza de reacción radiativa cuyo trabajo se iguala a la potencia radiada cambiada de signo.

$$\vec{F}_r \cdot \vec{v}_p = -\mathcal{P}_r = -\tau m a_p^2 \quad (5.150)$$

Puede encontrarse una expresión explícita de esta fuerza, a partir de este principio, cuya validez se restringe a cierto tipo de movimientos cílicos tales que

$$[\vec{v}_p \cdot \vec{a}_p]_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (5.151)$$

Integrando por partes a la ecuación 5.150, en el intervalo $[t_1, t_2]$, se tiene que

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_r \cdot \vec{v}_p dt = -\tau m \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}_p \cdot \vec{a}_p dt = -\tau m \underbrace{[\vec{v}_p \cdot \vec{a}_p]_{t_1}^{t_2}}_{=0} + \tau m \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{a}}_p \cdot \vec{v}_p dt$$

donde el primer sumando del segundo miembro se ha anulado debido a la condición 5.151. De esta forma, identificando los integrandos del primero y segundo miembro, puede obtenerse una fuerza equivalente de reacción

$$\vec{F}_r = \tau m \dot{\vec{a}}_p \quad (5.152)$$

válida para simular el efecto de reacción bajo la condición cíclica de partida. La ecuación del movimiento correspondiente será

$$\vec{F}_e + \vec{F}_r = m \vec{a}_p \Rightarrow \vec{F}_e = m (\vec{a}_p - \tau \dot{\vec{a}}_p) \quad (5.153)$$

que es la *Ecuación de Abraham-Lorentz*.

A esta ecuación, como ya se a mencionado, puede llegarse por caminos más "fundamentales" pero igualmente insatisfactorios [Konopinski] [Jackson]. El resultado obtenido, es como mínimo, sospechoso porque sube el orden de derivación temporal en la unidad ($\vec{F}_r \sim d^3\vec{r}/dt^3$) y tiene soluciones que son físicamente inaceptables: en ausencia de fuerza externa

$$\dot{\vec{a}}_p = +\frac{1}{\tau} \vec{a}_p \Rightarrow \vec{a}_p = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{estable} \\ \vec{a}_{p0} e^{t/\tau} & \rightarrow \text{inestable} \end{cases}$$

Existe, pues, una solución estable que es aceptable físicamente y otra inestable ("runaway") que claramente no lo es; no cabe pensar que la carga se autoacelere por reacción con su propio campo. No obstante, bajo las condiciones que aquí se han impuesto, este tipo de solución queda excluido por no cumplir la condición 5.151. En cualquier caso el modelo obtenido es de gran utilidad para el estudio de movimientos en los que se cumple dicha condición y $\vec{F}_e \gg \vec{F}_r$ y como punto de partida para el estudio de modelos más precisos, si no más fundamentales.

5.5. Problemas

5-1. Sean dos cargas puntuales $\pm q(t)$, en el vacío, situadas respectivamente en los puntos $\pm \frac{d}{2} \hat{z}$.

- a) Hallar, en el dominio del tiempo, el potencial retardado producido en un punto arbitrario \vec{r} .
- b) Hacer lo mismo en el dominio de la frecuencia, para $q(t) = q_0 \cos \omega_0 t$ y en la zona lejana $r \gg \frac{d^2}{\lambda_0}$ y d .
- c) Particularizar los resultados anteriores para un dipolo eléctricamente pequeño ($d \ll \lambda_0$)

SOLUCION:

(a) - El potencial retardado viene dado por la integral

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{[\rho]}{R} dv'$$

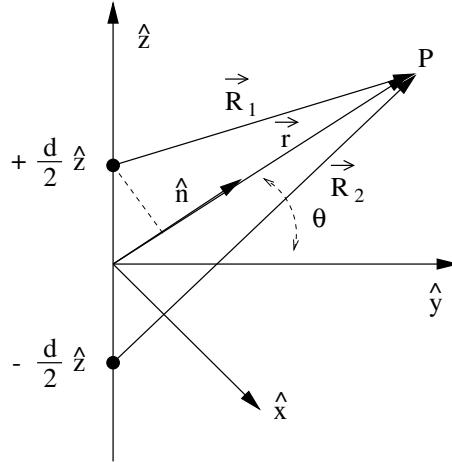


Figura 5.23:

Si las dos cargas se sitúan sobre el eje z , figura 5.23 la densidad puede describirse como

$$\rho(z') = q(t) \left\{ \delta(\vec{r}' - \frac{1}{2}d\hat{z}) - \delta(\vec{r}' + \frac{1}{2}d\hat{z}) \right\}$$

La densidad retardada es, por lo tanto,

$$[\rho] = q(t - \frac{R}{c}) \left\{ \delta(\vec{r}' - \frac{1}{2}d\hat{z}) - \delta(\vec{r}' + \frac{1}{2}d\hat{z}) \right\}$$

Realizando la integral

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q(t - \frac{R_1}{c})}{R_1} - \frac{q(t - \frac{R_2}{c})}{R_2} \right\} \quad (5.154)$$

donde,

$$\vec{R}_1 = \vec{r} - \frac{1}{2}d\hat{z} \quad , \quad \vec{R}_2 = \vec{r} + \frac{1}{2}d\hat{z}$$

(b) - En el caso de que $q(t)$ sea una función armónica de frecuencia angular $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$, el problema puede abordarse de dos formas equivalentes:

- Transformando por Fourier $q(t)$, hallando el potencial en el dominio de la frecuencia y llevando a cabo la transformada inversa de este último. Según el apéndice III

$$\text{si} \quad q(t) = q_0 \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \Rightarrow q(\omega) = \frac{1}{2} q_0 \{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\}$$

- De forma más simple, puede hacerse uso de la convención fasorial extendiendo analíticamente $q(t) \rightarrow q_0 e^{j\omega_0 t}$ en el plano complejo, hallarse el potencial fasorial y extraerse la parte real del mismo.

Siguiendo el segundo camino,

$$V_{\omega_0}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} \rho_{\omega_0} \frac{e^{-jk_0 R}}{R} dv'$$

donde $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$ y

$$\rho_{\omega_0} = q_0 e^{j\omega_0 t} \left\{ \delta(\vec{r}' - \frac{1}{2}d\hat{z}) - \delta(\vec{r}' + \frac{1}{2}d\hat{z}) \right\}$$

es la expresión fasorial de la densidad de carga.

De acuerdo con esto

$$V_{\omega_0}(\vec{r}) = \frac{q_0 e^{j\omega_0 t}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{e^{-j\omega_0 \frac{R_1}{c}}}{R_1} - \frac{e^{-j\omega_0 \frac{R_2}{c}}}{R_2} \right\} \quad (5.155)$$

Hallando la parte real del anterior, se obtienen el potencial retardado en el dominio del tiempo

$$V(\vec{r}, t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\cos \omega_0(t - \frac{R_1}{c})}{R_1} - \frac{\cos \omega_0(t - \frac{R_2}{c})}{R_2} \right\} \quad (5.156)$$

que es un caso particular de la expresión 5.154.

Aproximación para campo lejano $r \gg \frac{d^2}{\lambda_0}$ y d :

Se partirá de la expresión 5.155. De acuerdo con 5.37, véase la figura 5.23,

$$\frac{e^{-jk_0 R}}{R} \simeq \frac{e^{-jk_0 r}}{r} e^{jk_0 \vec{n} \cdot \vec{r}'} = \frac{e^{-jk_0 r}}{r} e^{jk_0 \delta} \quad , \quad r \gg \frac{d^2}{\lambda_0} y d \quad (5.157)$$

donde

$$\delta = \vec{n} \cdot \vec{r}' = \begin{cases} \delta_1 = \frac{1}{2}d \cos \theta & \text{para } \vec{r}' = \frac{1}{2}d \\ \delta_2 = -\frac{1}{2}d \cos \theta & \text{para } \vec{r}' = -\frac{1}{2}d \end{cases}$$

Substituyendo en la ecuación de partida

$$V_{\omega_0}(\vec{r}) \simeq \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2j e^{j\omega_0(t - \frac{r}{c})}}{r} \sin(k_0 \frac{d}{2} \cos \theta) \quad (5.158)$$

Hallando la parte real de lo anterior

$$V(\vec{r}, t) \simeq -\frac{q_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sin \omega_0(t - \frac{r}{c})}{r} \sin(k_0 \frac{d}{2} \cos \theta)$$

(c) - En este caso $d \ll \lambda_0$:

$$x = \frac{1}{2} k_0 d \cos \theta = \pi \frac{d}{\lambda_0} \cos \theta \ll 1 \Rightarrow \sin x \simeq x \Rightarrow$$

$$V(\vec{r}, t) \simeq -\frac{q_0}{2\epsilon_0} \frac{d}{\lambda_0} \frac{\sin \omega_0 (t - \frac{r}{c})}{r} \cos \theta$$

5-2. Demostrar que, bajo las condiciones $r \gg r', \lambda$,

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{e^{-jk r}}{r} e^{jk \vec{n} \cdot \vec{r}'} \right) \simeq -jk n_\alpha \left(\frac{e^{-jk r}}{r} e^{jk \vec{n} \cdot \vec{r}'} \right)$$

5-3. Un lazo circular de hilo conductor tiene un radio $a \ll \lambda$ y está recorrido por una intensidad $I_0 \cos(\omega t)$. Hallar el campo de radiación por los siguientes métodos:

- a) Considerándolo como un dipolo magnético radiante.
- b) Considerándolo como una antena.

SOLUCION:

Dado que la antena propuesta es eléctricamente pequeña, la suposición de que la corriente que circula por la misma es independiente de la posición es aproximadamente correcta.

(a) - En este caso, es necesario calcular el momento dipolar magnético de la distribución:

$$\vec{m}_\omega = \frac{1}{2} \int_{V'} \vec{r}' \wedge \vec{j}_\omega dv'$$

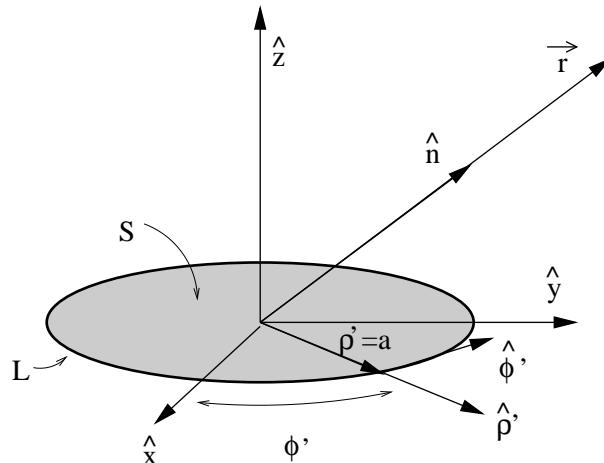


Figura 5.24:

Se trata de un hilo circular L , como se muestra en la figura 5.24, descrito por la ecuación

$$\vec{r}' = a \hat{\rho}'$$

y recorrido por una densidad de corriente

$$\vec{j} = j_\omega \hat{\phi}'$$

El elemento de volumen puede escribirse en función de los elementos de superficie y de línea

$$dv' = d\vec{s}' \cdot d\vec{l}' = ds' dl'$$

, tomando en la dirección del hilo a ambos elementos, de forma que

$$\vec{j} dv' = I_\omega' d\vec{l}' = I_\omega a d\phi' \hat{\phi}'$$

Según esto,

$$\vec{m}_\omega = \frac{1}{2} a^2 I_\omega \int_{\phi'=0}^{2\pi} \hat{\rho}' \wedge \hat{\phi}' d\phi' = I_\omega S \hat{z}$$

Del momento dipolar se deduce el potencial vector dipolar magnético (5.89)

$$\vec{A}_\omega = jk \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jk r}}{r} I_\omega S \hat{z} \wedge \vec{n}$$

y a partir de aquí, los campos de radiación correspondientes.

(b) - En este caso puede calcularse el vector de radiación, según 5.38

$$\vec{N}_\omega = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{j}_\omega e^{jk \vec{k} \cdot \vec{r}'} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} I_\omega a \underbrace{\int_{\phi'=0}^{2\pi} e^{jk \vec{n} \cdot \vec{r}'} \hat{\phi}' d\phi'}_{(I)}$$

Dado que $k r' = \frac{2\pi r'}{\lambda} \ll 1$ ($\frac{a}{\lambda} \ll 1$), la exponencial del integrando puede aproximarse hasta el primer orden

$$e^{jk \vec{n} \cdot \vec{r}'} \simeq 1 + jk \vec{n} \cdot \vec{r}'$$

y, puesto que $\int_{\phi'=0}^{2\pi} \hat{\phi}' d\phi' = 0$,

$$(I) = jk \int_{\phi'=0}^{2\pi} \vec{n} \cdot \vec{r}' \hat{\phi}' d\phi'$$

Operando en cartesianas

$$\vec{n} = n_x \hat{x} + n_y \hat{y} + n_z \hat{z}$$

$$\vec{r}' = a \hat{\rho}' = a(\hat{x} \cos \phi' + \hat{y} \sin \phi')$$

$$\hat{\phi}' = -\hat{x} \sin \phi' + \hat{y} \cos \phi'$$

luego

$$\begin{aligned}
 \frac{(I)}{jka} &= -\hat{x} \left\{ n_x \underbrace{\int_{\phi'=0}^{2\pi} \sin \phi' \cos \phi' d\phi'}_{=0} + n_y \int_{\phi'=0}^{2\pi} \sin^2 \phi' d\phi' \right\} + \\
 &\quad + \hat{y} \left\{ n_x \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cos^2 \phi' d\phi' + n_y \underbrace{\int_{\phi'=0}^{2\pi} \sin \phi' \cos \phi' d\phi'}_{=0} \right\} = \\
 &= \pi \hat{z} \wedge \vec{n}
 \end{aligned}$$

y

$$\vec{N}_\omega = jk \frac{\mu_0}{4\pi} I_\omega S \hat{z} \wedge \vec{n}$$

Como en el apartado anterior, el resto de los cálculos se deja como ejercicio.

- 5-4. Hallar la distribución lineal de carga y el momento dipolar de una antena lineal simétrica a partir de la expresión 5.52 de la intensidad en la misma.

SOLUCION:

La distribución de corriente en una antena lineal y simétrica se aproxima según la expresión 5.52

$$I_\omega(z) \simeq \begin{cases} I_0 \sin k(l-z) & , \quad z > 0 \\ I_0 \sin k(l+z) & , \quad z < 0 \end{cases}$$

Para hallar la distribución de carga se aplica la ecuación de conservación

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \int_V \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

a un volumen elemental como el representado en la figura 5.25. Su forma es cilíndrica, sus bases, de magnitud ΔS , son transversales a la distribución L y su altura es Δz .

Dado que solo hay flujo a través de las bases,

$$\Delta S \Delta z \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right]_{(z,t)} \simeq \Delta S [\vec{j} \cdot \hat{z}]_{(z,t)} - \Delta S [\vec{j} \cdot \hat{z}]_{(z+\Delta z,t)}$$

Puesto que la densidad de corriente y la de carga son lineales, $\Delta S \vec{j} \cdot \hat{z} = i$ (la intensidad) y $\rho \Delta S = \rho_L$ (la densidad lineal de carga) y la expresión anterior puede escribirse de la forma

$$\frac{\partial \rho_L(z,t)}{\partial t} \simeq -\frac{1}{\Delta z} \{ i(z+\Delta z,t) - i(z,t) \}$$

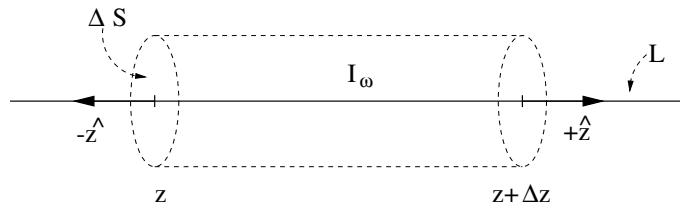


Figura 5.25:

y, en el límite $\Delta z \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \rho_L(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} \Rightarrow \rho_{L\omega}(z) = -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial I_\omega(z)}{\partial z}$$

que son las versiones de la ecuación de continuidad para distribuciones lineales, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. De acuerdo con esta última,

$$\rho_\omega(z) \simeq \begin{cases} -j \frac{I_0}{c} \cos k(l-z) & , , \quad z > 0 \\ j \frac{I_0}{c} \cos k(l+z) & , , \quad z < 0 \end{cases}$$

El resto del problema se deja como ejercicio.

- 5-5. Demostrar la expresión dada en 5.54 para el factor de una antena lineal y simétrica.
- 5-6. Sea una antena como la de la figura 5.6 cuya longitud es eléctricamente pequeña ($L \ll \lambda$). Utilícese esta aproximación para hallar la distribución de corriente a lo largo de la antena, los campos, la resistencia de radiación, la directividad y la anchura del haz (distancia angular entre las direcciones a las cuales la intensidad de radiación media es la mitad de la máxima).

SOLUCION:

Distribución de corriente :

Bajo la aproximación propuesta

$$x = \frac{L}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin x \simeq x \\ \cos x \simeq 1 - x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$I_\omega(z') \simeq \begin{cases} I_0 \sin k(l-z') \simeq I_0(l-z') & , , \quad z' > 0 \\ I_0 \sin k(l+z') \simeq I_0(l+z') & , , \quad z' < 0 \end{cases}$$

Campos :

Dado que $kl, kl \cos \theta \ll 1$,

$$F(\theta) \simeq k^2 l^2 \sin \theta$$

y

$$\vec{N}(\vec{n}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} k I_0 l^2 \hat{z} \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} k I_0 l^2 \frac{e^{-jk r}}{r} \hat{z} \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = -jk \vec{n} \wedge \vec{A} = -j \frac{\mu_0}{4\pi} k^2 I_0 l^2 \frac{e^{-jk r}}{r} \hat{\phi}$$

Resistencia de radiación :

$$R_{rad} = 2 \frac{\langle P \rangle}{I_0^2} = \frac{Z_0}{2\pi} \int_0^\pi |F(\theta)|^2 \sin^2 \theta d\theta = 40(kl)^4 = 40(\pi \frac{L}{\lambda})^4 , \quad Z_0 \simeq 120\pi$$

Puede observarse que la resistencia de radiación es muy inferior a la del dipolo hertziano porque es proporcional a la cuarta potencia de kl y no a la segunda.

Directividad y anchura del haz :

La directividad D es el valor máximo de la ganancia directiva. Esta última es fácil de obtener

$$G(\theta) = \frac{2}{3} \sin^2 \theta \Rightarrow D = \frac{2}{3} \quad (5.159)$$

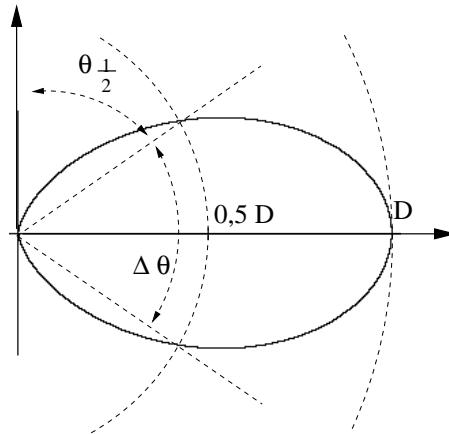


Figura 5.26:

En cuanto a la anchura del haz, ésta puede obtenerse con ayuda de la figura 5.26 en la que se representa el diagrama de radiación o diagrama polar de la ganancia directiva. El ángulo $\theta_{\frac{1}{2}}$ es aquel para el cual la ganancia directiva es la mitad de su valor máximo D

$$\frac{G(\theta_{\frac{1}{2}})}{D} = \frac{1}{2}$$

De acuerdo con 5.159

$$\sin^2 \theta_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y, según se aprecia en la figura, la anchura del haz es

$$\Delta\theta = \pi - 2\theta_{\frac{1}{2}} = 90^\circ$$

5-7. Hallar el momento dipolar eléctrico de la antena anterior y, a partir del resultado, confirmar la expresión de los campos radiantes.

5-8. La figura 5.27-a presenta el esquema del circuito emisor-receptor empleado por Heinrich Hertz, en 1886, para la primera demostración de la existencia de ondas electromagnéticas. Consta de un carrete de inducción, conectado en paralelo a una antena lineal y a un chispómetro de bolas $a - a$, y una antena receptora de lazo con otro chispómetro $b - b$. La tensión inducida por el carrete se modula con las descargas en $a - a$ resultando una corriente oscilante que se acopla a la antena y emite ondas de longitud $\lambda \simeq 8\text{ m}$. Las chispas que se detectan en $b - b$ atestiguan la propagación de las ondas hasta la antena receptora.

Como puede verse, a diferencia de las antenas lineales simétricas que se tratan en el texto, la de Hertz está cargada en sus extremos con dos objetos metálicos cuyo papel es el de actuar como condensadores. Por esta razón, en los extremos de la antena puede acumularse carga y deja de cumplirse la condición $I(|z| = l) = 0$.

En la figura 5.27-b se representa a un Dipolo hertziano, ésto es, una antena del tipo anteriormente descrito pero eléctricamente corta ($l \ll \lambda$).

Hallar:

- a) La corriente que circula por la antena y el momento dipolar de la misma.
- b) Los campos lejanos, tratando a la antena como un dipolo corto.
- c) La resistencia de radiación a partir de los campos.

SOLUCION:

(a) - La corriente puede deducirse de 5.52, como en el problema anterior, pero teniendo en cuenta que ya no se cumple la condición $I(|z| = l) = 0$, puesto que los condensadores colocados en los extremos permiten que en estos puntos se acumulen cargas $\pm Q(t)$.

Desarrollando en serie alrededor del origen ($z > 0$)

$$I(z) \simeq I_0 \sin k(l - z') \simeq I_0 (\sin kl - k z \cos kl) \simeq I_0$$

En la última aproximación se ha tenido en cuenta que $kl \ll 1 \Rightarrow \sin kl \simeq 1 \cos kl \simeq 0$. Luego esta antena admite una intensidad de amplitud arbitraria pero uniforme.

Para calcular el momento dipolar, $d = Q L$, basta con aplicar la ecuación de continuidad en un extremo.

$$-I = -\frac{dQ(t)}{dt} \Rightarrow Q_\omega = \frac{I_0}{j\omega} = \frac{I_0}{jk c} \Rightarrow d_\omega = \frac{I_0 L}{jk c}$$

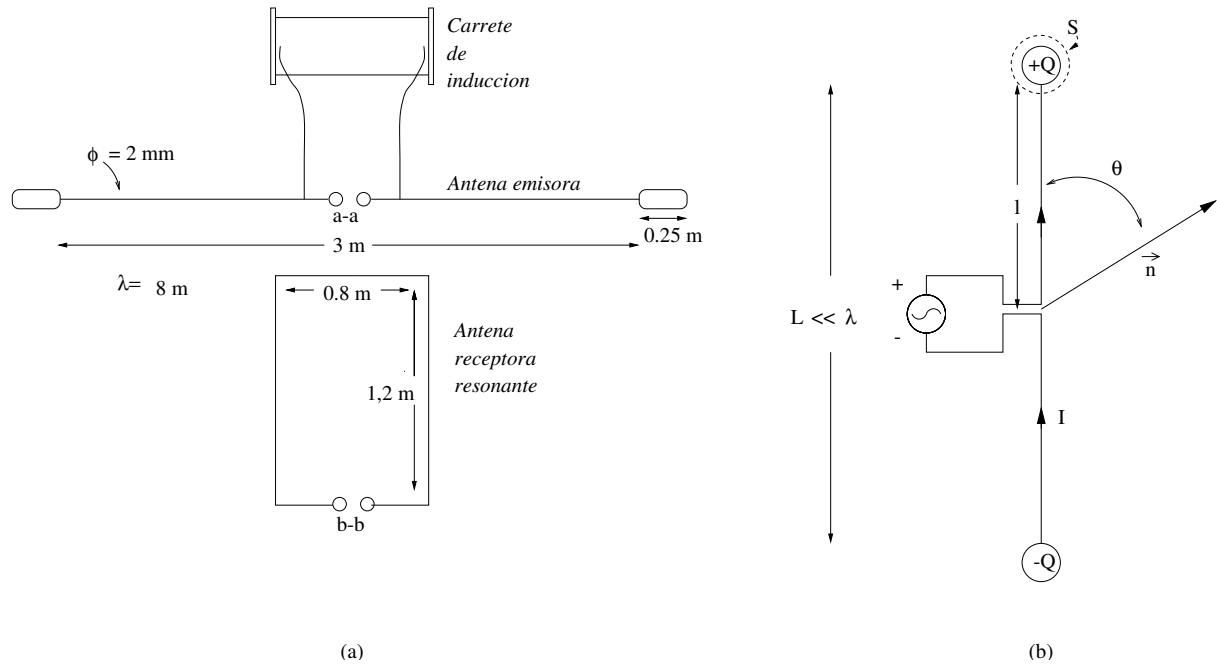


Figura 5.27:

(b) - Los campos lejanos vienen dados por 5.76 y 5.77

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = jk L \frac{Z_0}{4\pi} I_0 \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{\theta}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = jk L \frac{1}{4\pi} I_0 \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{\varphi}$$

Los campos del dipolo hertziano, alimentado con una intensidad I_0 , dependen linealmente de $kL \sim \frac{L}{cT} \frac{L}{\lambda}$.

(c) - La resistencia de radiación se deduce de 5.80

$$R_{rad} = 2 \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{I_0^2} = 80 (\pi \frac{L}{\lambda})^2 \quad (5.160)$$

La antena del problema anterior tiene en común con ésta la estructura dipolar eléctrica pero la segunda tiene una resistencia de radiación $\sim \frac{L^2}{\lambda^2}$ muy superior a la de la primera. Además, cualquier antena de hilo puede dividirse en pequeños segmentos de longitud L , cada uno de los cuales se comporta como un dipolo hertziano, pudiéndose considerar a la antena de partida como a una superposición de estos dipolos.

- 5-9. Deducir la expresión 5.71 para el campo eléctrico dipolar eléctrico a partir de la del campo magnético 5.69.
- 5-10. Comprobar la expresión 5.80 para la potencia media radiada por un dipolo eléctrico.
- 5-11. Supóngase a un átomo monoelectrónico, de radio $a = 10^{-10} m$, cuya nube electrónica ha sido desplazada inicialmente a una distancia z_0 del núcleo y dejada oscilar a su frecuencia natural (véase la sección F.1.1). Considerándolo como un dipolo radiante, comparar la energía mecánica total \mathcal{E} con el valor medio de la que pierde por radiación en un periodo $\langle W_{dc} \rangle$, mediante la definición de un factor $Q \equiv 2\pi \frac{\mathcal{E}}{\langle W_{dc} \rangle}$, y, en función de éste último, determinar el tiempo que tardaría la oscilación en disipar el 90% de su energía inicial. Dar a este problema un tratamiento no relativista y justificarlo.

SOLUCION:

Se empezará suponiendo que las pérdidas de radiación son pequeñas, lo que se justificará con el cálculo de Q .

Según la sección F.1.1, el movimiento de la nube electrónica es armónico simple $z = z_0 \cos \omega_0 t$, donde

$$\omega_0 = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 a^3 m}} \simeq 1,6 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow f_0 \simeq 2,5 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

Para ver si el movimiento es relativista, se acota la velocidad

$$v = -z_0 \omega_0 \sin \omega_0 t \Rightarrow v_{max} = z_0 \omega_0 \ll a \omega_0 \Rightarrow v_{max} \ll 1,6 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \ll c$$

El movimiento es no relativista, por lo que la energía cinética puede escribirse como $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v^2$.

En ausencia de disipación, la energía total (no relativista) es constante e igual a la suma de la cinética y la potencial

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = (\mathcal{E}_c)_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} m z_0^2 \omega_0^2$$

De acuerdo con 5.80, la potencia media radiante (disipada) como dipolo es

$$\langle \mathcal{P}_d \rangle = \frac{\omega_0^4 |d_\omega|^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \quad (5.161)$$

y la energía disipada en un ciclo

$$\begin{aligned} \langle W_{dc} \rangle &= \langle \mathcal{P}_d \rangle T = 2\pi \frac{\langle \mathcal{P}_d \rangle}{\omega_0} \\ Q &\equiv 2\pi \frac{\mathcal{E}}{\langle W_{dc} \rangle} = \omega_0 \frac{\mathcal{E}}{\langle P_d \rangle} \simeq 10^{37} \end{aligned} \quad (5.162)$$

Se comprueba, pues, que en cada ciclo se pierde una fracción muy pequeña de la energía media total. Luego esta energía se disipa lentamente de acuerdo con el principio de conservación de la energía (véase la sección E.1.11.4): la potencia media disipada en un instante determinado corresponde a una disminución, por unidad de tiempo, de la energía total del movimiento

$$\langle P_d \rangle = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

de acuerdo con 5.162

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\mathcal{E}}} \mathcal{E} \quad , \quad \tau_{\mathcal{E}} = \frac{Q}{\omega_0} = 7 \times 10^{20} s$$

Integrando

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-\frac{t}{\tau_{\mathcal{E}}}}$$

con lo que el tiempo t_0 en que se disipa el 90 % de la energía es

$$e^{-\frac{t_0}{\tau_{\mathcal{E}}}} = 0,1 \Rightarrow t_0 = \tau_{\mathcal{E}} \ln 10 = 1,6 \times 10^{21} s$$

5-12. Suponiendo que un electrón orbital, del átomo del problema anterior, girase alrededor del eje $z = 0$, represéntese como un dipolo giratorio y calcúlese el tiempo que tardaría la órbita clásica en colapsar su radio a la mitad de su valor inicial (Véase la sección F.1.3).

5-13. Demostrar que la traza de la matriz cuadripolar es nula.

5-14. Un sistema radiante está constituido por tres cargas: dos de magnitud $q = q_0 \cos(\omega_0 t)$ y situadas respectivamente en $\vec{r}' = \pm l \hat{z}'$ ($l \ll r, \lambda$), y otra de magnitud $-2q$ situada en el origen. Hallar la intensidad media radiada en función de la dirección de radiación. Realizar los cálculos:

- a) Tratando al sistema como un cuadripolo.
- b) Tratándolo como dos dipolos separados por una distancia l .

SOLUCION:

La distribución de cargas del enunciado es la que se muestra en la figura 5.28. Su carga neta y su momento dipolar son nulos, por lo que el primer momento significativo es el cuadripolar eléctrico.

(a) - Los momentos cuadripolares son

$$Q_{\alpha\beta} = \int_{\mathcal{V}'} (3x'_{\alpha}x'_{\beta} - \delta_{\alpha\beta}r'^2) \rho_{\omega} dv' \quad (5.163)$$

donde, la densidad de carga, extendiendo analíticamente $q(t) \rightarrow q_0 e^{j\omega t}$ e ignorando la función temporal, es

$$\rho_{\omega} = q_0 [\delta(\vec{r}' - l\hat{z}) + \delta(\vec{r}' + l\hat{z}) - 2\delta(\vec{r}')] \quad$$

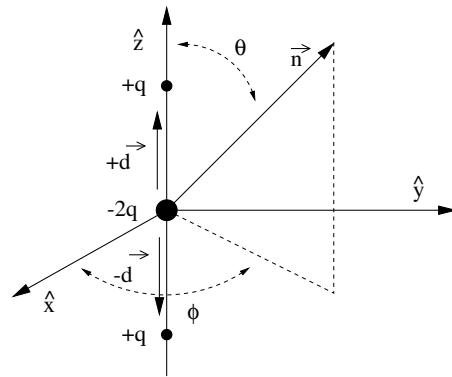


Figura 5.28:

Dado que las cargas están situadas en el eje z ,

$$(Q_{\alpha\beta})_{\alpha \neq \beta} = 0 \quad , \quad Q_{xx} = Q_{yy}$$

y, como la traza $\sum_{\alpha} Q_{\alpha\alpha} = 0$ es nula,

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz}$$

$$Q_{zz} = q_0 \int_{V'} (2z'^2 - x'^2 - y'^2) [\delta(\vec{r}' - l\hat{z}) + \delta(\vec{r}' + l\hat{z}) - 2\delta(\vec{r}')] = 4l^2 q_0$$

y

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2} Q_{zz} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La intensidad media radiada es

$$\langle \mathcal{I} \rangle = \frac{d\langle \mathcal{P} \rangle}{d\Omega} = k^6 \frac{c}{2\varepsilon_0(24\pi)^2} |\vec{n} \wedge (\vec{Q} \cdot \vec{n})|^2 \quad (5.164)$$

donde

$$|\vec{n} \wedge (\vec{Q} \cdot \vec{n})|^2 = 36l^4 q_0^2 \sin^2\theta \cos^2\theta$$

El diagrama de radiación, representado en la figura 5.29, muestra como la radiación se anula en la dirección del cuadripolo y en las de su plano transversal.

(b) - Se deja como ejercicio.

- 5-15. Sea una carga con movimiento uniforme $x' = vt'$, donde $v' = 0,5c$. Hallar el tiempo y la posición retardados para un punto de observación $x = 1$, $y = 1$, $ct = 1$.

SOLUCION:

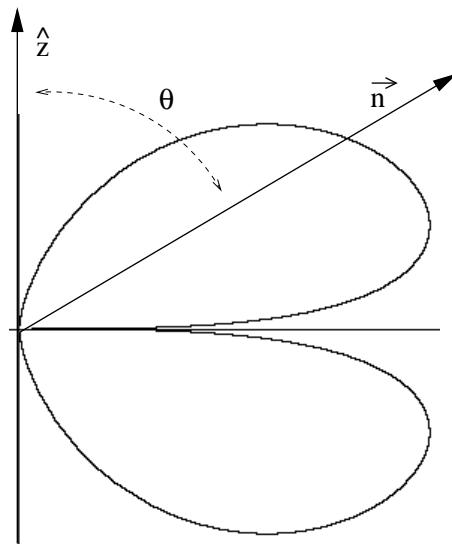


Figura 5.29:

Para hallar el tiempo retardado de la partícula es necesario resolver la ecuación

$$|\vec{r} - \vec{r}'(t')|^2 = c^2(t - t')^2$$

Esta ecuación es transcendente en general pero, en este caso, al ser el movimiento uniforme, puede resolverse algebraicamente. Utilizando la notación

$$\tau \equiv ct, \quad \tau_p \equiv ct'$$

la ecuación de la trayectoria de la partícula es

$$\vec{r}'(t') = \beta \tau_p \hat{x}$$

con lo que, substituyendo en la primera ecuación

$$\frac{3}{4} \tau_p^2 - \tau_p - 1 = 0 \Rightarrow \tau_p = \begin{cases} 2 > \tau & \text{futuro} \\ -\frac{2}{3} & \text{pasado} \end{cases}$$

La solución válida es la correspondiente al pasado.

5-16. Verificar las expresiones 5.103.

5-17. Verificar las expresiones 5.107.

5-18. Verificar las expresiones 5.110 (Para hallar $\nabla\sigma$ puede calcularse $\frac{\partial\sigma}{\partial x}$).

5-19. Obtener las expresiones 5.111 y 5.112 para los campos de los campos de velocidad y aceleración a partir de las expresiones obtenidas para los términos (a-d) (Téngase en cuenta que $\vec{\beta}_p(1 - \dot{\vec{R}} \cdot \vec{\beta}_p) = \vec{\beta}_p \{\vec{R} \cdot (\vec{R} - \vec{\beta}_p)\}$).

5-20. Hallar la relación entre las densidades de energía eléctrica y magnética del campo creado por una carga puntual con velocidad uniforme β_p en función de ésta y de la dirección de observación.

5-21. Comprobar la fórmula de Larmor 5.130b.

5-22. Demostrar 5.133.

5-23. Demostrar que la intensidad de radiación emitida por electrones ultrarelativistas ($\beta_p = 1 - x$, $x \ll 1$) en un acelerador lineal es máxima para $\theta \simeq \frac{1}{2\gamma_p}$, donde θ es el ángulo formado por la velocidad con la dirección de observación.

SOLUCION:

En un acelerador lineal $\vec{\beta}_p = \beta_p \hat{z} \parallel \dot{\vec{\beta}}_p$, luego, según 5.127,

$$\mathcal{I}_r \sim \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\sigma^5} \quad , \quad \sigma = 1 - \beta_p \cos \theta$$

Para hallar las direcciones θ_m de máxima intensidad

$$\frac{\partial \mathcal{I}_r}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow 3\beta_p \cos^2 \theta_m + 2 \cos \theta_m - 5\beta_p = 0$$

cuyas soluciones son

$$\cos \theta_m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 15\beta_p^2}}{3\beta_p}$$

De acuerdo con el enunciado, pueden hacerse las siguientes aproximaciones

$$\frac{1}{\beta_p} \simeq 1 + x \quad , \quad \beta_p^2 \simeq 1 - 2x \quad , \quad \sqrt{1 - Ax} \simeq 1 + \frac{1}{2}Ax \quad (Ax \ll 1)$$

Desechando las raíces $|\cos \theta_m| > 1$

$$\cos \theta_m \simeq 1 - \frac{1}{4}x$$

Como $x \ll 1$, $\theta_m \ll 1 \Rightarrow \cos \theta_m \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta_m^2$ y

$$\theta_m \simeq \sqrt{\frac{x}{2}} \simeq \frac{1}{2\gamma_p}$$

ya que, bajo la aproximación enunciada $\frac{1}{\gamma_p^2} \simeq 2x$.

- 5-24. Verificar que, en un acelerador lineal, en el cual las partículas son aceleradas por un campo eléctrico uniforme y constante, la potencia radiada por las cargas es independiente de la energía total \mathcal{E} de las mismas y es proporcional al cuadrado de la energía que el campo les suministra por unidad de longitud. Hallar la potencia radiada por un electrón si el campo acelerador es $E = 10 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$.

SOLUCION:

La potencia media radiada en función de los campos viene dada por 5.138b

$$\mathcal{P}_r = \frac{\mathcal{E}^2}{6\pi \varepsilon_0} \frac{e^4}{c^7 m^4} \{(\vec{E} + c \vec{\beta}_p \wedge \vec{B})^2 - (\vec{\beta}_p \cdot \vec{E})^2\}$$

en un acelerador lineal $\vec{B} = 0$, $\vec{E} \parallel \vec{\beta}_p$, luego

$$\mathcal{P}_r = \frac{1}{6\pi \varepsilon_0} \frac{e^4 E^2}{c^3 m^2} \sim (e E)^2$$

donde $e E = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}$ es la fuerza que el campo ejerce sobre la carga o, lo que es lo mismo, el trabajo que el campo realiza sobre la carga por unidad de longitud, y que se invierte en aumentar la energía de la misma.

- 5-25. Hallar la distribución angular de la intensidad radiada por una carga en un acelerador circular (radiación ciclotrónica). Situar a la velocidad en la dirección del eje z y a la aceleración en la del eje x . Dibujar esquemáticamente las secciones de diagrama polar de la intensidad para los planos $z = 0$ e $y = 0$.
- 5-26. Un electrón, cuya energía cinética es de 1 KeV, gira en el plano perpendicular a un campo magnético de 1 T. Comparar la energía que radia en un ciclo con su energía cinética.
- 5-27. Comprobar el valor dado en el texto al radio clásico del electrón.
- 5-28. Demostrar que, la cantidad de movimiento del campo arrastrado por una partícula que se mueva con velocidad uniforme $\beta_p \ll 1$ vendría dada por

$$\vec{G} = \vec{v}_p \cdot \frac{\varepsilon_0}{c^2} \int (E^2 \vec{I} - \vec{E} \vec{E}) dv = \frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2} \vec{v}_p$$

donde W_0 es la energía electromagnética total del campo en el sistema propio de la partícula.

SOLUCION:

Para $\beta_p \ll 1$, el campo que se mide en el sistema propio de la partícula S' es aproximadamente el electrostático

$$\vec{E}' \simeq \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\hat{R}}{R'^2}$$

En el sistema del laboratorio el campo, según 2.60, es

$$\vec{E} \simeq \vec{E}', \quad \vec{B} \simeq \frac{1}{c} \vec{\beta} \wedge \vec{E}' \tag{5.165}$$

por lo que la cantidad de movimiento total del campo es

$$\vec{G} = \int_{V \rightarrow \infty} \vec{g} dv = \frac{1}{c^2} \int_{V \rightarrow \infty} \vec{S} dv$$

Teniendo en cuenta que $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$, substituyendo los valores de los campos (5.165) en expresión anterior y escribiendo en forma diádica

$$E^2 \rightarrow \overset{\leftrightarrow}{I} E^2 , , \vec{E} (\vec{E} \cdot \vec{v}_p) \rightarrow \vec{v}_p \cdot (\vec{E} \vec{E})$$

la cantidad de movimiento puede escribirse de la forma

$$\vec{G} = \frac{\varepsilon_0}{c^2} \vec{v}_p \cdot \int_{V \rightarrow \infty} \left[\overset{\leftrightarrow}{I} E^2 - \vec{E} \vec{E} \right] dv$$

Dado que \vec{E} es aproximadamente coulombiano

$$\int_{V \rightarrow \infty} E_x^2 dv = \int_{V \rightarrow \infty} E_y^2 dv = \int_{V \rightarrow \infty} E_z^2 dv = \frac{1}{3} \int_{V \rightarrow \infty} E^2 dv = \frac{2}{3\varepsilon_0} W_0$$

y

$$\int_{V \rightarrow \infty} E_\alpha E_\beta dv = 0 \quad \text{para} \quad \alpha \neq \beta$$

Apéndice A

Apéndice del capítulo 1

A.1. Deducción de las transformaciones de Lorentz mediante experiencias pensadas

En las *Experiencias pensadas* se plantean situaciones cuyo transcurso se deduce mentalmente de la aplicación de un cierto número de principios. Las aquí expuestas [Panofsky y Phillips] conducen a la expresión de las transformaciones de Lorentz tomando como punto de partida a los postulados de la relatividad y los principios de homogeneidad e isotropía enunciados en los apartados 1.3 y 1.2.

A.1.1. Invarianza de las medidas de metros perpendiculares al movimiento

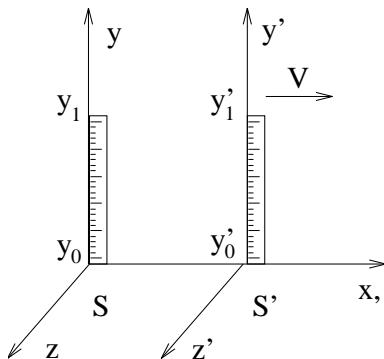


Figura A.1: Metros transversales al movimiento

La figura A.1 muestra a dos metros idénticos, colocados respectivamente a lo largo de los ejes y e y' y con sus extremos inferiores en $y_0 = 0$ e $y'_0 = 0$. Puesto que en $t = t' = 0$ coinciden los ejes y e y' , en ese mismo instante deben coincidir los extremos y_1 e y'_1 , por lo que ambos metros son iguales medida desde cualquiera de los dos sistemas de referencia. No es posible, por ejemplo, que

y_1 coincida en ese instante con un punto $y'_2 < y'_1$ porque, en contra del postulado de relatividad, desde ambos sistemas debería concluirse que el metro de \mathcal{S} es más corto que el de \mathcal{S}' .

Puesto que el espacio es homogéneo, si estos metros se desplazan paralelamente de sus posiciones iniciales, seguirán apareciendo como iguales. Como consecuencia de la isotropía espacial, este resultado es también válido si los metros se colocan en cualquier orientación perpendicular al movimiento.

A.1.2. Dilatación temporal

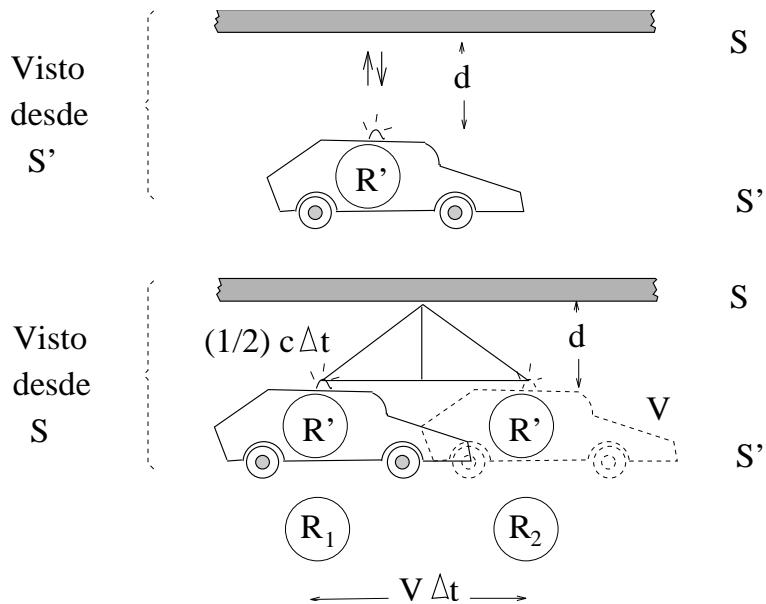


Figura A.2: Dilatación temporal

El resultado anterior y la experiencia ilustrada en la figura A.2 permiten cuantificar la dilatación temporal. La figura representa a un automóvil (sistema \mathcal{S}') que viaja por un túnel (\mathcal{S}). En su techo lleva un radar que emite señales electromagnéticas y las recibe después de ser reflejadas por el techo del túnel. Desde el punto de vista del automóvil, la luz recorre la distancia $2d$ en un tiempo $\Delta t' = \Delta\tau$ que, por estar medido por un solo reloj R' es un intervalo propio en el sistema \mathcal{S}' . Por el segundo principio, este camino es recorrido por la luz a la velocidad c , luego

$$d = \frac{c}{2} \Delta\tau$$

distancia que, por ser perpendicular al movimiento, es invariante.

Visto desde el sistema \mathcal{S} , entre la emisión y la recepción del pulso luminoso transcurre un intervalo Δt no propio, medido por los relojes R_1 y R_2 . En ese tiempo, el automóvil ha recorrido la distancia $V \Delta t$ y la luz la $c \Delta t$, por lo que, de acuerdo con la geometría de la figura

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{4} = \frac{V^2 \Delta t^2}{4} + d^2 \Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta \tau$$

A.1.3. Contracción de Lorentz

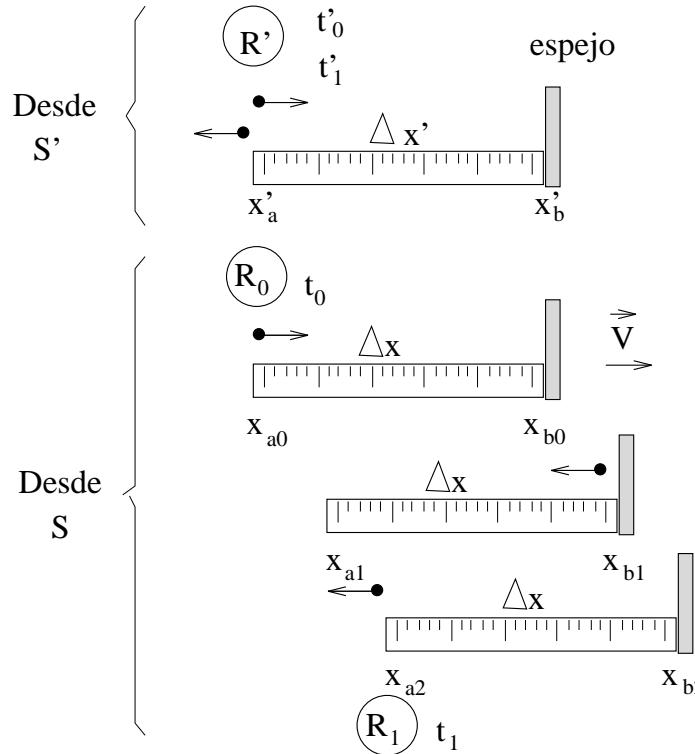


Figura A.3: Metros paralelos al movimiento

Considérese ahora a un metro en reposo sobre el eje x' , de forma que sus extremos ocupen las posiciones x'_a y x'_b . Su longitud propia es $\Delta x' = \Delta\Lambda$ y, como se indica en la figura A.3, puede medirse con un solo reloj R' en función del tiempo invertido por la luz en un viaje de ida y vuelta entre sus extremos. Un fotón parte en t'_0 de x'_a , se refleja en un espejo colocado en x'_b y regresa en t'_1 al punto de partida; ambos tiempos son medidos por R' luego el intervalo $\Delta t' = t'_1 - t'_0$ es el propio entre los dos sucesos de partida y llegada del fotón.

$$\Delta t' = t'_1 - t'_0 = \Delta\tau = \frac{2 \Delta\Lambda}{c}$$

Estos dos sucesos son vistos desde S de forma distinta. Como se muestra en la figura, el metro se mueve con respecto a este sistema: en el instante t_0 de partida, sus extremos ocupan las posiciones x_{a0} y x_{b0} , cuando el fotón se refleja en el espejo, ocupan las posiciones x_{a1} y x_{b1} y en el instante

t_1 de llegada las x_{a2} y x_{b2} . $\Delta t = t_1 - t_0$ ha sido medido por dos relojes, R_0 y R_1 , por lo que es el intervalo no propio correspondiente a $\Delta\tau$. De acuerdo con ésto

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \gamma\Delta\tau = \frac{2\gamma}{c}\Delta\Lambda$$

En este tiempo, la luz ha recorrido en el sistema S la distancia

$$c\Delta t = [x_{b1} - x_{a0}] + [x_{b1} - x_{a2}] = \Delta x + [x_{b1} - x_{b0}] + \Delta x - [x_{a2} - x_{a1}]$$

Pero, la distancia $[x_{b1} - x_{b0}]$ es la que el metro recorre a velocidad V mientras que la luz recorre $[x_{b1} - x_{a0}]$ a la velocidad c . De forma análoga $[x_{a2} - x_{a1}]$ es la recorrida por el metro mientras que la luz recorre $[x_{b1} - x_{a2}]$. Luego

$$\begin{aligned}[x_{b1} - x_{b0}] &= \beta[x_{b1} - x_{a0}] = \beta(\Delta x + [x_{b1} - x_{b0}]) \\ [x_{a2} - x_{a1}] &= \beta[x_{b1} - x_{a2}] = \beta(\Delta x - [x_{a2} - x_{a1}])\end{aligned}$$

Eliminando $[x_{b1} - x_{b0}]$, $[x_{a2} - x_{a1}]$ y Δt de estas ecuaciones, se obtiene

$$\Delta x = \frac{\Delta\Lambda}{\gamma}$$

A.1.4. Sincronización de relojes

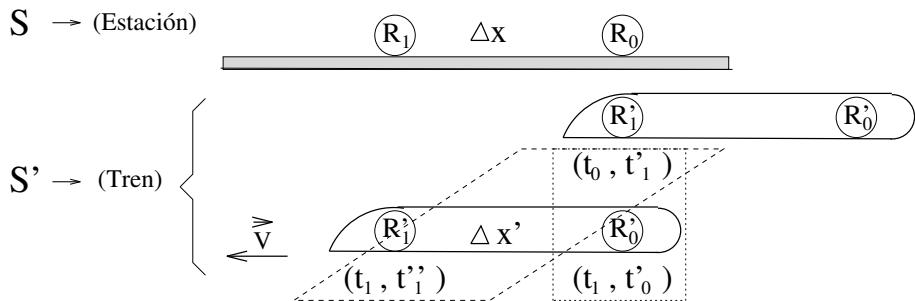


Figura A.4: Sincronización de relojes

Dada la relatividad de la simultaneidad, puesta de manifiesto en el capítulo 1, relojes que están puestos en hora en un sistema determinado, no aparecen sincronizados en otro distinto. En la experiencia que se muestra en la figura A.4, se supone el paso de un tren frente al andén de la estación. De forma análoga a lo expuesto en el párrafo 1.4.4, se prepara la experiencia colocando dos láseres en la estación, a una distancia Δx uno del otro, y disparándolos simultáneamente para marcar dos posiciones homólogas en el tren. La distancia $\Delta x'$, entre las marcas dejadas en el tren,

es una longitud propia en \mathcal{S}' cuya medida desde \mathcal{S} , con respecto al cual dichas marcas están en movimiento, es la medida no propia Δx^1 . Según esto

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

Una vez preparada la experiencia, se sitúan los relojes R_0 y R_1 en las posiciones de los láseres y los R'_0 y R'_1 en las de las marcas del tren y se hace pasar de nuevo a éste frente a la estación. El relato de lo observado desde el sistema \mathcal{S} es como sigue:

- En el instante t_0 , el reloj R'_1 pasa por la posición del R_0 . Un observador de \mathcal{S} , colocado en la posición de este último reloj, lee la esfera del primero y anota su lectura t'_1 . El suceso de la coincidencia de estos dos relojes se anota como (t_0, t'_1) .

- En el instante t_1 , dada la forma de preparar la prueba, tienen lugar simultáneamente dos sucesos: la coincidencia de los relojes R'_0 y R_0 , que se anota como (t_1, t'_0) , y la de R'_1 y R_1 , que se anota como (t_1, t''_1) . Las lecturas que los observadores de \mathcal{S} hacen en t_1 de las esferas de R'_0 y R'_1 son distintas, t'_0 y t''_1 respectivamente, porque ambos relojes están sincronizados en \mathcal{S}' y, por lo tanto, se ven fuera de sincronismo desde \mathcal{S} .

Si $\delta t'$ es la diferencia de sincronía detectada desde \mathcal{S}

$$\delta t' \equiv t'_0 - t''_1$$

ésta puede calcularse teniendo en cuenta lo que sigue:

* Los observadores de \mathcal{S} ven al tren moviéndose hacia la izquierda con velocidad V , por lo que en el intervalo $t_1 - t_0$ recorre la distancia

$$\Delta x = V(t_1 - t_0)$$

* En la caja rectangular y punteada de la figura se han agrupado a los sucesos (t_0, t'_1) y (t_1, t'_0) . El intervalo $t_1 - t_0$ es propio, medido por R_0 , y corresponde al no propio $t'_0 - t'_1$ que ha sido medido por R'_1 y R'_0 . Luego

$$(t'_0 - t'_1) = \gamma(t_1 - t_0)$$

* En la otra caja se incluye a los sucesos (t_0, t'_1) y (t_1, t''_1) . $t_1 - t_0$, medido ahora por R_1 y R_0 , es el intervalo no propio correspondiente al propio $t''_1 - t'_1$, medido por R'_1 . En este caso

$$(t_1 - t_0) = \gamma(t''_1 - t'_1)$$

¹ Δx es al mismo tiempo la medida propia de la distancia entre los dos láseres de la estación y la medida impropia de la distancia entre las dos marcas que estos han dejado en el tren.

Eliminando t''_1 , $(t'_1 - t'_0)$, $t_1 - t_0$ y Δx , se obtiene

$$\delta t' = \frac{\beta}{c} \Delta x' \quad (\text{A.1})$$

Compárese con 1.34.

A.1.5. Transformaciones de Lorentz

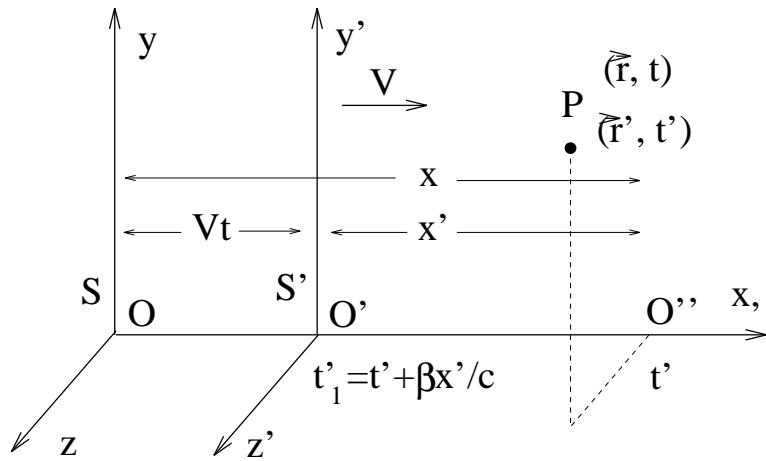


Figura A.5: Transformaciones de Lorentz

Para determinar la ley de transformación de x , téngase en cuenta que, según la figura A.5, el punto P del universo, observado desde \mathcal{S} , tiene por coordenada a

$$x = \overline{OO'} + \overline{O'O''}$$

$\overline{OO'} = Vt$ y $\overline{O'O''} = x'/\gamma$, porque x' es una longitud propia en \mathcal{S}' cuyos extremos ocupan en el instante t las posiciones O' y O'' de \mathcal{S} , luego $\overline{O'O''}$ es la medida no propia, contraída, de x' . De esto se deduce la ley de transformación para x

$$x = Vt + \frac{x'}{\gamma} \Rightarrow x' = \gamma(x - Vt)$$

Para obtener la ley de transformación temporal, obsérvense desde \mathcal{S} los siguientes sucesos:

- En $t = 0$ el reloj de \mathcal{S}' situado en O' marca $t'_0 = 0$.
- En $t = t$ el mismo reloj marca $t'_1 = t' + \beta x'/c$, de acuerdo con A.1, porque se halla situado a la distancia x' del reloj de P , el cual marca el tiempo t' .

El intervalo $\Delta\tau = t'_1 - t'_0 = t'_1$ es un intervalo propio de \mathcal{S}' , porque ha sido medido por el mismo reloj de O' , que corresponde al intervalo, impropio en \mathcal{S} , $\Delta t = t - 0$, luego

$$t = \gamma(t' + \frac{\beta}{c}x')$$

A.2. Transformación de la dirección de movimiento

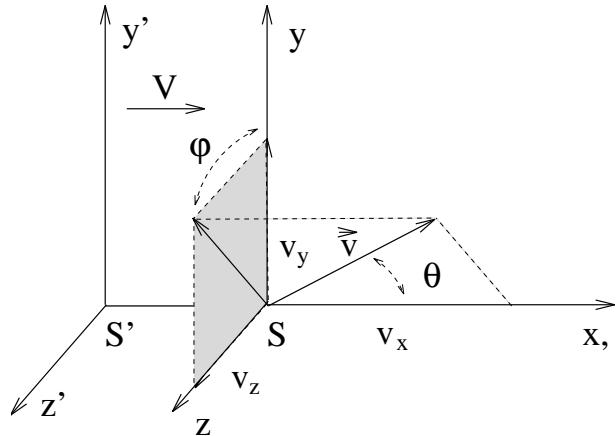


Figura A.6: Composición de velocidades

De acuerdo con 1.40, véase la figura A.6, v_y y v_z se transforman de la misma manera por lo que el ángulo φ permanece invariante. Este no es el caso de θ

$$\operatorname{tg}\theta' = \sqrt{\frac{v_y'^2 + v_z'^2}{v_x'^2}} = \frac{v \operatorname{sen}\theta}{\gamma(v \cos\theta - V)} \quad (\text{A.2})$$

De esta expresión se deducen efectos interesantes. A continuación se analiza el de la aberración de la luz.

A.2.1. Aberración de la luz

El fenómeno de aberración de la luz ha jugado un papel histórico importante en la discusión de la teoría de la relatividad. En la práctica se determina por un conjunto de observaciones astronómicas. La fundamental consiste en orientar diariamente a un telescopio en una dirección fija del cielo y determinar las posiciones de una cierta estrella en el plano focal. Esta recorre una elipse en dicho plano como consecuencia del movimiento de la Tierra alrededor del Sol.

Para los fotones, $v = c$, y A.2 se reduce a

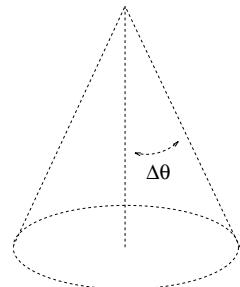


Figura A.7: Aberración de la luz

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\gamma (\cos \theta - \beta)} \quad (\text{A.3})$$

Esta es la expresión relativista de la *Aberración de la luz*. En las condiciones usuales de observación la predicción anterior difiere inapreciablemente de la de Galileo. Efectivamente, dado que la Tierra se mueve alrededor del Sol con una velocidad de unos 30 km.s^{-1} , $\beta \sim 10^{-4}$ es pequeña y puede comprobarse que

$$\Delta\theta \equiv \theta' - \theta \simeq \beta \operatorname{sen} \theta \ll 1 \text{ rad}$$

expresión que corresponde a la predicción galileana.

Apéndice B

Apéndice del capítulo 2

B.1. Masa inerte

Como se ha comentado en el capítulo 1, la teoría gravitatoria queda fuera del marco de la relatividad especial. La masa gravitatoria y la inerte son, en principio, distintos atributos de la materia que solo se identifican entre sí a través del postulado de equivalencia de la relatividad general. Mientras que el concepto de masa gravitatoria está relacionado con la magnitud de la fuerza de atracción entre cuerpos neutros, el de masa inerte lo está a la resistencia, o inercia, presentada por un cuerpo para cambiar su velocidad en presencia de fuerzas. Una forma simple de definir y analizar este concepto es mediante experiencias, efectivas o pensadas, de colisiones elásticas. En sentido restringido, se entiende que una colisión es una interacción de muy corto alcance entre dos partículas; éstas solo "se ven" cuando se encuentran a una pequeña distancia mutua, radio de interacción, dentro de la cual intercambian energía y cantidad de movimiento. El tiempo de propagación de la interacción es despreciable en las colisiones por lo que la ley de acción y reacción les es aplicable y su tratamiento relativista no presenta dificultad.

B.1.1. Masa en reposo

La masa en reposo puede definirse operacionalmente a través de experiencias de colisión elástica a baja velocidad, en el límite para $\beta \ll 1$. Considérese el choque elástico entre partículas esféricas de distinto volumen, fabricadas con el mismo material y dotadas de las velocidades v_1 y v_2 . Después de una colisión elástica frontal, las velocidades resultantes son respectivamente v'_1 y v'_2 . Puede comprobarse experimentalmente, con un alto grado de precisión, que los incrementos de velocidad de las partículas guardan una relación inversa con sus volúmenes V_1 y V_2 .

$$\frac{v'_1 - v_1}{v_2 - v'_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

La masa inerte m de una partícula se define como proporcional a su volumen a través de la constante ρ_M , la densidad de masa

$$m \equiv \rho_M V$$

, de tal forma que dos partículas, cualquiera que sea su naturaleza, tengan la misma masa si sufren el mismo incremento de velocidad en una experiencia como la anteriormente descrita. Si se repite la experiencia con esferas de materiales diversos, el resultado, en función de las masas, se describe como

$$\frac{v'_1 - v_1}{v_2 - v'_2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (\text{B.1})$$

expresión, esta última, que enuncia el principio de conservación de la cantidad de movimiento en un sistema aislado de partículas.

B.1.2. Masa en movimiento; conservación de la cantidad de movimiento

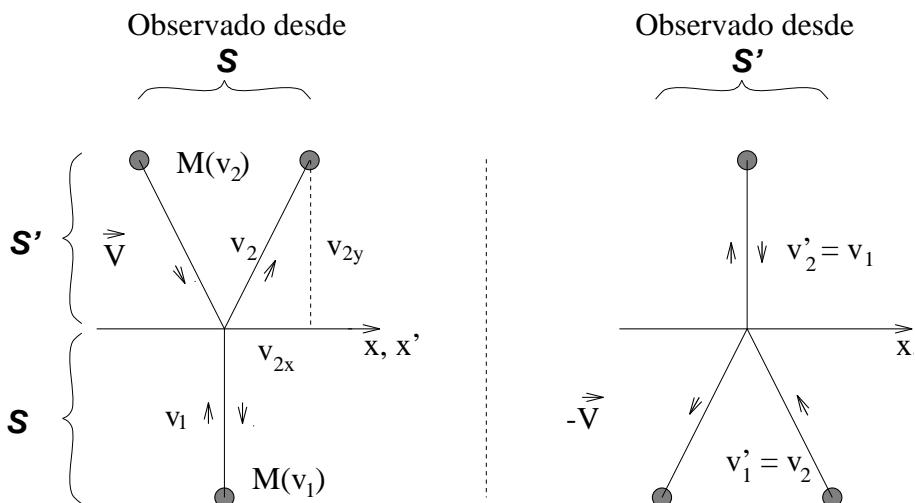


Figura B.1: Masa en movimiento

En el caso relativista, la situación es más compleja, como lo muestra la siguiente experiencia pensada propuesta por Lewis y Tolman [Konopinski]: supóngase que se dispone de dos lanzadores idénticos que disparan bolas elásticas de masa m con velocidad v_1 . Un lanzador se sitúa en el sistema S , como se muestra en la figura B.1, y dispara su bola en la dirección positiva del eje y . El otro se sitúa en el S' y lanza la suya en la dirección negativa del eje y' . El disparo de ambos lanzadores se realiza de forma que el choque de las partículas sea frontal, es decir, tal que los observadores de S y S' vean a sus proyectiles respectivos partir con velocidad v_1 en dirección transversal y volver, por el mismo camino, con la misma velocidad y en dirección contraria. La experiencia se ve de forma distinta desde cada uno de los sistemas de referencia: Observado desde el sistema S , el lanzador propio impulsa a la bola en dirección transversal y con velocidad v_1 , pero la velocidad v_2 de la otra

bola se verá distinta porque su lanzador está en \mathcal{S}' y, de acuerdo con las leyes de composición de la velocidad, ésta se mueve con respecto a \mathcal{S} con una componente x de velocidad igual a V .

El análisis de este problema en el dominio de las velocidades pequeñas ($v_1, V \ll c$) es sencillo: las cantidades de movimiento B.1 se conservan en el choque. Desde el sistema \mathcal{S} , las componentes en las dos direcciones espaciales de las cantidades de movimiento son:

$$m(v_{2x})_a = m(v_{2x})_d = mV \quad (\text{B.2})$$

$$mv_1 - mv_{2y} = mv_{2y} - mv_1 \Rightarrow mv_1 = mv_{2y} \quad (\text{B.3})$$

Para velocidades relativistas, la aplicación de la ley de composición de velocidades 1.40 a v'_2 , da como resultado

$$\vec{v}_2 = \left(v_{2x} = V, v_{2y} = \frac{v_1}{\gamma} \right)$$

La suposición de que la masa sea independiente de la velocidad permite seguir verificando B.2 pero no B.3. Si se quiere disponer de un principio relativista de conservación de la cantidad de movimiento, definida ésta como producto de masa por velocidad, es necesario redefinir la masa como función $M(v)$ del módulo de la velocidad y escribir, para la componente y de dicha cantidad de movimiento

$$M(v_2) v_{2y} = M(v_2) \frac{v_1}{\gamma} = M(v_1) v_1$$

Haciendo uso de 1.42,

$$\gamma = \frac{\gamma(v_2)}{\gamma(v_1)}$$

donde $\gamma(v_2)$ es el factor γ_p de la partícula lanzada en \mathcal{S}' , $\gamma(v_1)$ el de la que ha sido lanzada en \mathcal{S} y $\beta_{px} = \frac{v_{x1}}{c} = 0$. Eliminando γ se tiene que la relación

$$\frac{M(v_2)}{\gamma(v_2)} = \frac{M(v_1)}{\gamma(v_1)} = \frac{M(0)}{\gamma(0)} = m$$

es independiente de la velocidad de la partícula, por lo que la masa en movimiento se expresa de la forma

$$M(v) = \gamma_p m$$

B.1.3. Equivalencia entre masa y energía

La expresión 2.14 establece la equivalencia entre masa y energía. En el límite de baja velocidad

$$(\mathcal{E})_{\beta \ll 1} \simeq \mathcal{E}_0 + \frac{1}{2} m v^2$$

Si las masas en reposo no fueran intercambiables con otros tipos de energía, \mathcal{E}_0 sería un término aditivo sin significación física, pero la experiencia muestra que, incluso en el contexto comúnmente

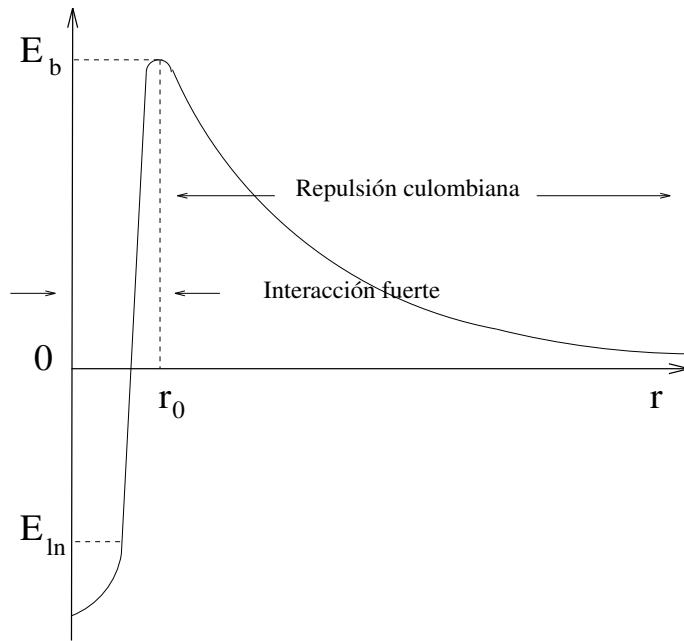
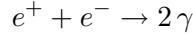


Figura B.2: Fusión de partículas

denominado "no relativista" ($\beta \ll 1$), este término tiene un significado físico fundamental. Partículas con energía cinética despreciable pueden reaccionar entre sí intercambiando toda su masa en reposo por energía cinética. Este es el caso, por ejemplo, de la reacción de aniquilación entre electrones y positrones



en la que un electrón y un positrón se aniquilan entre sí para dar como resultado a dos fotones γ , cada uno con energía $m_e c^2 \simeq 0,51 Mev$, que parten en direcciones opuestas.

En procesos importantes para la vida cotidiana, como puedan ser los de combustión, este mismo fenómeno se presenta aunque de forma menos notable que en el ejemplo anterior. En la combustión del carbón, un átomo de carbono y una molécula de oxígeno se combinan para formar un compuesto, el CO_2 , cuya masa es menor que la suma de las de sus componentes. Ese defecto de masa se compensa con cualquier otro tipo de energía, como la cinética o la de excitación de las partículas, la transportada por fotones, etc. Cuando en una molécula que tiene a sus electrones en el estado fundamental se excita a uno de ellos elevándolo a un nivel energético superior, la molécula adquiere una mayor masa debido a que ha incorporado la energía de excitación. Estas diferencias de masa son difícilmente detectables porque están producidas por la reestructuración de los niveles electrónicos atómicos y las diferencias de energía entre éstos es del orden del electronvoltio, lo que supone incrementos de masa relativos del orden de $10^{-8} \rightarrow 10^{-9}$. En estos procesos la masa se conserva con un alto grado de aproximación, lo que no supone que su equivalente energético sea despreciable; un kg de carbón, junto con el oxígeno correspondiente, producen una energía de combustión de unos 9 KWh .

En los procesos nucleares, las diferencias de energía entre niveles son muy superiores a las de

los procesos atómicos, del orden del *Mev*, por lo que los incrementos de masa y los rendimientos energéticos son correspondientemente más elevados. La fisión del ^{235}U produce unos $2,4 \times 10^7 \text{ KWh}$ y la fusión de deuterio y tritio unos $9,4 \times 10^7 \text{ KWh}$ por cada Kg de combustible. En estos casos, los incrementos de masa son muy significativos. La figura B.2 muestra la energía potencial entre dos núcleos ligeros, por ejemplo, de Hidrógeno. Al acercar ambos núcleos, éstos deben vencer la repulsión culombiana y remontar, o traspasar por efecto túnel, la barrera de potencial formada por la combinación de la interacción culombiana con la fuerte, esta última de signo contrario pero de corto alcance. Una vez traspasada la barrera, el núcleo incidente cae en un pozo de potencial y se liga al blanco en un nivel energético negativo. Si no se tiene en cuenta a la energía inicial de la partícula incidente, la energía negativa de ligadura E_{ln} hace que la reacción sea exoenergética y que $|E_{ln}|$, energía sobrante, aparezca como energía asociada a los productos de reacción. En consecuencia, el núcleo resultante de la fusión tiene menos energía y menos masa que la suma de sus componentes iniciales en una cantidad B , *Defecto de masa*, equivalente a $|E_{ln}|$. En general, según el principio de equivalencia entre masa y energía, la masa de un núcleo compuesto de A nucleones (N neutrones y Z protones) viene dada por

$$M(A, Z) = N m_n + Z m_p - B(A, Z)$$

donde m_n es la masa del neutrón y m_p la del protón. La figura B.3 representa al defecto de masa por nucleón B/A , en *Mev* por nucleón, frente al número de nucleones de cada núcleo y en ella se resalta como en la fisión de un núcleo pesado en dos más ligeros y con mayor defecto de masa por nucleón, o la fusión de núcleos ligeros en otro de mayor defecto de masa por nucleón, se produce una energía sobrante que puede ser aprovechada. En la figura se utiliza una escala más pequeña para la primera parte del eje A , por lo que el aumento del defecto de masa en esa zona de la gráfica es más pronunciado del que aparece.

B.2. Movimiento de partículas cargadas

Las ecuaciones del movimiento de una carga vienen dadas por 2.72a y 2.72b

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e \vec{v} \cdot \vec{E} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (\text{B.5})$$

A continuación se abordarán los casos más simples y, por esta razón, más significativos del movimiento relativista de una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético. Se considera que tanto \vec{E} como \vec{B} son constantes y uniformes. Descomponiendo al campo eléctrico de la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_{||} + \vec{E}_{\perp}$$

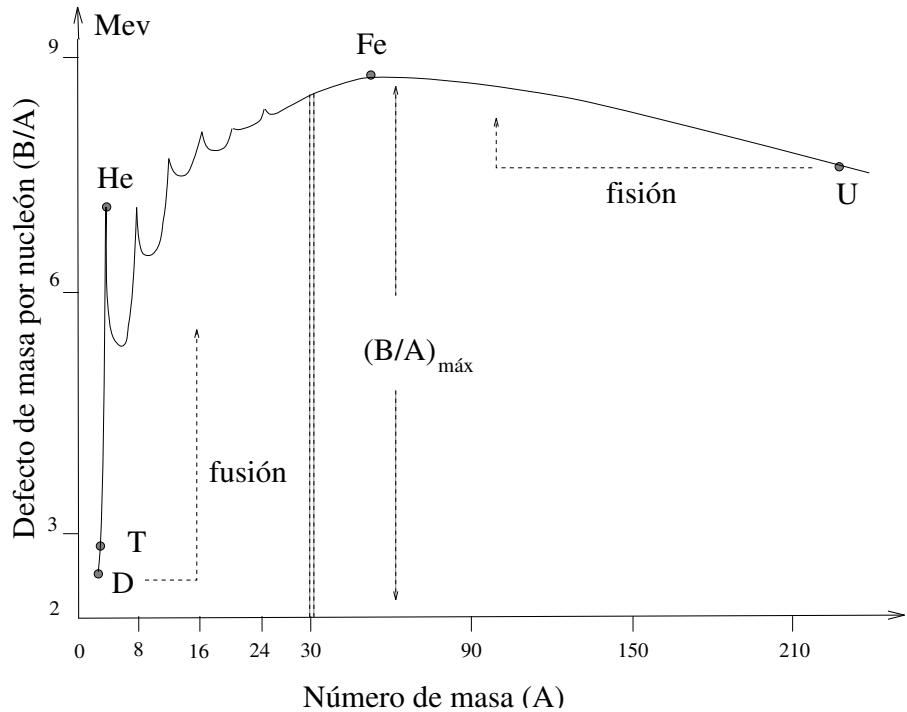


Figura B.3: Defecto de masa

, donde los subíndices \parallel y \perp denotan respectivamente a las componentes paralela y perpendicular a \vec{B} ¹, y teniendo en cuenta que $\vec{v}_\parallel \wedge \vec{B} = 0$, la ecuación B.5 puede desdoblarse en

$$\frac{d\vec{p}_\parallel}{dt} = e \vec{E}_\parallel \quad (B.6)$$

$$\frac{d\vec{p}_\perp}{dt} = e (\vec{E}_\perp + \vec{v}_\perp \wedge \vec{B}) \quad (B.7)$$

lo que permite tratar independientemente a las proyecciones del movimiento a lo largo del campo magnético y sobre el plano transversal al mismo. Por otra parte, la proyección transversal del movimiento es función de un \vec{E}_\perp que es perpendicular a \vec{B} , por lo que

$$(I_2)_\perp = 0$$

y, según 2.64 o 2.65 existe un sistema de referencia desde el cual puede anularse uno de los dos campos. Por esta razón, los casos del movimiento de una partícula en presencia de uno solo de los campos tienen una gran generalidad y a partir de ellos, transformando las ecuaciones de las trayectorias a otro sistema adecuado, puede estudiarse el movimiento de las partículas en presencia de ambos campos.

¹Estos mismos símbolos se utilizan en la sección 2.4.2 con distinto significado. Dentro del contexto correspondiente, ésto no debe dar lugar a confusión.

B.2.1. Movimiento hiperbólico

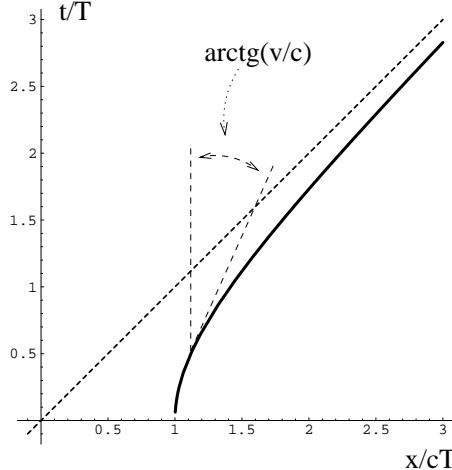


Figura B.4: Movimiento hiperbólico

Se denomina movimiento hiperbólico² al que posee una partícula sometida a un campo eléctrico uniforme y constante. Sea $\vec{E} = E_0 \hat{x}$ y $\vec{B} = 0$. Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dt} &= e E_0 \frac{dx}{dt} \\ \frac{dp_x}{dt} &= e E_0 \\ \frac{dp_y}{dt} &= \frac{dp_z}{dt} = 0\end{aligned}$$

Puesto que el movimiento en el plano yz es uniforme, el problema se reduce a estudiar el movimiento en la dirección del campo aplicado. Por lo tanto, partiendo del reposo $\vec{p}(t = 0) = \vec{0}$ en el punto de coordenadas $\vec{r}_0 = (x_0, 0, 0)$, la integral de las dos primeras ecuaciones es

$$\begin{aligned}e E_0(x - x_0) &= \mathcal{E} - m c^2 \\ e E_0 t &= p_x = \frac{m v_x}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

donde $mc^2 = \mathcal{E}_0 = (\mathcal{E})_{t=0}$

Para simplificar, se define la constante de tiempo $T \equiv \frac{mc}{e E_0}$ y, sin pérdida de generalidad, se elige como punto inicial a $x_0 = cT$. Normalizando el tiempo y el espacio de la forma

$$\tau \equiv \frac{t}{T}, \quad \kappa \equiv \frac{x}{x_0}$$

²Este movimiento es el uniformemente acelerado que se definió en el problema 1-28.

y despejando $\beta \equiv \frac{v_x}{c}$, se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} \\ \beta &= \frac{\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}}\end{aligned}\tag{B.8}$$

ecuaciones a partir de las cuales, teniendo en cuenta 2.14, puede expresarse a la energía y la posición en función del tiempo

$$\kappa = \sqrt{1 + \tau^2} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}\tag{B.9}$$

La ecuación del movimiento B.9 es de tipo hiperbólico

$$\kappa^2 - \tau^2 = 1$$

con respecto a las variables x y t .

Como es fácil de comprobar a partir de B.8 y de la figura B.4, $v_x \sim c$ para $t \sim T$ y $v_x/c \rightarrow 1$ para $t \rightarrow \infty$.

B.2.2. Movimiento ciclotrónico; deriva ambipolar

Una carga en presencia de un campo magnético uniforme y constante describe una trayectoria espiral cuya proyección transversal es circular. A este movimiento se le denominada ciclotrónico.

Considérese $\vec{E} = 0$ y $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. Las ecuaciones del movimiento resultantes son:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dt} &= 0 \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= e \vec{v} \wedge \vec{B}\end{aligned}$$

De la primera se deduce que la energía es una constante del movimiento y que también lo son γ_p , según 2.14, y el módulo de la velocidad de la partícula.

$$\mathcal{E} = cte \Rightarrow \gamma_p = cte, v = cte, M(v) = cte\tag{B.10}$$

La segunda ecuación puede ser escrita, de forma más significativa, como

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{p}\tag{B.11}$$

que es la conocida ecuación que describe la precesión de un vector \vec{p} con velocidad angular $\vec{\Omega}$. A esta última, que en el caso que nos ocupa se ha definido como

$$\vec{\Omega} \equiv -\frac{e \vec{B}}{\gamma_p m} = -\frac{e \vec{B}}{M(v)} = \Omega \hat{z} \Rightarrow \Omega \equiv -\frac{e B}{M(v)} \quad (\text{B.12})$$

, se le denomina *Frecuencia ciclotrónica*.

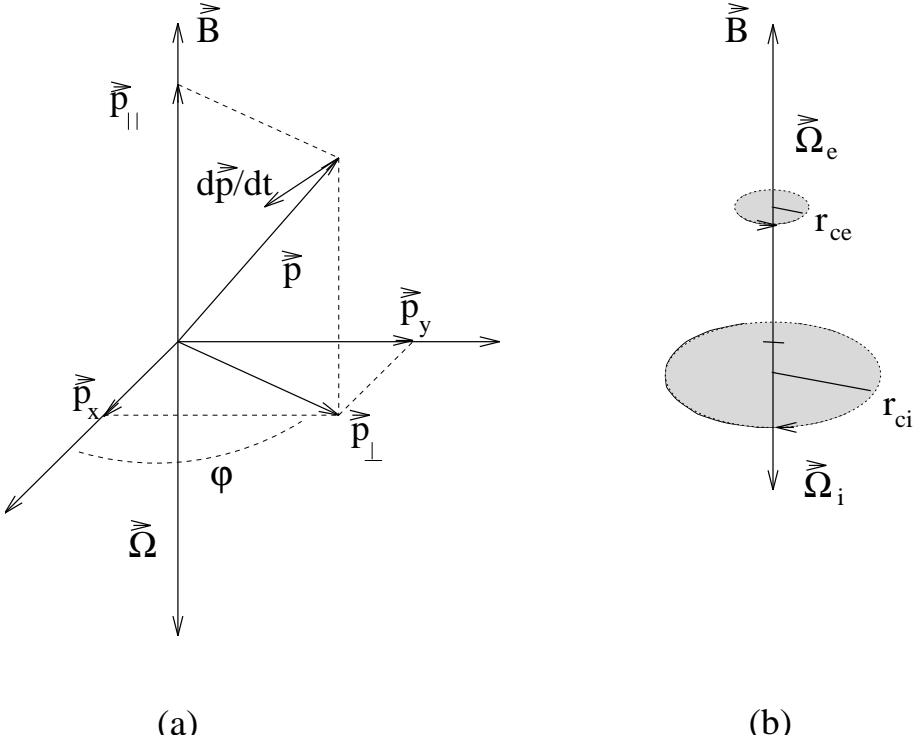


Figura B.5: Precesión de la cantidad de movimiento

Como puede verse en la figura B.5 (a), la componente paralela a $\vec{\Omega}$ del vector \vec{p} permanece constante en el movimiento de precesión porque la variación del mismo $\frac{d\vec{p}}{dt}$ es perpendicular al plano formado por la velocidad angular y el vector. Efectivamente, multiplicando escalarmente B.11 por $\vec{\Omega}$ se obtiene

$$\frac{d\vec{p}_\parallel}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_\parallel = cte \Rightarrow v_\parallel = cte \quad (\text{B.13})$$

La proyección perpendicular de la ecuación B.11 es

$$\frac{d\vec{p}_\perp}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{p}_\perp \quad (\text{B.14})$$

que corresponde al giro de la carga alrededor de las líneas del campo magnético. Dado que \vec{p}_\perp tiene un movimiento de giro, su módulo es constante

$$\vec{p}_\perp \cdot \frac{d\vec{p}_\perp}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dp_\perp^2}{dt} = 0 \Rightarrow p_\perp = cte \Rightarrow \mathcal{E}_\perp = cte, v_\perp = cte \quad (\text{B.15})$$

De acuerdo con la figura B.5 (a), las componentes x e y de la cantidad de movimiento son

$$p_x = p_\perp \cos \varphi$$

$$p_y = p_\perp \sin \varphi$$

, por lo que, sustituyendo en B.14

$$\frac{dp_x}{dt} = -\Omega p_y \Rightarrow \varphi = \Omega t$$

, donde se ha supuesto que la fase inicial es nula. Ω es, pues, la velocidad angular de giro en el movimiento de precesión. Puesto que, según B.10, la masa M es una constante del movimiento

$$v_x = v_\perp \cos \Omega t$$

$$v_y = v_\perp \sin \Omega t$$

Integrando, y eliminando al tiempo, se obtienen las ecuaciones de la trayectoria circular de la partícula en el plano transversal

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r_c^2$$

donde a y b son las coordenadas del *Centro de Giro* y

$$r_c = \frac{v_\perp}{|\Omega|} = \frac{p_\perp}{|e| B} \quad (\text{B.16})$$

el *Radio de giro ciclotrónico*. Si a este movimiento transversal se le añade el uniforme longitudinal, el movimiento resultante será espiral de paso constante, por lo que la partícula se verá confinada por las líneas de campo magnético en su movimiento transversal pero no en el longitudinal. El confinamiento longitudinal requiere estructuras de campo no uniformes.

En la figura B.5 (b) se representa a las trayectorias de un electrón y de un ión positivo pesado. De acuerdo con B.12 y B.16, los electrones girarán a derechas, con una velocidad Ω_e alta y un pequeño radio de giro r_e , alrededor del campo magnético, mientras que los iones lo harán a izquierdas, a baja velocidad y con un radio de giro grande. Se puede decir, por lo tanto, que las líneas de campo magnético atrapan fuertemente a los iones ligeros y más débilmente a los pesados. Es este fenómeno el que protege a la biosfera terrestre de la radiación cósmica, haciendo posible la existencia de vida en su interior, y el que permite, mediante la creación de botellas magnéticas, el confinamiento de plasmas de alta temperatura en el laboratorio, como es el caso de los tokamaks, diseñados para contener combustible de fusión nuclear controlada.

De acuerdo con 2.64, si en un sistema de referencia $I_1 > 0$ e $I_2 = 0$ o, lo que es lo mismo, $B^2 > \frac{E^2}{c^2}$ y $\vec{E} \perp \vec{B}$, el movimiento de una carga sometida a un campo electromagnético cruzado se reduce al movimiento ciclotrónico cuando el observador se sitúa en un sistema de referencia que se mueve con respecto al primero con la velocidad

$$\vec{V}_E = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} , , V_E = \frac{E}{B} < c \quad (\text{B.17})$$

En el caso de un plasma, en el que conviven electrones con diversas clases de iones, el campo electromagnético cruzado afectará a cada una de sus componentes haciéndolas describir trayectorias cerradas, circulares en el límite no relativista, alrededor de un centro de giro que se desplaza con una velocidad \vec{V}_E uniforme e independiente de la carga y de la masa del ión. Esta velocidad, a la cual se desplaza el plasma en su conjunto, recibe el nombre de *Velocidad ambipolar*.

B.3. Problemas

- 2-1. Encontrar la ecuación de movimiento no relativista de una partícula que se mueve en el seno de un campo eléctrico constante y uniforme ¿ Cual es su velocidad y su energía ?
- 2-2. Encontrar la ecuación de movimiento no relativista de una partícula que se mueve en el seno de un campo magnético constante y uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ y cuya posición y velocidad iniciales son $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ y $\vec{v}_0 = (v_{x0}, 0, v_{z0})$. Hallar:
- Demostrar que el movimiento a lo largo del campo magnético es independiente del movimiento transversal al mismo.
 - Demostrar que la proyección de la trayectoria en el plano transversal es circular. Hallar su velocidad angular y su radio.
- 2-3. En el seno de un campo $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ ($B_0 = 10^3$ gauss), en el punto $\vec{r} = 0$ y en la dirección del eje X , se inyectan un electrón y un protón, ambos con energía cinética de un MeV. Hallar las ecuaciones de las trayectorias, los radios de giro y las frecuencias ciclotrónicas. Hágase un esquema de dichas trayectorias.

SOLUCION :

Como las cargas parten del origen en la dirección del eje x , $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ y, al no existir componente de la velocidad en la dirección z , la del campo magnético, el movimiento queda confinado al plano $z = 0$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, 0) , , |\vec{v}| = v_0$$

donde se recuerda que la velocidad tiene módulo constante.

Como se muestra en la figura B.6, el electrón gira a derechas alrededor del campo magnético, con trayectoria circular de radio ciclotrónico r_{ce} , y el protón lo hace

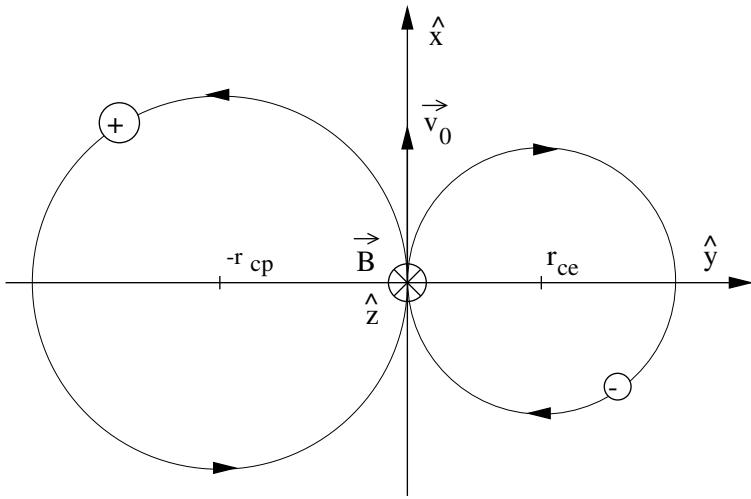


Figura B.6:

a derechas con radio r_{cp} . Los centros de giro son $\vec{r}_{cp} = (0, -r_{cp}, 0)$ y $\vec{r}_{ce} = (0, r_{ce}, 0)$ respectivamente.

Las ecuaciones de las trayectorias son

$$x^2 + (y + r_{cp})^2 = r_{cp}^2 \quad , \quad x^2 + (y - r_{ce})^2 = r_{ce}^2$$

Escribiendo $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$,

$$r_c = \frac{c\beta_0}{\Omega} \quad , \quad \Omega = \frac{eB}{\gamma_p m} \quad , \quad \beta_0 = 1 - \frac{1}{\gamma_p^2} \quad , \quad \gamma_p = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = 1 + \frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}_0}$$

y substituyendo los datos del enunciado

$$\gamma_{pp} = 1,001 \quad , \quad \beta_{0p} = 0,002 \quad , \quad \Omega_p = 9,6 \times 10^6 \text{ rad s}^{-1} \quad , \quad r_{cp} = 6,7 \text{ cm}$$

$$\gamma_{pe} = 2,96 \quad , \quad \beta_{0e} = 0,89 \quad , \quad \Omega_e = 6 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1} \quad , \quad r_{ce} = 4,5 \text{ cm}$$

Dado que ambas partículas tienen la misma energía cinética, la velocidad del protón es muy inferior a la del electrón. La del primero es aproximadamente no relativista $\beta \ll 1$ y la del segundo es ultrarelativista $1 - \beta \ll 1$.

- 2-4. Una partícula cargada se encuentra entre las placas de un magnetrón, sometida a un campo electromagnético:

$$\vec{E} = E_0 \hat{y} \quad , \quad \vec{B} = B_0 \hat{z}$$

donde $E_0 = 60 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$. Buscar sistemas de referencia S' que se muevan con velocidades apropiadas para eliminar a uno de los campos:

- a) $B = 4 \text{ gauss}$

b) $B = 1 \text{ gauss}$

Determinar en cada caso las características fundamentales del movimiento de la partícula en \mathcal{S}' .

Apéndice C

Apéndice del capítulo 3

En este apéndice se caracteriza a los medios lineales, se ilustran los procesos de obtención de las relaciones de dispersión y se revisan distintas versiones macroscópicas de los balances energéticos de estos medios.

C.1. Medios lineales

Desde el punto de vista fenomenológico, los medios materiales pueden también clasificarse según sus propiedades de linealidad, homogeneidad e isotropía, a las que habría que añadir la de la posible dependencia temporal de dichas propiedades. Estas cualidades y sus opuestas son responsables de numerosos fenómenos de importancia técnica que son objeto de intensa investigación en el presente, tanto desde el punto de vista microscópico como desde el macroscópico. Aquí solo pueden exponerse los fundamentos de este amplio campo por lo que los medios estudiados serán, generalmente, lineales, homogéneos a trozos e independientes del tiempo y el tratamiento fenomenológico.

Una definición usual, pero restrictiva, de los medios lineales es la que asigna a éstos las *Relaciones constitutivas*

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \chi_e(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \quad (\text{C.1a})$$

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \chi_m(\vec{r}, t) \vec{H}(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu(\vec{r}, t) \vec{H}(\vec{r}, t), \quad \mu = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (\text{C.1b})$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sigma(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (\text{C.1c})$$

donde χ_e es la *Susceptibilidad eléctrica* del medio, χ_m la *Susceptibilidad magnética*, ε la *Permeabilidad eléctrica*, μ la *Permeabilidad magnética* y σ la *Conductividad*. Si los medios son anisótropos, algunas de estas relaciones tendrán carácter tensorial ($\overset{\leftrightarrow}{\chi}_e$, $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_m$, $\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}$, $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$, $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$) y en el caso más simple

serán independientes de \vec{r} y t . Pueden depender además de variables no electromagnéticas como son la densidad, presión, temperatura, etc..

De nuevo debe advertirse que, aunque se mantiene la costumbre de expresar \vec{M} y \vec{B} en función de \vec{H} , sería más coherente relacionar al primero y al último campo con \vec{B} .

$$\vec{M} = \xi_m \vec{B} \quad , , \quad \vec{H} = \eta_m \vec{B} \quad (\text{C.2})$$

donde

$$\xi_m = \frac{\chi_m}{\mu} \quad , , \quad \eta_m = \frac{1}{\mu} \quad (\text{C.3})$$

Estas relaciones son lo suficientemente aproximadas como para definir el comportamiento de una gran familia de materiales, dentro de un amplio rango de amplitudes de los campos y de sus variaciones temporales. No hay que olvidar, sin embargo, que existen materiales de gran importancia práctica, como los ferromagnéticos, que son, de forma esencial, fuertemente no lineales, y que todos los medios se comportan como no lineales cuando las amplitudes de los campos son lo suficientemente altas, etc..

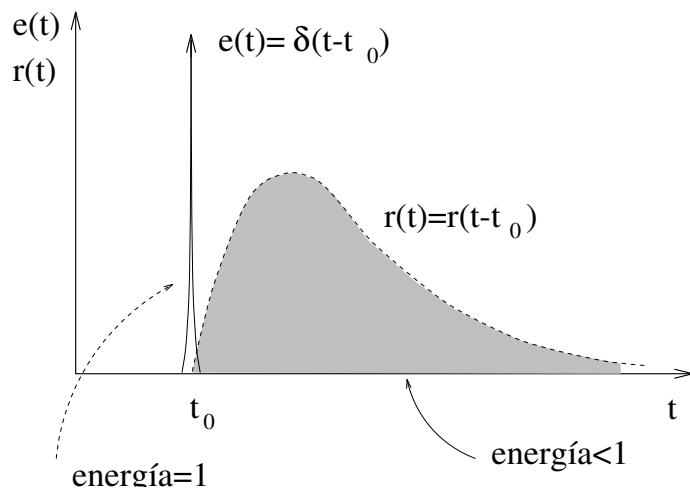


Figura C.1: Dispersión temporal

No obstante, las ecuaciones constitutivas anteriores no describen a la propiedad de linealidad en su forma más general. Cuando los campos varían rápidamente, los medios ofrecen una inercia apreciable que se traduce en que su respuesta no es instantánea, como presuponen las relaciones C.1, sino que ésta se distribuye a lo largo del tiempo. Para muchos materiales, la dispersión temporal de la respuesta es notable a partir de la banda de microondas y crece en importancia con la frecuencia. La figura C.1 representa genéricamente como un impulso de amplitud unitaria $e(t) = \delta(t - t_0)$ provoca una respuesta $r(t - t_0)$ en el medio lineal que, de acuerdo con el principio de causalidad, es nula para $t < t_0$; empieza en el instante t_0 de la excitación y se prolonga después del mismo. $r(t)$

se conoce como la *Respuesta del medio a un impulso*. Esta prolongación, o dispersión, temporal de la respuesta es responsable de la dispersión de los colores de la luz por medio del prisma, por lo que aquellos materiales en los que el fenómeno es notable son calificados como dispersivos. En lo sucesivo se supondrá que los medios son también pasivos, es decir, la energía asociada a la respuesta $s(t)$ a una excitación cualquiera $e(t)$ es menor o igual a la de esta última. Esto implica que, si la energía de la excitación es finita, también lo será la de la respuesta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e(t)^2 dt = \text{finita} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt = \text{finita} \quad (\text{C.4})$$

lo que asegura que tanto $e(t)$ como $s(t)$ tienen transformada de Fourier.

Un medio tiene un comportamiento lineal si al multiplicar su excitación por una constante la respuesta se multiplica por la misma constante y si al sumar excitaciones la respuesta es la suma de las respuestas parciales a cada una de dichas excitaciones. Este sería el caso si se interpreta a χ_e , χ_m y σ como operadores lineales y no como simples constantes. De esta forma, las ecuaciones C.1 pueden tomarse como definitorias de dicho tipo de medios. En la mayoría de los casos, \vec{P} , \vec{M} o \vec{j} pueden expresarse en función de uno solo de los campos. Por ejemplo, aunque la polarización eléctrica de un medio es, en general, función de ambos campos, puede eliminarse al magnético escribiendo $\vec{B} = \int \nabla \wedge \vec{E} dt$.

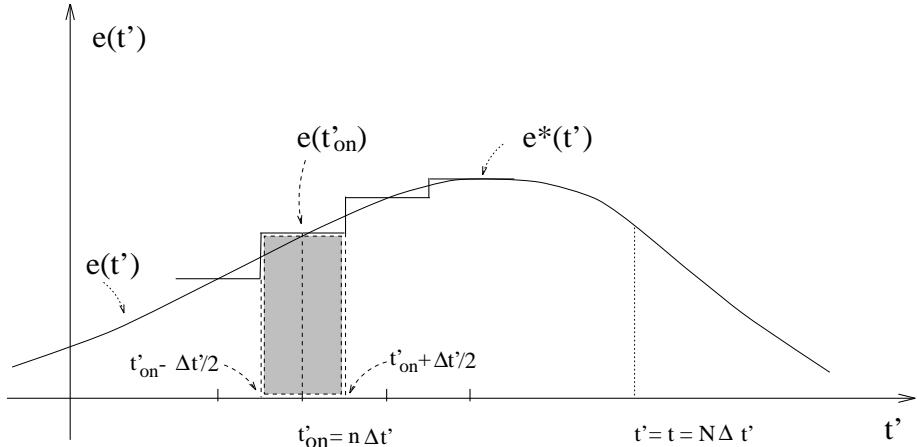


Figura C.2: Convolución

Puede establecerse una formulación más general de la respuesta $s(t)$ de un sistema lineal a una excitación $e(t')$ arbitraria mediante el uso de la convolución de esta última con la respuesta a un impulso del mismo. En la figura C.2 se representa a la excitación $e(t')$ junto con una aproximación escalonada $e^*(t')$, resultante de una interpolación de orden cero alrededor de los puntos $t' = t'_{0n} \equiv n\Delta t'$ (n entero) separados entre sí por el intervalo $\Delta t'$. Haciendo a $\Delta t'$ pequeño, el pulso sombreado se approxima a un impulso [García Olmedo] $e(t'_{0n}) \Delta t' \delta(t' - t'_{0n})$ cuya amplitud es igual a su área $e(t'_{0n}) \Delta t'$ (el área del pulso). La respuesta del sistema lineal, en el instante t , a este pulso aplicado en t' se approxima al producto de dicha amplitud por la respuesta a un impulso: $e(t') \Delta t' r(t - t')$. Superponiendo linealmente a todas las contribuciones de los pulsos anteriores al instante t y hallando el límite para $\Delta t' \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
s(t) &= \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \sum_{t'=n\Delta t'=-\infty}^{t'=N\Delta t'=t} e(n\Delta t') r(t-n\Delta t') \Delta t' \Rightarrow \\
s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t \mathcal{R}(t-t') e(t') dt' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(t-t') e(t') dt' = \frac{1}{2\pi} \mathcal{R} * e
\end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Por conveniencia, véase III.27 y C.8, se ha escrito $r \equiv \frac{\mathcal{R}}{2\pi}$.

Según el principio de causalidad,

$$\mathcal{R}(t) = 0 \text{ para } t < 0 \quad (\text{C.6})$$

lo que permite extender el límite superior de integración hasta $t' \rightarrow \infty$ e identificar la respuesta como proporcional al producto de convolución (anotado por *) de la excitación por la respuesta a un impulso.

Para llegar a esta expresión se ha hecho uso del principio de linealidad y es fácil de comprobar que las relaciones de convolución son efectivamente lineales. Fijando la atención en la respuesta de los medios al campo electromagnético, las ecuaciones constitutivas en el *Dominio del tiempo* son

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^t \chi_e(\vec{r}, t-t') \cdot \vec{E}(\vec{r}, t') dt' \quad (\text{C.7a})$$

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t \xi_m(\vec{r}, t-t') \cdot \vec{B}(\vec{r}, t') dt' \quad (\text{C.7b})$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t \sigma(\vec{r}, t-t') \cdot \vec{E}(\vec{r}, t') dt' \quad (\text{C.7c})$$

donde \vec{E} y \vec{B} son las excitaciones, χ_e , ξ_m y σ las respuestas a un impulso de los campos anteriores y \vec{P} , \vec{M} y \vec{j} las respuestas globales del medio a dichos campos.

La solución de las ecuaciones de Maxwell, para medios lineales y en el dominio del tiempo, requiere, en consecuencia, el conocimiento de las respuestas impulsivas del medio. Estas pueden obtenerse a partir de modelos adecuados o experimentalmente.

En general, salvo para los casos más simples, la solución directa, en el dominio del tiempo, de las ecuaciones de Maxwell para medios dispersivos no es sencilla. Es usualmente más sencillo hacerlo en el dominio de la frecuencia. De acuerdo con el teorema de la convolución III.27

$$s(\omega) = \mathcal{R}(\omega) e(\omega) \quad (\text{C.8})$$

donde $s(\omega)$, $\mathcal{R}(\omega)$ y $e(\omega)$ son las transformadas de Fourier temporales de $s(t)$, $\mathcal{R}(t)$ y $e(t)$. La respuesta a un impulso $\mathcal{R}(\omega)$ lleva información cuatro veces redundante porque, al ser $\mathcal{R}(t)$ real, la parte real de su transformada es par y la imaginaria impar y, además, dado que $\mathcal{R}(\omega)$ es una función causal (definición C.6) y corresponde a un medio pasivo (definición C.4), cumple la relación de Kronig-Kramers III.28 y la parte imaginaria puede obtenerse a partir de la real.

La antisimetría de la parte imaginaria de $\mathcal{R}(\omega)$ implica que $\mathcal{R}(\omega = 0)$ es real . Luego $\varepsilon(\omega = 0)$, $\mu(\omega = 0)$ y $\sigma(\omega = 0)$ son las *Constantes estáticas* y C.1 una aproximación cuasiestática de las relaciones de dispersión.

Las ecuaciones constitutivas de los medios lineales en el *Dominio de la frecuencia* suelen expresarse de la forma

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) , , \quad \varepsilon(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \{1 + \chi_e(\vec{r}, \omega)\} \quad (\text{C.9a})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = \mu(\vec{r}, \omega) \vec{H}(\vec{r}, \omega) , , \quad \mu(\vec{r}, \omega) = \mu_0 \{1 + \chi_m(\vec{r}, \omega)\} \quad (\text{C.9b})$$

$$\vec{J}(\vec{r}, \omega) = \sigma(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (\text{C.9c})$$

$\varepsilon(\vec{r}, \omega)$, $\mu(\vec{r}, \omega)$, $\sigma(\vec{r}, \omega)$ se conocen como *Relaciones de dispersión*. La transformación al dominio de la frecuencia simplifica considerablemente a las ecuaciones de Maxwell al eliminar a todos los operadores temporales y sustituirlos por funciones de ω . Si se desea obtener la respuesta temporal de los medios a un campo transformable por Fourier o, en particular, a un campo monocromático, una vez resuelto el problema en el dominio de la frecuencia, el uso de la transformada inversa permite obtener la solución requerida en el dominio del tiempo.

C.2. Relaciones de dispersión

Las relaciones de dispersión de un material describen, en el dominio de la frecuencia, su respuesta lineal a la presencia de un campo electromagnético. Pueden obtenerse de diversas formas cuyas líneas básicas se exponen en lo que sigue. Tratamientos más amplios pueden encontrarse en [Beam], [Bleaney y Bleaney], [Jackson],[Reitz et al.].

La determinación de estas relaciones puede llevarse a cabo experimentalmente, teóricamente, mediante modelos apropiados, o, lo que es más común, por procedimientos mixtos. Los resultados experimentales constituyen el último contraste y patrón con el que verificar las predicciones, aunque no siempre se dispone de ellos con la precisión necesaria. Idealmente, el tratamiento teórico parte de un modelo básico del medio y expresa sus resultados en función de los parámetros fundamentales del mismo; en la práctica, dichos parámetros deberán ser ajustados en mayor o menor grado para acomodar estas relaciones a la realidad experimental.

El modelo microscópico puede expresarse en parte a través de la ley de fuerzas 2.85 que aquí se escribirá de la forma

$$\vec{F}_m = \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}_m + e\vec{v} \wedge \vec{B}_m + \vec{F}'_m \quad (\text{C.10})$$

donde \vec{F}'_m resume al conjunto de fuerzas que actúan sobre la carga y cuyo origen no es electromagnético clásico. En algunos casos, véase la sección C.2.2, estas fuerzas son despreciables pero, en general, son de origen cuántico y juegan un papel determinante en la respuesta del medio. Cuando éste es poco denso, se manifiestan principalmente como interacciones de corto alcance que suelen ser modeladas mediante secciones eficaces de colisión. En la materia densa el problema es más complejo y su tratamiento requiere de las técnicas del estado sólido o líquido. En cualquier caso, la inclusión de \vec{F}'_m en la ecuación no es fácil y, en la práctica, su modelado requiere el uso de hipótesis simplificadoras que limitan su rango de validez.

Tampoco es trivial la interpretación macroscópica de la ecuación C.10 una vez establecido un modelo microscópico determinado. Un problema clásico a este nivel es el del cálculo del *Campo local*, o molecular, que actúa sobre cada molécula concreta del medio [Reitz et al.]. Por último, dado que el comportamiento de los medios es en general no lineal, la obtención de unas relaciones de dispersión, cuando ésto es posible, implica la imposición de condiciones a las variables del problema que aseguren su linealidad.

Entre los extremos experimental y teórico, una forma útil y sencilla de representar la respuesta macroscópica de muchos medios comunes, como lo son los dieléctricos y conductores ordinarios, consiste en la proposición, como modelo, de una ecuación diferencial temporal lineal de orden n , cuyos coeficientes se ajustan para representar a los datos experimentales. A continuación se muestran ejemplos de éste último tipo de tratamiento y de como, partiendo de un modelo primario, se obtienen las relaciones de dispersión de un plasma simple.

C.2.1. Relaciones de dispersión de primero y segundo orden

Antes de abordar el problema enunciado, es útil el considerar las características del movimiento no relativista de una partícula en presencia de un campo electromagnético variable y de fuerzas recuperadoras y de fricción externas al sistema electromagnético clásico.

Movimiento de cargas :

Supóngase a una partícula, con carga e y masa m , en presencia de un campo eléctrico $\vec{E}(t)$ y de unas fuerzas lineales

$$\vec{F}'_m = -\kappa \frac{d\vec{r}}{dt} - k\vec{r} \quad (\text{C.11})$$

suma de una de tipo elástico y otra de fricción.

Las constantes de fricción κ y elástica k pueden escribirse de la forma

$$\kappa = m\nu, \quad k = m\omega_0^2 \quad (\text{C.12})$$

en función de la masa de la partícula, de la frecuencia equivalente de fricción ν y de la frecuencia natural, o de resonancia, ω_0 . ν está asociada a la pérdida irreversible de energía de la partícula. En un electrón totalmente libre el único mecanismo posible de pérdida de energía mecánica es la radiación electromagnética pero ésta es despreciable cuando el electrón se encuentra en el seno de un medio denso; en este caso la energía se cede al resto de las partículas, las cuales la transforman principalmente en energía térmica. ω_0 representa al intercambio reversible de la energía cinética de la partícula con la energía elástica del medio, correspondiente a las fuerzas con que una molécula o un cristal se oponen a las pequeñas perturbaciones de la órbita de un electrón o de la posición de equilibrio de un ión. En ausencia de fricción es la frecuencia natural o de resonancia del movimiento oscilatorio armónico de la partícula.

Tomando como origen al centro de atracción de la fuerza elástica, la ecuación del movimiento de la partícula es

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} + \nu \frac{d\vec{r}(t)}{dt} + \omega_0^2 \vec{r}(t) = \frac{e}{m} \vec{E}(t) \quad (\text{C.13})$$

Una inspección de las ecuaciones de Maxwell muestra que el campo eléctrico no puede ser homogéneo si varía con el tiempo, luego $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$, y que necesariamente está acompañado de un campo magnético. Pero puede demostrarse que dentro de los márgenes impuestos a los modelos que se utilizarán más adelante, desplazamientos pequeños de los fluidos de polarización y velocidades pequeñas de los de conducción, se puede despreciar la dependencia espacial del campo eléctrico y la fuerza debida al campo magnético. Bajo estas condiciones, es fácil de resolver la ecuación anterior, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Tomando $\vec{E}(t) = \vec{A}_0 \delta(t)$ y $\vec{r} = r \hat{\vec{E}}$

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} + \nu \frac{dr(t)}{dt} + \omega_0^2 r(t) = \frac{e A_0}{m} \delta(t) \quad (\text{C.14})$$

Puesto que la velocidad de las partículas es finita, la posición r es continua. Si se parte del reposo

$$r_{0_-} = 0 \quad , , \quad v_{0_-} = \left(\frac{dr}{dt} \right)_{0_-} = 0$$

, donde 0_- indica $t < 0$, $t \rightarrow 0$, y se integra la ecuación en el intervalo $t \in [0_-, 0_+]$, donde 0_+ indica $t > 0$, $t \rightarrow 0$, se tiene que $v_{0_+} - v_{0_-} = v_{0_+} = \frac{e A_0}{m}$. Las condiciones iniciales para resolver la ecuación anterior en el intervalo $t > 0$ son, por lo tanto,

$$r_{0_+} = 0 \quad , , \quad v_{0_+} = \frac{e A_0}{m} \quad (\text{C.15})$$

y su solución¹

$$r = 0 \quad \text{para } t < 0 \quad , , \quad r = r_0 e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega_1 t) \quad \text{para } t > 0 \quad (\text{C.16})$$

¹Problema c-3.

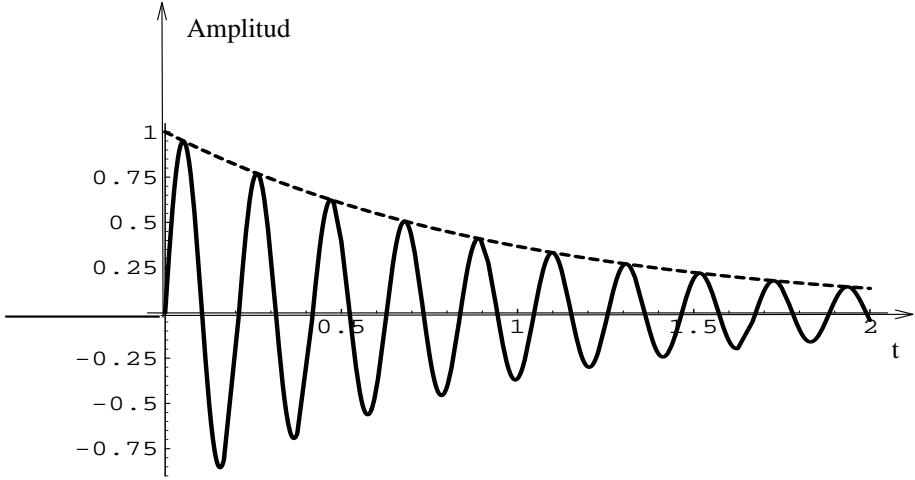


Figura C.3: Respuesta a un impulso de primer y segundo orden

donde

$$r_0 = \frac{e A_0}{m} \frac{1}{\omega_1} , , \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{2\omega_0}\right)^2} , , \quad \alpha = \frac{1}{2} \nu \quad (\text{C.17})$$

Si la fuerza elástica es nula ($\omega_0 = 0$) la ecuación C.14 se puede escribir como de primer orden en la velocidad

$$\frac{dv(t)}{dt} + \nu v(t) = \frac{e A_0}{m} \delta(t) \quad (\text{C.18})$$

y su solución es

$$v = 0 \quad \text{para } t < 0 , , \quad v = v_0 e^{-\alpha t} \quad \text{para } t > 0 \quad (\text{C.19})$$

donde $v_0 = v_{0+}$ (C.15).

La figura C.3 representa a las respuestas a un impulso del sistema de primero (línea de trazos) y de segundo orden (línea continua) normalizadas para $r_0 = 1$ y $v_0 = 1$.

Las ecuaciones C.14 representan adecuadamente al movimiento de una partícula de masa m que interacciona elásticamente con otra de masa $M \gg m$. No es difícil comprobar que, cuando m no es despreciable frente a M , la frecuencia natural (despreciando los términos de fricción) de la oscilación acoplada de las dos partículas es²

²Problema c-4.

$$\omega_0^2 = k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \quad (\text{C.20})$$

Relaciones de dispersión de dieléctricos :

En las figuras C.4-C.6 se representan los esquemas de polarización de dieléctricos apolares y polares. En los primeros el momento dipolar de una molécula es nulo en ausencia de campo mientras que en el último cada molécula presenta un momento dipolar intrínseco de magnitud p_0 y orientación arbitraria. En general, un material determinado está compuesto por moléculas e iones diversos y cada una de éstas moléculas puede también contener electrones e iones polarizables que interactúen de distinta forma con el sustrato, contribuyendo de esta forma a la polarización total del medio. La polarización resultante en una substancia concreta se obtendrá como suma de todas las contribuciones posibles.

En la figura C.4 se representa esquemáticamente el mecanismo de polarización de moléculas, como el He , o el N_2 , que están compuestas por una sola especie atómica. En ausencia de campo las nubes electrónicas se distribuyen simétricamente alrededor de los núcleos de forma que el momento dipolar resultante es nulo. Tales moléculas se califican de apolares. La imposición del campo eléctrico deforma a las nubes electrónicas y desplaza al centro de cargas positivas con respecto al de las negativas creando un momento dipolar. Los principales responsables de la polarización son los electrones externos, dado que están más débilmente ligados que los de capas más profundas. Para valores normales del campo, el desplazamiento relativo de los centros de carga es pequeño y la velocidad correspondiente también lo es. Bajo estas condiciones, la fuerza cuántica que mantiene al electrón en su órbita puede ser aproximada por una fuerza recuperadora elástica fuerte más una pequeña fuerza lineal disipativa. Dado que la constante elástica es fuerte y que los electrones tienen una masa muy pequeña, la frecuencia natural de estos modos de polarización es alta; suele estar dentro de los rangos del visible-ultravioleta.

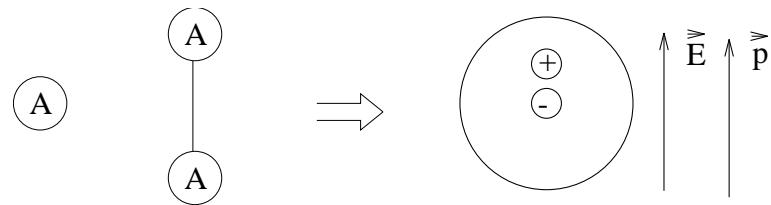


Figura C.4: Polarización de dieléctricos apolares con átomos de una sola especie

También son apolares las moléculas que, como el CO_2 , véase la figura C.5, están compuestas por dos especies atómicas enlazadas de forma lineal y simétrica. En estos casos, al estar las moléculas constituidas por átomos distintos, con diferente afinidad electrónica, cada uno de ellos adquiere carga neta aunque, en ausencia de campo externo, el momento dipolar intrínseco es nulo. Un campo variable polariza a las moléculas por el mecanismo ya descrito pero también a través de distintos modos de oscilación iónica. En la figura C.5-a se representa a una oscilación simétrica, la cual no induce polarización. C.5-b representa a una oscilación asimétrica que sí induce momento dipolar, como la oscilación de torsión representada en C.5-c. Dado que la masa M de los iones es muy

superior a la de los electrones, las frecuencias naturales de estos modos son inferiores a las de los electrónicos y suelen estar dentro del rango del infrarrojo.

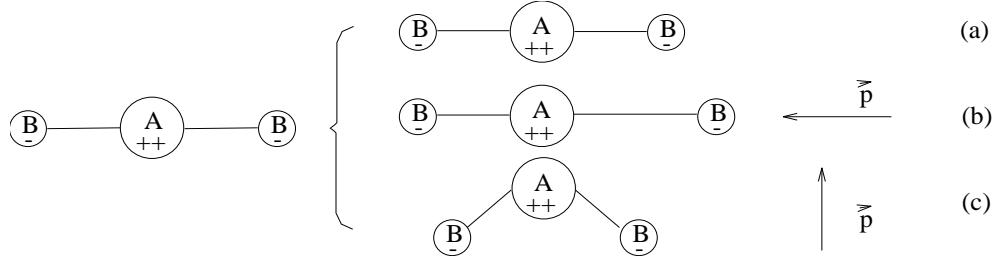


Figura C.5: Polarización de dieléctricos apolares con átomos de dos especies

No obstante, el paso de un modelo microscópico, como puede ser el representado genéricamente por la ecuación C.13 y los modelos de las figuras C.4-C.5, a otro macroscópico es en general complejo. Aquí se emitirá la hipótesis de linealidad directamente en el dominio macroscópico y se dejará a la experimentación el ajuste de los parámetros y la determinación del rango de validez de las expresiones. Se supone que, dentro de un cierto dominio de las variables, la contribución de un cierto tipo de electrones, o iones, a la densidad de polarización del medio, responde a la ecuación³

$$\frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \nu_d \frac{\partial \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \omega_{0d}^2 \vec{P}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \omega_{pd}^2 \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (\text{C.21})$$

En esta ecuación se utiliza una notación análoga a la empleada en la C.13 pero, evidentemente, ahora el significado es distinto: ν_d , la *Frecuencia equivalente de fricción*, ω_{0d} , la *Frecuencia natural*, así como ω_{pd} , la *Frecuencia de plasma* del dieléctrico, son parámetros macroscópicos que deben ser ajustados a cada tipo de electrón o ión de un medio concreto. No obstante, por analogía entre ambas ecuaciones pueden al menos obtenerse estimaciones del orden de magnitud de los mismos. Si se multiplica la ecuación C.13 por $n e$, donde n es la densidad de electrones del tipo considerado, las dimensiones de la ecuación resultante son las mismas que las de C.21. La comparación de los segundos miembros permite estimar la frecuencia de plasma del dieléctrico

$$\omega_{pd}^2 \sim \frac{n e^2}{\varepsilon_0 m} \quad (\text{C.22})$$

Mediante un modelo simple⁴, la frecuencia natural ω_0 para un electrón cuya nube tenga simetría esférica puede estimarse como

$$\omega_0^2 \sim \frac{e^2}{4\pi a^3 \varepsilon_0 m} \sim \frac{V_n}{3 V_m} \omega_{pd}^2 \quad (\text{C.23})$$

³Téngase en cuenta que $\frac{df(t)}{dt} = \frac{\partial f(t)}{\partial t}$, pero que $\frac{dg(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial g(\vec{r}, t)}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) g(\vec{r}, t)$ y este último término es no lineal.

⁴Problema c-1.

donde a es el radio molecular, $V_m = \frac{4}{3} \pi a^3$ el volumen de la molécula y $V_n = \frac{1}{n}$ el volumen ocupado por término medio por una molécula. Si éstas están muy empaquetadas, ambos volúmenes son del mismo orden y si están muy distanciadas $V_n \gg V_m$ y $\omega_0^2 \gg \omega_{pd}^2$.

Sin embargo, la analogía entre las frecuencias naturales ω_0 y ω_{0d} no es completa porque el campo medio que actúa sobre las cargas en cuestión es el campo local

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \eta \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \quad (\text{C.24})$$

η es un factor de corrección cuyo cálculo no es en general simple, salvo en el caso de los medios apolares isótropos ($\eta = \frac{1}{3}$) y de los conductores ($\eta = 0$). Por lo tanto se puede establecer la analogía

$$\omega_{0d}^2 \sim \omega_0^2 - \eta \omega_{pd}^2 \quad (\text{C.25})$$

Para hallar la relación de dispersión de la susceptibilidad asociada a este tipo de cargas, no es necesario calcular la transformada de Fourier de la respuesta a un impulso⁵. Basta con transformar directamente a la ecuación C.21 e identificar al factor de proporcionalidad entre las densidades espectrales $\vec{P}(\vec{r}, \omega)$ y $\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, \omega)$:

$$\chi_e(\omega) = \chi_{e_0} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_{0d}})^2 + j(\frac{\omega}{\omega_{0d}})(\frac{\nu_d}{\omega_{0d}})} \quad (\text{C.26})$$

donde

$$\chi_{e_0} = \frac{\omega_{pd}^2}{\omega_{0d}^2} \quad (\text{C.27})$$

es la *Susceptibilidad eléctrica estática*.

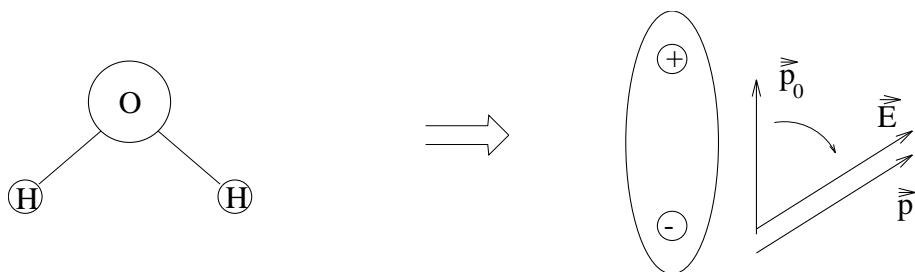


Figura C.6: Polarización de dieléctricos polares

Ciertas moléculas, como el SO_2 y el H_2O , presentan un momento dipolar intrínseco⁶, como se muestra en la figura C.6. En presencia de un campo eléctrico, la molécula sufre un par $\vec{T} = \vec{p}_0 \wedge \vec{E}$

⁵ Problema c-2.

⁶ Los momentos dipolares eléctricos de las moléculas suelen expresarse en Debyes ($1 \text{ Debye} \simeq 3,336 \cdot 10^{-30} \text{ C m} \rightarrow$ momento dipolar de un par de cargas electrónicas de signo contrario situadas a una distancia de $0,2\bar{r}A$). Para el agua $p_0 = 1,84 \text{ Debyes}$.

que tiende a alinearlo con él. A temperatura distinta de cero, la alineación es estorbada por los choques moleculares. El equilibrio estático se alcanza cuando se igualan las energías medias eléctrica y térmica, induciéndose una densidad neta de momento dipolar \vec{P} en la dirección de \vec{E} . Si el campo desaparece, la orientación preferente tiende a hacerse aleatoria y la polarización se relaja. Este movimiento de relajación es relativamente lento, por lo que la inercia del dipolo puede despreciarse, y está acompañado de una disipación irreversible de energía electromagnética. De acuerdo con esto, se propone como modelo de relajación dieléctrica de un medio polar a una ecuación resultante de anular el término de segundo orden de C.21.

$$\tau_d \frac{\partial \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{P}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \chi_{e0} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (\text{C.28})$$

donde τ_d es el *Tiempo de relajación dieléctrica* y χ_{e0} la *Susceptibilidad eléctrica estática* (para $\omega = 0$). En la bibliografía pueden hallarse descripciones más detalladas de este proceso.

Transformando a la ecuación anterior se obtiene la contribución de las moléculas polares a la susceptibilidad eléctrica.

$$\chi_e(\omega) = \chi_{e0} \frac{1}{1 + j\omega \tau_d} \quad (\text{C.29})$$

La frecuencia de corte $f_d \equiv \frac{1}{2\pi\tau_d}$, a la cual se igualan las partes real e imaginaria de la susceptibilidad, suele encontrarse en el rango de las microondas.

Para obtener la susceptibilidad total de un medio, es necesario sumar todas la contribuciones posibles de carácter electrónico, iónico o polar:

$$\chi_e(\omega) = \sum_{\mu} \chi_{e\mu}(\omega) \quad (\text{C.30})$$

Relaciones de dispersión de conductores :

Los electrones de conducción no están ligados a ninguna molécula en particular, puesto que pueden moverse a través del medio. La fuerza elástica se supone nula, con lo que la hipótesis de linealidad se enuncia, por analogía con C.21, de la forma

$$\tau_c \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (\text{C.31})$$

donde la *Conductividad estática* σ_0 , la *Frecuencia de plasma del conductor* ω_{pc} y el *Tiempo de relajación del conductor* τ_c son:

$$\sigma_0 = \frac{n e^2}{m \nu} = \varepsilon_0 \omega_{pc}^2 \tau_c \quad , \quad \omega_{pc} = \frac{n e^2}{\varepsilon_0 m} \quad , \quad \tau_c = \frac{1}{\nu} \quad (\text{C.32})$$

En el dominio de la frecuencia⁷

$$\sigma(\omega) = \sigma_0 \frac{1}{1 + j\omega \tau_c} \quad (\text{C.33})$$

Esta relación describe aproximadamente el comportamiento de conductores, semiconductores y plasmas. En el caso de los metales, la frecuencia de corte $f_c \equiv \frac{1}{2\pi\tau_c} \sim 10^{13}$ Hz por lo que dentro del rango de microondas éstos pueden ser considerados como buenos conductores de conductividad real.

Representación gráfica :

Las partes reales e imaginarias de las relaciones de dispersión suelen anotarse de la forma⁸

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad , \quad \chi_e = \chi'_e - j\chi''_e \quad (\text{C.34a})$$

$$\mu = \mu' - j\mu'' \quad , \quad \chi_m = \chi'_m - j\chi''_m \quad (\text{C.34b})$$

$$\sigma = \sigma' - j\sigma'' \quad (\text{C.34c})$$

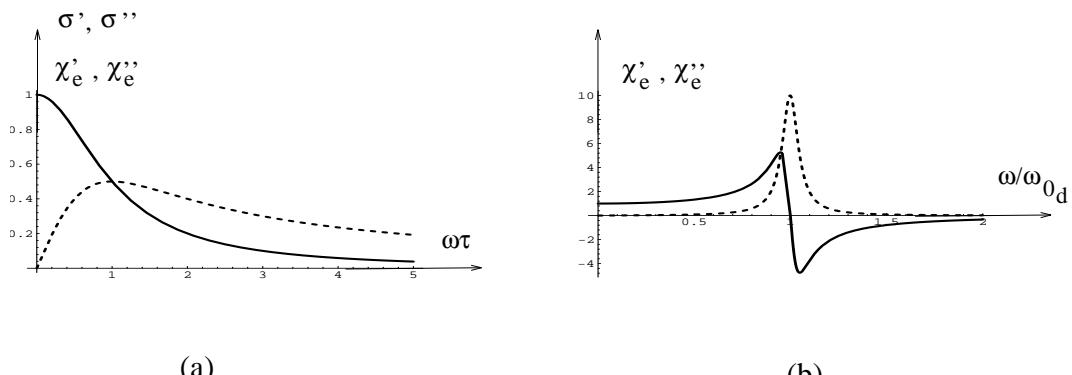


Figura C.7: Relaciones de dispersión de primero y segundo orden

Más adelante, en la sección C.4.3 se verá que ε' , χ'_e , μ' , χ'_m y σ'' están asociados al almacenamiento de energía, mientras que ε'' , χ''_e , μ'' , χ''_m y σ' lo están a su disipación.

En la figura C.7 se representan las relaciones de dispersión, de primero (a) y segundo orden (b), normalizadas para $\sigma_0 = 1$ y $\chi_{e0} = 1$ (la parte real en línea continua y la imaginaria en línea de

⁷Problema c-7.

⁸Esta notación corresponde al convenio $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$.

puntos). Dadas las propiedades de simetría, el valor estático σ_0 y χ_0 de las relaciones es real. En las de primer orden, la parte imaginaria crece linealmente para frecuencias bajas ($\omega\tau \ll 1$) y alcanza su valor máximo para $\omega\tau = 1$. A esta misma frecuencia se igualan las partes real e imaginaria (en la gráfica normalizada toman el valor $\frac{1}{2}$). Para frecuencias $\omega\tau > 1$ la parte imaginaria es mayor que la real, con lo que en los conductores predomina el almacenamiento de energía sobre la disipación y en los dieléctricos predomina la disipación sobre el almacenamiento. Cuando $\omega \gg 1/\tau$, en las de primer orden, si $\omega \gg \omega_{0d}$, en los de segundo, la inercia del medio hace que éste deje de responder al campo y se comporte como el vacío. En los dieléctricos de segundo orden, la constante de disipación suele ser pequeña ($\nu/\omega_{0d} \ll 1$) con lo que la parte imaginaria solo adquiere valores apreciables dentro de una banda de frecuencia estrecha alrededor de la frecuencia natural. En esta zona tiene lugar una *Absorción resonante*: la parte imaginaria adquiere valores grandes, por lo que la disipación es importante. Fuera de esta banda, la susceptibilidad es prácticamente real y se disipa muy poca energía. Aquella parte del espectro en la que la parte real de la susceptibilidad es creciente, por encima y por debajo de la frecuencia natural, se conoce como *Zona de dispersión normal*, mientras que aquella en la que es decreciente se conoce como *Zona de dispersión anómala* (aproximadamente coincide con la de absorción resonante). Como puede observarse en la figura, por encima de ω_{0d} la susceptibilidad es negativa y tiende a cero para $\omega \rightarrow \infty$ por lo que pueden existir regiones del espectro para las que la constante dieléctrica relativa de un medio presente valores inferiores a la unidad. Esta anomalía es bien conocida para algunos materiales en la banda de rayos X y para los plasmas (véase la ecuación C.58).

C.2.2. Relación de dispersión de un plasma simple

En esta sección se trata de ilustrar como las relaciones de dispersión pueden también obtenerse, a partir de un modelo microscópico primario, en función de los parámetros microscópicos que definen el comportamiento macroscópico del medio. Con este fin, se considera a un plasma simple que, entre otras, cumple las siguientes propiedades:

- Es poco denso. Puede ser representado por el modelo propuesto en la sección 3.2. En la figura C.8 se representa a las interacciones que tienen lugar en el seno de un plasma. Las de las cargas con los neutros son de corta distancia y, por lo tanto, pueden ser tratadas como colisiones. Las de las cargas entre sí pueden desglosarse en la interacción colectiva a través de los campos macroscópicos y las binarias entre cargas concretas que pueden ser consideradas a través de la extensión del concepto de colisión.

- Es frío. La energía cinética y la velocidad media de las partículas son bajas, lo que implica que los episodios de ionización y recombinación son poco probables (las tasas de creación y destrucción de partículas son despreciables) y que las velocidades de las partículas no son relativistas ($\gamma_\nu \simeq 1$).

- Está poco ionizado. En estos plasmas existe un electrón libre por cada $10^3 \rightarrow 10^6$ moléculas neutras, por lo que, aunque las secciones eficaces de colisión entre cargas son muy superiores a las de las colisiones entre las cargas y los neutros y la interacción a larga distancia depende exclusivamente de las cargas, en la interacción a corta distancia predominan las colisiones de las cargas con los neutros. En este caso (el plasma ionosférico, el arco eléctrico, los tubos fluorescentes etc.) puede considerarse que los fluidos de electrones y de iones solo interactúan entre sí a través del campo

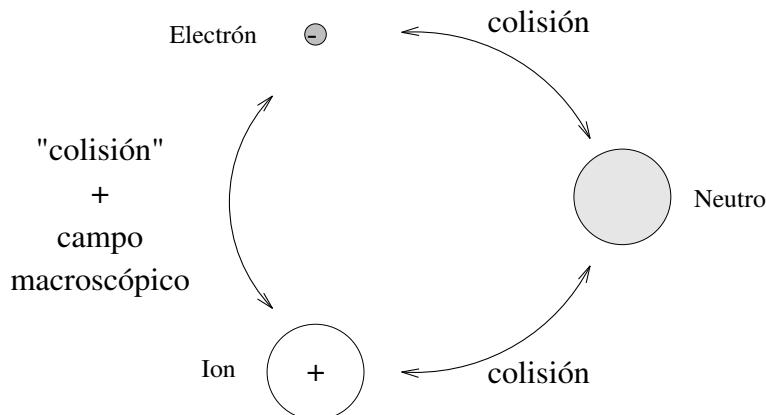


Figura C.8: Interacciones en un plasma

macroscópico y que lo hacen con el de neutros a través de las colisiones. Dado que este último fluido tiene una masa muy superior a la de los otros, puede considerarse como un fondo inerte que absorbe energía y cantidad de movimiento de las cargas.

- Está magnetizado. Aunque los plasmas son generalmente buenos conductores y se defienden eficazmente de la penetración del campo eléctrico, la energía de los campos eléctricos en el seno de un plasma suele ser del orden de la energía térmica del medio, en la mayor parte de los casos de interés están permeados por un campo magnético fuerte o *Campo principal*. En los plasmas de laboratorio este campo se genera externamente, con el objeto fundamental de confinarlos y estabilizarlos, mientras que en los naturales existen mecanismos internos que los crean, como el efecto autodinamo, responsable del campo terrestre, y el de congelación, o atrapamiento, del campo de los objetos estelares grandes. Este campo magnético fuerte dota al plasma de una estructura anisótropa que será analizada en lo que sigue.

Para obtener unas relaciones de dispersión lineales se comenzará por establecer las ecuaciones del movimiento para los fluidos del plasma, a continuación se concretarán las condiciones necesarias para que la respuesta del plasma sea considerada como lineal y, por último, se hallará dicha respuesta en el dominio de la frecuencia. Se impondrán algunas condiciones adicionales para limitar el número de variables significativas del problema.

Ecuaciones del movimiento del plasma :

Las ecuaciones del movimiento de los fluidos del plasma se obtienen a partir de las ecuaciones microscópicas de continuidad de la cantidad de movimiento de las partículas 2.100 y de las cargas 2.29

Puesto que el plasma es frío, muy pocas partículas tienen la energía suficiente como para ionizar moléculas neutras o para recombinar cargas, lo que permite despreciar las tasas de creación de la ecuación 2.29

$$\nabla \cdot \vec{j}_{+-} + \frac{\partial \rho_{+-}}{\partial t} = \tau_{+-} \simeq 0 \quad (\text{C.35})$$

Hallando las medias según lo expuesto en el tomo primero, despreciando la correlación entre las distintas variables y dividiendo por la carga de las partículas de cada uno de los fluidos, se obtiene la ecuación macroscópica de continuidad, o conservación, de las partículas

$$\nabla \cdot (n \vec{u}) + \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \quad (\text{C.36})$$

donde, para simplificar, se representa por n y \vec{u} a la densidad y velocidad de cualquiera de los dos fluidos de carga.

Si se desprecian las tasas τ y no se tienen en cuenta a las interacciones entre fluidos debidas a las colisiones, la ecuación microscópica 2.100 puede escribirse para cada una de las especies de carga en la forma

$$\underbrace{\rho_{+-} \vec{E}_m}_{(a)} + \underbrace{\vec{j}_{+-} \wedge \vec{B}_m}_{(b)} = \underbrace{\frac{\partial \vec{P}_{+-}}{\partial t}}_{(c)} + \underbrace{\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{T}_{p+-}}_{(d)} \quad (\text{C.37})$$

donde las anotaciones $+$ y $-$, en el subíndice, designan a los fluidos de carga positiva y negativa respectivamente y m destaca el carácter microscópico de los campos.

En lo que sigue, a menos que la distinción sea necesaria, se empleará la misma notación para ambos fluidos (las partículas tienen carga e y masa m), con lo que los promedios de los distintos términos pueden expresarse de la forma:

$$\langle(a)\rangle = e \left\langle \sum_{\mu} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\mu}) \vec{E}_m \right\rangle$$

donde el índice μ recorre a las cargas de una de las especies. De acuerdo con lo tratado en el capítulo 1 del primer tomo

$$\langle(a)\rangle = e n \vec{E} \quad (\text{C.38})$$

De forma análoga, despreciando las posibles correlaciones entre las distintas variables

$$\langle(b)\rangle = e \left\langle \sum_{\mu} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\mu}) \vec{v}_{\mu} \wedge \vec{B}_m \right\rangle = e n \vec{u} \wedge \vec{B}$$

con lo que la fuerza por unidad de carga ejercida por los campos sobre la unidad de volumen del fluido es

$$\vec{f} = e n (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}) \quad (\text{C.39})$$

De acuerdo con 2.94 y 2.95

$$\langle(c)\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \sum_{\mu} m \vec{v}_{\mu} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\mu}) \right\rangle = m \frac{\partial n \vec{u}}{\partial t} = \underbrace{m n \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{(e)} + \underbrace{m \vec{u} \frac{\partial n}{\partial t}}_{(f)} \quad (\text{C.40})$$

Asimismo, de acuerdo con 2.96

$$\langle(d)\rangle = \nabla \cdot \langle \vec{T}_p \rangle = \nabla \cdot \left\langle \left(\sum_{\mu} m v_{\mu}^{\alpha} v_{\mu}^{\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\mu}) \right) \right\rangle = \underbrace{m \nabla \cdot \{n \vec{u} \vec{u}\}}_{(g)} + \underbrace{\nabla \cdot \vec{P}}_{(h)} \quad (\text{C.41})$$

$\vec{u} \vec{u}$ es el producto diádico de la velocidad de fluido y sus componentes son $(u_{\alpha} u_{\beta})^9$. $\vec{P} \equiv m n \langle \delta \vec{v} \delta \vec{v} \rangle$ es proporcional al valor medio del producto diádico de la velocidad aleatoria. Esta última diada recibe el nombre de *Tensor de presiones*.

Las componentes no diagonales de \vec{P} ($m n \langle \delta v_{\alpha} \delta v_{\beta} \rangle$, , $\alpha \neq \beta$) suelen ser pequeñas en un plasma, como el que nos ocupa, pero no son necesariamente nulas. Representan a términos de viscosidad interna del fluido que tienden a igualar la velocidad de arrastre de las distintas partes del mismo. Las componentes diagonales $m n \langle \delta v_{\alpha}^2 \rangle$ son positivas y tanto más importantes cuanto mayor es la velocidad aleatoria de las partículas. Cuando un plasma está cerca del equilibrio, su función de distribución de velocidades se aproxima a la maxwelliana, lo que permite seguir utilizando el concepto de temperatura, aunque solo sea como parámetro que mide la energía cinética media de las partículas en el entorno de un punto. Los $P_{\alpha\alpha}$ son, en este caso, proporcionales a la temperatura.

Aunque en un plasma magnetizado el tensor de presiones puede ser anisótropo, si se supone isótropo sus tres componentes diagonales serán iguales. Despreciando las componentes no diagonales, la presión y la "temperatura"¹⁰ en el medio se definen de la forma

$$P_{\alpha\alpha} = m n \langle \delta v_{\alpha}^2 \rangle \equiv \rightarrow \begin{cases} p \\ n k T \end{cases}$$

donde p es la presión, k la constante de Boltzmann y T la temperatura.

Bajo estas condiciones

$$\nabla \cdot \vec{P} = \nabla p = k \nabla(nT) \quad (\text{C.42})$$

Para un medio isotermo $\nabla p = k T \nabla n$

⁹Mientras se opere exclusivamente en el espacio tridimensional, los índices se escribirán en la parte inferior: $x_{\alpha} \rightarrow x, y, z, u_{\alpha} \rightarrow u_x, u_y, u_z$.

¹⁰En un plasma anisótropo pueden definirse temperaturas distintas para la dirección del campo magnético aplicado y para las direcciones transversales al mismo.

Por otra parte, operando sobre cualquiera de las componentes del término (g) de la ecuación C.41¹¹ y haciendo uso de la ecuación de continuidad C.36 se comprueba que

$$(g) = m \vec{u} \nabla \cdot (n \vec{u}) + m n (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -m \vec{u} \frac{\partial n}{\partial t} + m n (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$

Por último, en el modelo propuesto para este plasma se considera que éste se encuentra poco ionizado y que, en consecuencia, los efectos globales de las colisiones de las cargas entre sí son despreciables frente a los de las colisiones de éstas con los neutros. Como es bien conocido de la teoría cinética, la eficacia en el intercambio de energía entre partículas es función de la relación entre las masas de las mismas y es máxima cuando ambas son iguales. La masa del electrón es muy inferior a la de los iones o los neutros por lo que el intercambio de energía entre los electrones y los iones o los neutros es muy pequeño; también lo es el intercambio medio de cantidad de movimiento. Bajo estas condiciones, solo el intercambio de cantidad de movimiento con los neutros puede tener significación porque éstos son mucho más numerosos que las cargas libres. La forma más simple de tener en cuenta esta transferencia de cantidad de movimiento del fluido de carga al de neutros es hacer uso de la *Hipótesis de Langevin*

$$\frac{\partial \vec{P}_0}{\partial t} = m n \nu (\vec{u} - \vec{u}_0) \quad (C.43)$$

donde $\frac{\partial \vec{P}_0}{\partial t}$ es la cantidad de movimiento cedida al fluido de neutros por unidad de volumen y tiempo, ν es la *Frecuencia efectiva de colisión* y \vec{u}_0 la velocidad del fluido de los neutros. Se trata pues de una hipótesis lineal¹² según la cual la cantidad de movimiento transferida es proporcional a la diferencia de velocidad entre ambos fluidos.

La ecuación fundamental del movimiento se obtiene igualando la densidad de fuerza macroscópica, aplicada sobre el fluido de carga, a la variación de la cantidad de movimiento cedida a dicho fluido y al de neutros. Es costumbre, sin embargo, situar en el mismo miembro de la ecuación a la fuerza y a los términos de presión y de Langevin, estos últimos con el signo cambiado, con lo que éstos aparecen como fuerzas ficticias. De esta forma, $-\nabla p$ sería la '*Densidad de fuerza de presión*', que tiende a uniformizar la densidad del fluido de carga, y $-m n \nu (\vec{u} - \vec{u}_0)$ la '*Densidad de fuerza de fricción*', o viscosidad, que tiende a igualar la velocidad del fluido en cuestión con la del de neutros.

De acuerdo con ésto, la *Ecuación del movimiento de Langevin* para los fluidos de carga es

$$n e (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}) - \nabla p - m n \nu (\vec{u} - \vec{u}_0) = \rightarrow \begin{cases} m n (\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \\ m n \frac{d}{dt} \vec{u} \end{cases} \quad (C.44)$$

A pesar de las hipótesis simplificadoras, el problema es aún muy complejo. Es necesario resolver conjuntamente las ecuaciones del movimiento, no lineales, y las correspondientes de la evolución de

¹¹Por ejemplo, $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (n u_\alpha u_\beta)$.

¹² ν es un parámetro que debe obtenerse a partir de medidas experimentales o de un modelo adecuado de los procesos de colisión. La linealidad de la hipótesis implica que debe ser una constante, lo que para cierto tipo de colisiones es difícil de justificar.

las presiones, o las temperaturas, que aquí no han sido tomadas en consideración, para los fluidos de electrones, iones y neutros.

Para seguir simplificando el problema, se puede considerar que, dado que la masa de neutros es muy grande comparada con la de los electrones, la transferencia media de cantidad de movimiento entre el fluido de electrones y el de neutros es pequeña, con lo que el término de Langevin es despreciable, y que, por tratarse de un plasma frío, $\nabla p \simeq 0$. De esta forma el problema se reduce a resolver las ecuaciones del movimiento de los fluidos de carga con el único acople del campo electromagnético. Aún puede recordarse algo más el enunciado considerando que también los iones tienen una inercia muy superior a los electrones por lo que sus movimientos son despreciables y es posible considerar a todo el fluido como a un fondo uniforme de carga positiva. Por último, se impondrán las condiciones necesarias para que las ecuaciones resultantes puedan ser aproximadas linealmente. Las limitaciones impuestas son numerosas, aunque algunas pueden levantarse sin añadir ninguna dificultad esencial, pero, dados los objetivos aquí propuestos, los resultados son suficientemente simples, pero significativos.

Linealización de las ecuaciones :

Las condiciones impuestas al plasma reducen a éste a dos fluidos: el de electrones, con carga $-e$, densidad de partículas $n_e(\vec{r}, t) = n(\vec{r}, t)$ velocidad de arrastre $\vec{u}_e(\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{r}, t)$, y el de iones con carga $+e$, densidad $n_i(\vec{r}, t) = n_0$ y velocidad nula. Solo es necesario estudiar el movimiento de los electrones, para los cuales la ecuación C.44 se reduce a¹³

$$-n e (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}) = m n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} \quad (\text{C.45})$$

El plasma en equilibrio es neutro localmente por lo que en esta situación las densidades de ambos fluidos son uniformes e iguales a n_0 . Puesto que el fluido de iones se supone que está aproximadamente en reposo, su densidad será $n_i \simeq n_0$. Se admite la existencia de un campo magnético fuerte \vec{B}_0 aplicado externamente.

Para la obtención de las relaciones de dispersión es necesario linealizar a las ecuaciones. Con este fin, supóngase que el plasma está próximo al equilibrio, de forma que

$$n = n_0 + \Delta n, \quad \Delta n \ll n_0 \quad (\text{C.46a})$$

$$\vec{u} = \Delta \vec{u} \quad (\text{C.46b})$$

$$\vec{E} = \Delta \vec{E} \quad (\text{C.46c})$$

¹³Aunque en las ecuaciones anteriores e ha representado a una carga con su signo, en esta designa al valor absoluto de la carga del electrón.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \Delta \vec{B} , , \quad \Delta \vec{B} \ll \vec{B}_0 \quad (\text{C.46d})$$

En estas expresiones se pone de manifiesto que, en equilibrio, la densidad de los electrones es n_0 y el campo magnético \vec{B}_0 , mientras que la velocidad del fluido y el campo eléctrico son nulos, ésto último se debe a la no existencia de desequilibrios de carga.

Las ecuaciones resultantes serán lineales si los monomios de la ecuación que están asociados a magnitudes incrementales $\Delta\zeta$ adquieren un valor mucho mayor que aquellos que lo están a las de orden superior, como las $\Delta\phi \Delta\varphi$ ¹⁴. La exigencia de que las magnitudes incrementales sean lo bastante pequeñas como para que la condición anterior se cumpla, es ciertamente vaga; teóricamente conducen a una acotación de las amplitudes que en una experiencia determinada son difíciles de cuantificar.

Admitiendo las hipótesis anteriores, los términos de la ecuación C.45 se linealizan de la forma

$$n \vec{E} = (n_0 + \Delta n) \Delta \vec{E} \simeq n_0 \Delta \vec{E} \quad (\text{C.47a})$$

$$n u \wedge \vec{B} = (n_0 + \Delta n) \Delta \vec{u} \wedge (\vec{B}_0 + \Delta \vec{B}) \simeq n_0 \Delta \vec{u} \wedge \vec{B}_0 \quad (\text{C.47b})$$

$$\nabla p \simeq 0 , , \quad m n \nu (\vec{u} - \vec{u}_0) \simeq 0 \quad (\text{C.47c})$$

$$n \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = (n_0 + \Delta n) \frac{\partial \Delta \vec{u}}{\partial t} \simeq n_0 \frac{\partial \Delta \vec{u}}{\partial t} \quad (\text{C.47d})$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \simeq (\Delta \vec{u} \cdot \nabla) \Delta \vec{u} \simeq 0 \quad (\text{C.47e})$$

con lo que las ecuaciones lineales del movimiento se reducen a

$$-n_0 e (\Delta \vec{E} + \Delta \vec{u} \wedge \vec{B}_0) = m n_0 \frac{\partial \Delta \vec{u}}{\partial t} \quad (\text{C.48})$$

Esta ecuación es el resultado de la imposición de numerosas condiciones por lo que su capacidad de predicción es limitada. Quedan fuera de su dominio fenómenos importantes como la propagación de ondas a baja frecuencia en la que el movimiento iónico es esencial, los fenómenos en plasmas calientes, no lineales, el estudio de fenómenos de pérdidas, etc.. Sin embargo, como se verá, describe a una gran variedad de fenómenos de importancia fundamental y permite su generalización, de forma muy sencilla, para la inclusión del movimiento iónico, las pérdidas por interacción con los neutros y los efectos térmicos.

¹⁴Aunque los problemas no lineales son bastante más complejos que los lineales, sus consecuencias son de gran interés teórico y práctico ([Chen], [Nicholson].

Relaciones de dispersión :

La ecuación C.48 es lineal y en ella aparecen solamente operadores temporales. Esto permite reducirla a una ecuación algebraica por medio de la transformada de Fourier.

$$-n_0 e (\Delta \vec{E} + \Delta \vec{u} \wedge \vec{B}_0) = j\omega m n_0 \Delta \vec{u} \quad (\text{C.49})$$

donde \vec{B}_0 es constante y , \vec{E} y $\Delta \vec{u}$ son amplitudes o densidades espectrales.

Esta ecuación permite despejar las componentes de $\Delta \vec{u}$ en función del campo eléctrico $\Delta \vec{E}$ para obtener la densidad de corriente

$$\vec{j} = -e n_0 \Delta \vec{u} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\Delta E}$$

donde $\vec{\sigma}$ es el tensor de conductividad. Este puede expresarse de forma compacta definiendo la *Frecuencia electrónica de plasma*

$$\omega_p^2 \equiv \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \quad (\text{C.50})$$

y el valor absoluto de la frecuencia ciclotrónica electrónica

$$\Omega_e \equiv \frac{+e B_0}{m} \geq 0 \quad (\text{C.51})$$

Las relaciones de dispersión del plasma pueden expresarse a través de las componentes de la conductividad¹⁵

$$(\sigma_{\alpha\beta}) = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{j\omega (1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2})} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Omega_e}{j\omega} & 0 \\ \frac{\Omega_e}{j\omega} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.52})$$

La conductividad del plasma viene representada por un tensor cuya diagonal es imaginaria pura. Aunque esto es consecuencia de la no inclusión de mecanismos de pérdidas, no es aconsejable utilizar una conductividad que, fundamentalmente, representa a mecanismos de almacenamiento de energía (véase la discusión del teorema de Poynting complejo en C.4.3) por lo que es preferible su substitución por una constante dieléctrica equivalente.

La inclusión de las pérdidas de Langevin en el modelo es muy sencilla. Linealizando el término C.43 y suponiendo a los neutros en reposo se obtiene $\frac{\partial \vec{P}_0}{\partial t} \simeq m n_0 \nu \Delta \vec{u}$. Sumando ésto al segundo miembro de la ecuación C.49 resulta

$$m n_0 (\nu + j\omega) \Delta \vec{u} \Rightarrow j\omega \rightarrow \nu + j\omega \quad (\text{C.53})$$

¹⁵Problema c-6.

Basta, por lo tanto, con sustituir $j\omega$ por $\nu + j\omega$. Así, pues, para un plasma isótropo ($\vec{B}_0 = 0$) la conductividad toma la forma

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\nu + j\omega} = \frac{\sigma_0}{1 + j\omega \tau_p} \quad (\text{C.54})$$

que es formalmente análoga a C.33.

La inclusión de las pérdidas, aunque sean muy pequeñas, es significativa en este caso puesto que se acostumbra a asociar a la conductividad a los fenómenos disipativos. El valor estático de la misma, $\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\nu}$, sería imaginario e infinito en caso de ignorar este efecto.

Hasta ahora se ha considerado a todas las cargas del plasma como de conducción, pero no hay ningún inconveniente en considerar al medio como polarizable y no conductor. Efectivamente, la ecuación de Ampère puede ser escrita en el dominio de la frecuencia como

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + j\omega \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \vec{E} = j\omega \mu_0 \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon} \cdot \vec{E}$$

donde

$$\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon} \equiv \varepsilon_0 \left(\overset{\leftrightarrow}{I} + \frac{\overset{\leftrightarrow}{\sigma}}{j\omega \varepsilon_0} \right) \quad (\text{C.55})$$

es el tensor dieléctrico del plasma, tensor hermítico cuyas componentes se suelen escribir con la notación

$$(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} S & -jD & 0 \\ jD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (\text{C.56})$$

donde, en función de la frecuencia, el campo magnético (Ω_e) y la densidad de partículas (ω_p^2),

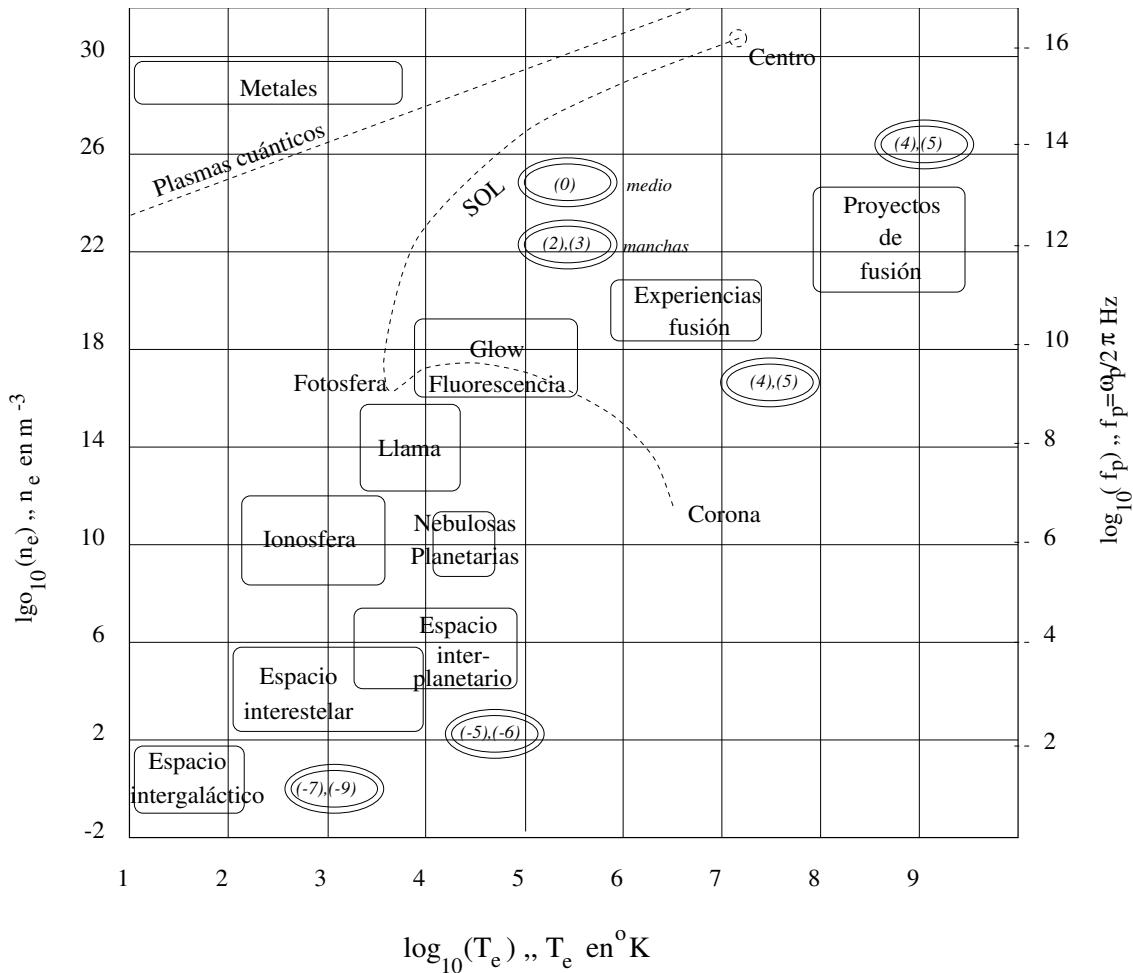
$$S = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \quad , \quad D = \frac{\Omega}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \quad , \quad P = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{C.57})$$

Para el plasma isótropo, la constante dieléctrica toma el valor

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad (\text{C.58})$$

por lo que $\varepsilon < \varepsilon_0$ para frecuencias superiores a la del plasma, negativa para frecuencias inferiores a la anterior y nula para la frecuencia de plasma.

En la figura C.9 se muestra un diagrama en el que aparecen algunos de los plasmas naturales y artificiales en función de la densidad y de la temperatura del fluido electrónico. En esta sección no se han considerado los efectos térmicos, pero la temperatura, interpretada en un sentido amplio

Figura C.9: Diagrama $n_e \rightarrow T_e$ de los plasmas

como parámetro que mide la energía media, es una de las variables principales que definen a un plasma. Además se indican los órdenes de magnitud del campo magnético principal (en el interior de las elipses aparecen las potencias de 10 del campo en gauss: el campo medio de la superficie solar es de 1 gauss y el de las manchas solares del orden de $10^2 \rightarrow 10^3$ gauss). Los plasmas densos y fríos, que aparecen en el diagrama por encima de la línea de puntos, responden a un modelo cuántico mientras que los que aparecen por debajo de esta línea se describen adecuadamente mediante un modelo clásico. Como puede verse, la densidad, la temperatura y el campo magnético varían dentro de un rango muy extenso.

De todas maneras, debe tenerse en cuenta que este diagrama es una representación parcial y muy simplificada del estado de un plasma. En este sentido, basta con comprobar que la llama, que figura como menos densa y caliente que las descargas en gases ("glow"), produce quemaduras mientras que un tubo fluorescente puede tocarse sin peligro. Ello se debe a que los plasmas están compuestos, como ya se ha comentado, de diversas componentes y que la densidad y temperatura

que figura en el diagrama es la de los electrones. La temperatura de estos plasmas sería considerada muy elevada si correspondiera a moléculas neutras con una densidad del orden de la de un gas en condiciones normales¹⁶ pero las densidades de electrones de $10^{12} \rightarrow 10^{20} m^{-3}$ son bajas y la capacidad de causar quemadura es escasa. El responsable de este efecto en la llama es el fluido de los neutros, que está relativamente muy caliente y cuya densidad es próxima a la normal. Por el contrario, los neutros de la descarga están prácticamente a temperatura ambiente.

C.3. Electrodinámica de los medios en movimiento

Como se ha visto en la sección 3.2.1, la electrodinámica de los medios en movimiento parte de la expresión tensorial 3.10 y 3.16 de las leyes de Maxwell. A continuación se ofrece una introducción a este tema.

C.3.1. Leyes de transformación de los campos en medios materiales

Dado que el tensor del campo \tilde{F} macroscópico es formalmente idéntico al microscópico, las leyes de transformación de sus componentes son las que se describen en 2.59. A continuación se vuelve a expresar estas leyes con la notación matricial¹⁷

$$\vec{E}' = \overset{\leftrightarrow}{\Pi} \cdot \vec{E} + c \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} \cdot \vec{B} \quad (\text{C.59a})$$

$$\vec{B}' = \overset{\leftrightarrow}{\Pi} \cdot \vec{B} - \frac{1}{c} \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} \cdot \vec{E} \quad (\text{C.59b})$$

donde

$$\overset{\leftrightarrow}{\Pi} \equiv \gamma \overset{\leftrightarrow}{I} + (1 - \gamma) \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{\beta^2}, \quad \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} = \gamma \overset{\leftrightarrow}{\beta} \quad (\text{C.60})$$

, $\overset{\leftrightarrow}{I}$ es la matriz unitaria tridimensional, $\vec{\beta} \vec{\beta}$ es la diada ($\beta_\alpha \beta_\beta$) y

$$\overset{\leftrightarrow}{\beta} = (b_{\alpha\beta}) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\beta_z & \beta_y \\ \beta_z & 0 & -\beta_x \\ -\beta_y & \beta_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.61})$$

es una matriz tal que $\overset{\leftrightarrow}{\beta} \cdot \vec{X} = \vec{\beta} \wedge \vec{X}$.

¹⁶ Esta densidad se conoce como Número de Loschmidt $n_L \simeq 3 \cdot 10^{25} m^{-3}$.

¹⁷ Problema 2-21.

Las leyes de transformación de los demás campos tridimensionales se deducen por analogía con las anteriores, dado que las componentes de $\frac{\vec{E}}{c}$, $c\vec{D}$ y $-c\vec{P}$ ocupan la misma posición dentro de sus tensores respectivos y lo mismo ocurre con las de \vec{B} , \vec{H} y \vec{M} . De acuerdo con ésto,

$$\vec{D}' = \overset{\leftrightarrow}{\Pi} \cdot \vec{D} + \frac{1}{c} \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} \cdot \vec{H} \quad (\text{C.62a})$$

$$\vec{H}' = \overset{\leftrightarrow}{\Pi} \cdot \vec{H} - c \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} \cdot \vec{D} \quad (\text{C.62b})$$

y

$$\vec{P}' = \overset{\leftrightarrow}{\Pi} \cdot \vec{P} - \frac{1}{c} \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} \cdot \vec{M} \quad (\text{C.63a})$$

$$\vec{M}' = \overset{\leftrightarrow}{\Pi} \cdot \vec{M} + c \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} \cdot \vec{P} \quad (\text{C.63b})$$

Las transformaciones inversas se obtienen substituyendo $\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$ o, dadas las definiciones C.60 y C.61, $\overset{\leftrightarrow}{\beta} \rightarrow -\overset{\leftrightarrow}{\beta}$.

Es interesante consignar aquí las aproximaciones de primer orden en $\overset{\beta}{\beta}$ de C.59 y C.62 (otro tanto puede hacerse con la correspondiente a las densidades de polarización)

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \quad (\text{C.64a})$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E} \quad (\text{C.64b})$$

$$\vec{D}' = \vec{D} + \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{H} \quad (\text{C.64c})$$

$$\vec{H}' = \vec{H} - \vec{V} \wedge \vec{D} \quad (\text{C.64d})$$

y las correspondientes aproximaciones galileanas, deducidas de las anteriores en el límite $c \rightarrow \infty$

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \quad (\text{C.65a})$$

$$\vec{B}' = \vec{B} \quad (\text{C.65b})$$

$$\vec{D}' = \vec{D} \quad (\text{C.65c})$$

$$\vec{H}' = \vec{H} - \vec{V} \wedge \vec{D} \quad (\text{C.65d})$$

C.3.2. Invariantes

Además de los invariantes de \tilde{F}

$$I_1 = B^2 - \frac{E^2}{c^2} , , \quad I_2 = (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \quad (\text{C.66})$$

se dispone de otros tantos correspondientes a los productos totalmente contraídos de los tensores \tilde{G} y $\tilde{\Pi}$ por ellos mismos¹⁸

$$I'_1 = H^2 - c^2 D^2 , , \quad I'_2 = (\vec{D} \cdot \vec{H})^2 \quad (\text{C.67})$$

y de los correspondientes a los productos de un tensor por otro distinto, como

$$I_3 = \frac{1}{2} F^{ij} G_{ij} = \vec{B} \cdot \vec{H} - \vec{E} \cdot \vec{D} \quad (\text{C.68})$$

Como se deduce de lo anterior, los campos macroscópicos tienen propiedades análogas a las expuestas en la sección 2.4.2.1 para \vec{E} y \vec{B} ¹⁹.

C.3.3. Ecuaciones constitutivas

La respuesta electromagnética de ciertos medios materiales puede expresarse con suficiente aproximación mediante ecuaciones constitutivas de tipo lineal, isótropo y no dispersivo, tales como $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$. Como es fácil de comprobar, este tipo de relación solo es posible para medios que están en reposo con respecto al observador: no existe una relación general

$$\tilde{F}'' = " \alpha \tilde{G}$$

donde α sea un escalar.

Efectivamente, considérese un medio que está en reposo en el sistema \mathcal{S} y cumple unas ecuaciones constitutivas del tipo

$$\begin{cases} D_x = \epsilon_0 \epsilon_r E_x \\ H_x = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_{01} = \frac{\epsilon_0}{\mu_0} F_{01} = \alpha_1 F_{01} \\ G_{21} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} F_{21} = \alpha_2 F_{21} \end{cases}$$

Nótese que $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Luego, dado que \tilde{F} y \tilde{G} son tensores de orden (2), deben estar relacionados entre sí a través de un producto doblemente contraído con un tensor de orden (4). Se escribirán las ecuaciones constitutivas de la forma

$$\tilde{F} = \tilde{C}^{(4)} : \tilde{G} , , \quad F^{ij} = C^{ijkl} G_{kl} \quad (\text{C.69})$$

¹⁸Dado que \tilde{G} y $\tilde{\Pi}$ están relacionados entre sí, solo dos de los cuatro invariantes son independientes. Problema c-8.
¹⁹Problema c-9.

donde $\tilde{C}^{(4)}$ es el tensor de los *Parámetros constitutivos* y el símbolo $(:)$ indica el producto tensorial en el que se contraen los dos últimos índices de las componentes del primer tensor con los del segundo.

Un tensor de orden (4) y 4 dimensiones tiene $4^4 = 256$ elementos, pero solo 36 de las componentes de $\tilde{C}^{(4)}$ son independientes. Dada la antisimetría de las componentes doblemente covariantes (contravariantes) de los tensores del campo, existen las relaciones de simetría

$$C^{ijkl} = -C^{jikl} = -C^{ijlk} = C^{jilk}$$

. De esto se deduce que a los dos primeros índices corresponden 6 combinaciones independientes²⁰ y otras tantas a los dos últimos. El total de los índices independientes es, por lo tanto, $6 \times 6 = 36$.

Las ecuaciones constitutivas pueden expresarse de forma más asequible mediante la notación matricial tridimensional [Kong]. Desarrollando C.69 y expresando cada componente de \vec{D} y \vec{H} en función de las de \vec{E} y \vec{B} se obtiene un sistema de ecuaciones cuya expresión matricial puede anotarse de la forma²¹.

$$\vec{D} = \frac{1}{c} \overset{\leftrightarrow}{P} \cdot \vec{E} + \overset{\leftrightarrow}{L} \cdot \vec{B} \quad (\text{C.70})$$

$$\vec{H} = \overset{\leftrightarrow}{M} \cdot \vec{E} + c \overset{\leftrightarrow}{Q} \cdot \vec{B} \quad (\text{C.71})$$

.En general, todos los componentes (36) de las cuatro matrices constitutivas, $\overset{\leftrightarrow}{P}$, $\overset{\leftrightarrow}{L}$, $\overset{\leftrightarrow}{M}$ y $\overset{\leftrightarrow}{Q}$, son independientes y función de las correspondientes del tensor \tilde{C} . Estas ecuaciones ponen de manifiesto que los medios lineales son, en general, *Bianisótropos*, puesto que \vec{D} y \vec{H} son función de los dos campos \vec{E} y \vec{B} y la relación entre unos y otros es anisótropa.

Como caso particular se comprobará que un medio isótropo en movimiento se comporta como bianisótropo: Sea \mathcal{S}' el sistema propio de dicho medio, en el que las ecuaciones constitutivas son

$$\vec{D}' = \varepsilon \vec{E}' \quad (\text{C.72})$$

$$\vec{H}' = \frac{1}{\mu} \vec{B}' \quad (\text{C.73})$$

Haciendo uso de las inversas de las transformaciones C.59 y C.62 para expresar \vec{D} y \vec{H} en función de \vec{E} y \vec{B} , se obtienen relaciones del tipo bianisótropo C.70. Dado que las matrices de $\overset{\leftrightarrow}{\Pi}$ y $\overset{\leftrightarrow}{\Lambda}$ son función de la velocidad relativa entre sistemas, sus componentes son función de solo cinco parámetros independientes: μ , ε , β_x , β_y y β_z ²².

El problema de los conductores lineales es algo más complicado, por lo que la ilustración del mismo se relega al problema c-13

²⁰Véase el problema c-11.

²¹Véase el problema c-10.

²²Véase el problema c-12.

C.4. Revisión del teorema de Poynting

La interpretación de los balances macroscópicos de energía y cantidad de movimiento es menos clara y precisa que la propuesta para los correspondientes microscópicos. En esta sección se analizan distintas versiones del Teorema de Poynting aplicables a medios macroscópicos de tipo general y a aquellos cuyas propiedades son lineales.

El tratamiento dado a este tema en las referencias más usuales es diversa y en ocasiones es discrepante con la que aquí se ofrece [Jackson], [Stratton]. En cualquier caso, la utilidad de estos balances reside fundamentalmente en la posibilidad de equilibrar entre sí a un conjunto de términos que son homogéneos dimensionalmente. Una vez establecido un modelo para el medio y los parámetros concretos del problema que se quiere resolver, es posible hacer un balance pormenorizado e interpretar de forma más profunda a cada uno de sus términos. La línea de exposición que aquí se sigue es en parte análoga a la de [Condon] (Véase también [Akhiezer], [Quemada]).

C.4.1. Caso general

Si se parte de la versión 3.1 de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell, dado que éstas son formalmente análogas a las microscópicas 2.83, los balances energéticos pueden obtenerse también por analogía con 2.113 y 2.114. También se obtiene eliminando \vec{j}_T del producto $\vec{j}_T \cdot \vec{E}$:

$$\underbrace{\vec{j}_T \cdot \vec{E}}_{(a)} + \underbrace{\frac{\partial \omega_{em0}}{\partial t}}_{(b)} + \underbrace{\nabla \cdot \vec{S}_0}_{(c)} = 0 \quad (\text{C.74a})$$

$$\underbrace{\int_V \vec{j}_T \cdot \vec{E} dv}_{(a')} + \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \omega_{em0} dv}_{(b')} + \underbrace{\oint_S \vec{S}_0 \cdot d\vec{s}}_{(c')} = 0 \quad (\text{C.74b})$$

donde \vec{j}_T es la densidad total de corriente de transporte de carga

$$\vec{S}_0 \equiv \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (\text{C.75})$$

es el vector macroscópico de Poynting para el campo electromagnético (\vec{E}, \vec{B}) , que en este texto se llamará *Vector de Poynting del vacío* y

$$\omega_{em0} = \omega_{e0} + \omega_{m0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2 \mu_0} \quad (\text{C.76})$$

la densidad de energía asociada al campo (\vec{E}, \vec{B}) , que se denominará *Densidad de energía del campo electromagnético*. Nótese que

$$d\omega_{em0} = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot d\vec{B} \quad (\text{C.77})$$

es una diferencial exacta por lo que, partiendo de campos nulos,

$$\omega_{em0} = \int_0^t d\omega_{em0} \quad (\text{C.78})$$

El término (a) es el producto de dos magnitudes macroscópicas

$$\vec{j}_T = \langle \vec{j}_m \rangle = \vec{j} + \vec{j}_n = \vec{j} + \vec{j}_p + \vec{j}_M$$

donde $\langle \vec{j}_m \rangle$ es el promedio de la densidad de corriente microscópica y

$$\vec{E} = \langle \vec{E}_m \rangle$$

es el campo macroscópico.

$$\vec{j}_T \cdot \vec{E} = \langle \vec{j}_m \cdot \vec{E}_m \rangle - \langle \delta \vec{j}_m \cdot \delta \vec{E}_m \rangle \quad (\text{C.79})$$

Según se vio en el capítulo 1 del tomo primero, si la función ϕ es el producto de otras dos, ϕ_1 y ϕ_2 ,

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \rangle + \langle \delta \phi_1 \delta \phi_2 \rangle$$

donde los términos del tipo $\langle \delta \phi_1 \delta \phi_2 \rangle$ son promedios del producto de las magnitudes aleatorias, tales que $\langle \delta \phi \rangle = 0$. Luego, si la correlación entre la corriente aleatoria $\delta \vec{j}_m$ y el campo aleatorio $\delta \vec{E}_m$ es pequeña o nula, (a) puede igualarse al valor medio de la potencia que los campos microscópicos suministran, por unidad de volumen en el entorno del punto (\vec{r}, t) , a las cargas del medio. Pero, en cualquier caso, puede definirse como la densidad de potencia cedida por el campo macroscópico a los fluidos de carga que son responsables de la conducción en el medio y de la polarización del mismo. Todas estas cargas son reales por lo que pueden de igual manera intercambiar energía con el campo. Cuando $\vec{j} \cdot \vec{E}$, $\vec{j}_p \cdot \vec{E}$ o $\vec{j}_M \cdot \vec{E}$ son positivos implican que el campo cede energía a las partículas y cuando son negativos que éstas ceden su energía al campo. Así, $\vec{j}_T \cdot \vec{E}$ puede emplearse en transportar fluidos de carga, polarizarlos, aumentar su energía cinética, variar las dimensiones e incluso la estructura cristalina, ionizar y excitar moléculas, calentar, dilatar y evaporar al medio, alterarlo químicamente, etc.. En las circunstancias más simples, $\vec{j} \cdot \vec{E}$ se emplea fundamentalmente en el transporte y producción de calor, $\vec{j}_p \cdot \vec{E}$ en polarizar eléctricamente al medio y $\vec{j}_M \cdot \vec{E}$ en polarizarlo magnéticamente, pero ésto no es cierto en general. De lo anterior se desprende que la energía que se le cede a las partículas del medio es solo parcialmente reversible al campo. En los medios pasivos, aquellos en los que no existe ninguna conexión con una fuente de energía externa al sistema electromagnético clásico, el medio recibe más energía de la que entrega al campo, mientras que en los medios activos, como las baterías, los generadores y las zonas activas de los transistores o láseres, esta relación puede invertirse. Como se ha comentado anteriormente, un desglose más

detallado, que permita asociar los distintos términos a procesos como los que se acaba de enumerar, requiere el establecimiento y análisis de un modelo adecuado del medio.

Los términos $(b - b')$ y $(c - c')$ pueden identificarse respectivamente, de forma análoga a la propuesta para sus homólogos microscópicos, como la razón de variación temporal de la energía asociada al campo macroscópico (\vec{E} , \vec{B}) y el flujo de potencia del mismo, hacia afuera de \mathcal{V} . Aunque tampoco las definiciones de ω_{em0} y $\vec{\mathcal{S}}_0$ son unívocas, puede aducirse a su favor las mismas consideraciones esgrimidas para el caso microscópico.

La versión anterior es la que puede interpretarse de forma más directa pero tradicionalmente se emplea otra equivalente en función de \vec{D} y \vec{H} . Esta puede obtenerse a partir de C.74, expresando \vec{j}_T en función de \vec{j} , \vec{D} y \vec{H} , o de la segunda versión de las ecuaciones de Maxwell 3.8, eliminando \vec{j} del producto $\vec{j} \cdot \vec{E}$ y haciendo uso del desarrollo de la divergencia del producto vectorial:

$$\underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{(d)} + \underbrace{\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{(e)} + \underbrace{\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{(f)} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} = 0 \quad (\text{C.80a})$$

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} dv}_{(d')} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dv}_{(e')} + \underbrace{\oint_{\mathcal{S}} \vec{\mathcal{S}} \cdot d\vec{s}}_{(f')} = 0 \quad (\text{C.80b})$$

donde \vec{j} es la densidad de corriente de conducción

$$\vec{\mathcal{S}} \equiv \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (\text{C.81})$$

es el *Vector de Poynting* macroscópico y (e), véase [Akhiezer], es la densidad de potencia que hay que suministrar al campo y al medio para que \vec{D} varíe con la velocidad $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ y \vec{B} varíe con la velocidad $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. En este caso

$$dw = \vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B} \quad (\text{C.82})$$

no es diferencial exacta porque, en general, \vec{E} no depende exclusivamente de \vec{D} ni \vec{H} de \vec{B} , por lo que la integral de dw depende del camino seguido por el proceso de establecimiento del campo. Como puede comprobarse fácilmente, $\vec{\mathcal{S}}$ y $\vec{\mathcal{S}}_0$ coinciden para medios no magnetizables pero, tanto (d) como (e) son términos híbridos que incluyen a (b) y (c) y, además, se reparten entre sí a la densidad de potencia suministrada por el campo a las cargas de polarización ρ_n .

Como resumen de este apartado puede decirse que los balances C.74 y C.80 son equivalentes y útiles y que, a pesar de las dificultades de interpretación del segundo, es éste el más comúnmente utilizado. Ambos son coincidentes cuando se aplican al "vacío" (un medio en el que se ha tomado $\vec{j}_n = 0$).

C.4.2. Medios lineales no dispersivos

El caso más simple corresponde a medios que, además, son homogéneos y sus propiedades independientes del tiempo. Como se ha visto en el capítulo tercero, la aproximación de medio no dispersivo es válida para una extensa familia de materiales si la variación de los campos es lo suficientemente lenta. σ , ϵ , μ , χ_e y χ_m son pues las *Constantes estáticas del medio*. Se supone, para simplificar, que el medio es isótropo aunque el desarrollo del teorema para los anisótropos es análogo al presente. La ecuación C.80a toma la forma

$$\underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{(g)} + \underbrace{\frac{\partial \omega_{em}}{\partial t}}_{(h)} + \underbrace{\nabla \cdot \vec{S}}_{(i)} = 0 \quad (\text{C.83})$$

donde

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (\text{C.84})$$

y

$$\omega_{em} = \omega_e + \omega_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2 \mu} H^2 \quad (\text{C.85})$$

En un medio pasivo (óhmico) $\sigma > 0$ y $(g) = \sigma \vec{E}^2$ es positivo, lo que implica que el campo electromagnético pierde irreversiblemente una densidad de potencia que comunica a las cargas de conducción contenidas en \mathcal{V} . Dentro de las limitaciones impuestas, los medios cumplen con mucha aproximación la *Ley de Joule*, según la cual esta energía se transforma en térmica.

En un medio lineal activo existen fuentes de energía que pueden representarse por medio de *Campos electromotores* \vec{E}' ²³ (fuerzas por unidad de carga cuyo origen no es electromagnético clásico; de naturaleza mecánica, química, etc.) que también actúan sobre las cargas, intercambiando energía con el medio y el campo. Aunque estas fuerzas actúan sobre todos los tipos de carga, sin distinción, en la mayoría de los casos prácticos, relacionados con medios lineales no dispersivos, puede considerarse que su acción sobre las corrientes de polarización es despreciable. La corriente de conducción puede suponerse ocasionada por la suma del campo clásico \vec{E} y el electromotor, de forma que

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}') \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{E}'$$

y

$$(g) = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\vec{j}^2}{\sigma} - \vec{j} \cdot \vec{E}' \quad (\text{C.86})$$

En este caso, la densidad de potencia $\vec{j} \cdot (\vec{E} + \vec{E}')$ suministrada por el campo electromagnético y el electromotor a las cargas de conducción se emplearían en calentar al medio por efecto Joule²⁴,

²³En algunos casos, la actividad del medio puede ser representada por una conductividad con parte real negativa.

²⁴Este es el mecanismo más importante de calentamiento del medio, pero no el único.

según $\frac{\vec{j}^2}{\sigma} > 0$. El trabajo realizado por los campos electromotores sobre las cargas de conducción puede ser positivo (p.ej: batería en descarga) o negativo (p.ej: batería en carga). Si esta es la única fuente de energía externa, el teorema de Poynting puede enunciarse de la forma

$$\vec{j} \cdot \vec{E}' = \frac{\vec{j}^2}{\sigma} + \frac{\partial \omega_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} \quad (\text{C.87})$$

En (h) ω_{em} es una función diferenciable por lo que puede propiamente definirse como una densidad de energía asociada al campo electromagnético y parcialmente al medio.

Por lo que respecta a (i), las consideraciones hechas sobre el mismo en el epígrafe anterior son suficientes.

C.4.3. Medios lineales dispersivos. Teorema complejo de Poynting

Por último, se desarrollará una versión del teorema de Poynting aplicable a medios lineales dispersivos. Partiendo de las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia 3.38 se obtiene el *Teorema complejo de Poynting*.

Eliminando \vec{j}^* de la expresión $\vec{j}^* \cdot \vec{E} = \sigma^* |\vec{E}|^2$ ²⁵, donde $|\vec{V}|^2 \equiv \vec{V} \cdot \vec{V}^*$,

$$\sigma^* |\vec{E}|^2 + j\omega(\mu |\vec{H}|^2 - \varepsilon^* |\vec{E}|^2) + \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}}^c = 0 \quad (\text{C.88})$$

expresión en la que se ha definido a

$$\vec{\mathcal{S}}^c \equiv \vec{E} \wedge \vec{H}^* \quad (\text{C.89})$$

como el *Vector de Poynting complejo*.

Si se escriben las constantes complejas de acuerdo con C.34, se hallan las partes real e imaginaria de C.88 y se definen la *Conductividad equivalente* σ_{eq} y la *Constante dieléctrica equivalente* ε_{eq}

$$\sigma_{eq} = \sigma' + \omega \varepsilon'' \quad , \quad \varepsilon_{eq} = \varepsilon' - \frac{\sigma''}{\omega} \quad (\text{C.90})$$

se tiene

$$\underbrace{\sigma_{eq} |\vec{E}|^2}_{(a)} + \underbrace{\omega \mu'' |\vec{H}|^2}_{(b)} + \underbrace{\nabla \cdot \text{Re} [\vec{\mathcal{S}}^c]}_{(c)} = 0 \quad (\text{C.91a})$$

$$-\underbrace{\omega \varepsilon_{eq} |\vec{E}|^2}_{(d)} + \underbrace{\omega \mu' |\vec{H}|^2}_{(e)} + \underbrace{\nabla \cdot \text{Im} [\vec{\mathcal{S}}^c]}_{(f)} = 0 \quad (\text{C.91b})$$

²⁵ $\vec{j}^* = \nabla \wedge \vec{H}^* + j\omega \varepsilon^* \vec{E}^* \quad , \quad \nabla \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \wedge \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \wedge \vec{b}$.

donde $Re[]$ e $Im[]$ indican respectivamente a las partes real e imaginaria del argumento. El primer teorema relaciona a la parte real del vector de Poynting con los valores medios de las energías disipadas y la segunda a la parte imaginaria del mismo con los valores medios de las energías almacenadas; las definiciones de las constantes equivalentes permiten seguir asociando a la conductividad con las pérdidas y a la constante dieléctrica con el almacenamiento. De acuerdo con III.26

$$|\vec{E}|^2 = 2 \langle \vec{E}(t)^2 \rangle , , |\vec{H}|^2 = 2 \langle \vec{H}(t)^2 \rangle \quad (\text{C.92a})$$

$$Re [\vec{\mathcal{S}}^c] = 2 \langle \vec{\mathcal{S}}(t) \rangle \quad (\text{C.92b})$$

donde ahora $\langle \rangle$ indican la media temporal sobre un periodo del campo monocromático.

Cuando todas las constantes son reales, $\varepsilon' = \varepsilon$, $\mu' = \mu$, $\sigma' = \sigma$, $\varepsilon'' = 0$, $\mu'' = 0$ y $\sigma'' = 0$, por lo que, comparando con C.83, $\frac{1}{2}(a)$ y $\frac{1}{2}(b)$, que son positivos, están asociados a la disipación media de energía, el primero a la eléctrica y el segundo a la magnética, mientras que $\frac{1}{2}(c)$ es el valor medio del flujo hacia afuera de \mathcal{V} del vector de Poynting. $\frac{1}{4}(d)$ y $\frac{1}{4}(e)$ son los valores medios de las energías almacenadas, asociadas respectivamente a los campos magnético y eléctrico. Es interesante resaltar que las partes reales de ε ²⁶ y μ , así como la parte imaginaria de σ , son parámetros que describen la capacidad de almacenar energía en \mathcal{V} , mientras que la parte real de σ y las imaginarias de ε y μ representan a los mecanismos de disipación.

C.5. Problemas

c-1. Se define como polarizabilidad de una molécula a la constante de proporcionalidad, α , entre el momento dipolar de la molécula y el campo eléctrico: $\vec{p} = \alpha \vec{E}$. Supóngase que un átomo no polar puede considerarse como constituido por una nube electrónica indeformable, de densidad uniforme, radio a_0 y carga total $-Ze$, que rodea a un núcleo puntual de carga $+Ze$.

- a) Hallar la polarizabilidad para campos uniformes y pequeños, tales que la separación de los centros de carga positiva y negativa $\delta x \ll a_0$.
- b) Calcular la frecuencia natural de resonancia del movimiento de la nube electrónica suponiendo que el núcleo está prácticamente en reposo y que la nube ha sido desplazada ligeramente del equilibrio.

c-2. En ciertos casos la función $f(t)$ que determina la relación entre \vec{P} y \vec{E} (respuesta a un impulso; véase C.7) se puede representar en la forma $f(t) = f_0 \exp(-t/\tau)$, donde f_0 y τ son constantes. Hacer uso de la transformada de Fourier para hallar el valor de la constante dieléctrica.

c-3. Demostrar que la solución de C.14 es C.16.

c-4. Demostrar C.20.

²⁶De acuerdo con C.58 la ε' es negativa en un plasma no magnetizado para $\omega < \omega_p$.

- c-5. Representar mediante un diagrama de Bode C.26 y C.29 ²⁷.
- c-6. Encontrar los tensores conductividad y dieléctrico C.52 y C.56.
- c-7. Corregir C.52 para incluir efectos térmicos. Considérese al plasma como isotermo. (Hágase uso de la ec. de continuidad linealizada).
- c-8. Demostrar que los invariantes asociados al tensor de polarizaciones $\tilde{\Pi}$ se pueden expresar como combinación de los correspondientes a \tilde{F} y \tilde{G} .
- c-9. Un medio está polarizado eléctrica y magnéticamente en el sistema de referencia \mathcal{S} . ¿Qué relaciones deben existir entre ambas polarizaciones para que exista un sistema de referencia \mathcal{S}' en el que dicho medio aparezca como exclusivamente dieléctrico? Identificar a \mathcal{S}' .
- c-10. Identificar las 36 componentes independientes C^{ijkl} .
- c-11. Expresar las componentes de las matrices $\overset{\leftrightarrow}{P}$, $\overset{\leftrightarrow}{L}$, $\overset{\leftrightarrow}{M}$ y $\overset{\leftrightarrow}{Q}$ en función de las componentes independientes identificadas en el problema anterior.
- c-12. Dado un medio isótropo en \mathcal{S}' , expresar las componentes de las matrices $\overset{\leftrightarrow}{P}$, $\overset{\leftrightarrow}{L}$, $\overset{\leftrightarrow}{M}$ y $\overset{\leftrightarrow}{Q}$ en función de μ , ε , β_x , β_y y β_z .
- c-13. Considérese a un conductor que en su sistema propio \mathcal{S}' es isótropo, de conductividad σ , y neutro. Hallar su ecuación constitutiva en forma matricial tridimensional en un sistema \mathcal{S} en el que está en movimiento (Véase el problema 1-4).
- c-14. Demostrar que C.74 y C.80 son equivalentes. Describir como se reestructura cada uno de los términos.
- c-15. Demostrar a partir de C.87 (tomando $\vec{E}' = 0$):

$$\sigma \vec{E}^2 + \sigma \chi_m \vec{E}^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \varepsilon_0 (\chi_e + \chi_e \chi_m + \chi_m) \vec{E}^2 \right] + \frac{\partial \omega_{em0}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S}_0 = 0$$

²⁷Representar $20 \log_{10} |\chi(\omega)|$ y $|\chi(\omega)|$ frente a $\log_{10} \omega$.

Apéndice D

Apéndice I del capítulo 4

D.1. Introducción

En este apéndice se trata la propagación de ondas en medios anisótropos y las leyes de la reflexión y refracción para ondas planas.

D.2. Ondas en medios anisótropos

Para ilustrar la propagación de ondas en medios anisótropos, se supondrá que dicha anisotropía es solo dieléctrica y que el medio es no magnético y no disipativo. Se estudiará la posibilidad de que la ecuación de ondas correspondiente admita soluciones monocromáticas, planas y homogéneas.

Si estas ondas pueden propagarse por el medio sin disipación, $\gamma = j\beta$ y

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \beta \vec{n} \cdot \vec{r})} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega , , \quad \nabla \rightarrow -j\beta \vec{n} \quad (\text{D.1})$$

Definiendo al vector *Indice de refracción*

$$\vec{N} \equiv N \vec{n} , , \quad N \equiv \frac{c}{v} = \frac{c\beta}{\omega} \quad (\text{D.2})$$

las ecuaciones rotacionales de Maxwell toman la forma

$$\vec{N} \wedge \vec{E} = c \mu_0 \vec{H} \quad (\text{D.3a})$$

$$\vec{N} \wedge \vec{H} = -c \epsilon_0 \vec{\varepsilon}_r \cdot \vec{E} \quad (\text{D.3b})$$

Las ecuaciones de la divergencia son redundantes bajo estos supuestos ya que las ecuaciones anteriores implican que

$$\vec{N} \cdot \vec{D} = 0 , , \quad \vec{N} \cdot \vec{H} = 0 \quad (\text{D.4})$$

donde $\vec{D} = \epsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}_r \cdot \vec{E}$. Luego las soluciones buscadas poseen campos \vec{D} y \vec{H} transversales a la dirección de propagación \vec{n} . Este no es el caso del campo eléctrico \vec{E} que, en general, tendrá una componente longitudinal.

De acuerdo con ésto, la estructura de la onda puede ser fijada recurriendo exclusivamente a las ecuaciones rotacionales. Escribiendo el triple producto vectorial en forma diádica

$$\vec{N} \wedge (\vec{N} \wedge \vec{E}) = \vec{N} (\vec{N} \cdot \vec{E}) - N^2 \vec{E} = (\vec{N} \vec{N} - N^2 \overset{\leftrightarrow}{I}) \cdot \vec{E}$$

La ecuación de onda para \vec{E} se obtiene multiplicando a la ecuación D.3a vectorialmente por \vec{N} y haciendo uso de D.3b. \vec{H} se obtiene a partir de \vec{E} mediante D.3a:

$$(\vec{N} \vec{N} - N^2 \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}_r) \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{D.5a})$$

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_0} \vec{N} \wedge \vec{E} , , \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (\text{D.5b})$$

Para que D.5a tenga una solución distinta de la trivial $\vec{E} = 0$, es necesario que el determinante del sistema de ecuaciones sea nulo

$$|N_\alpha N_\beta - N^2 \delta_{\alpha\beta} + \epsilon_{r_{\alpha\beta}}| = 0 \quad (\text{D.6})$$

Estos resultados se aplicarán a dos tipos de medios anisótropos, los uniaxiales y los girótropos.

D.2.1. Medios uniaxiales

Los dieléctricos anisótropos ordinarios, sin pérdidas, se caracterizan por tensores cuyas componentes cartesianas son simétricas ($\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\beta\alpha}$) [Born y Wolf], por lo que, referidos a sus ejes principales, dichos tensores son diagonales. Si estos ejes son los x , y y z

$$(\epsilon_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (\text{D.7})$$

En la referencia citada más arriba se estudia la propagación en medios biaxiales. Aquí se consideran *Medios uniaxiales*: aquellos en los que dos de las constantes son iguales, por ejemplo, $\epsilon_y = \epsilon_x$.

En este caso, el eje z recibe el nombre de *Eje óptico* y determina la simetría axial de las propiedades dieléctricas del medio. Todas las ondas que se propaguen en direcciones que formen un ángulo θ con respecto al eje z tendrán las mismas propiedades, lo que, sin pérdida de generalidad, permite suponer al vector \vec{N} contenido en el plano xz . Según se muestra en la figura D.1

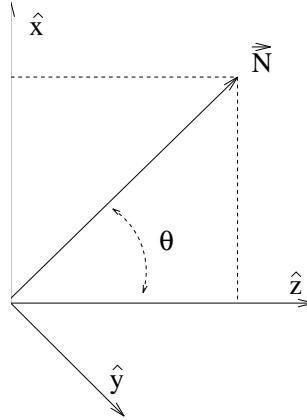


Figura D.1: Vector índice de refracción

$$\vec{N} = (N \sin \theta, 0, N \cos \theta) \quad (\text{D.8})$$

con lo que las ecuaciones D.5a se reducen a

$$(\varepsilon_{rx} - N^2 \cos^2 \theta) E_x + N^2 \sin \theta \cos \theta E_z = 0 \quad (\text{D.9a})$$

$$(\varepsilon_{rx} - N^2) E_y = 0 \quad (\text{D.9b})$$

$$N^2 \sin \theta \cos \theta E_x + (\varepsilon_{rz} - N^2 \sin^2 \theta) E_z = 0 \quad (\text{D.9c})$$

El determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones anterior puede factorizarse fácilmente con lo que, igualándolo a cero,

$$\underbrace{[\varepsilon_{rx} - N^2]}_{(a)} \underbrace{[\varepsilon_{rx} \varepsilon_{rz} - N^2 (\varepsilon_{rx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{rz} \cos^2 \theta)]}_{(b)} = 0 \quad (\text{D.10})$$

se pone de manifiesto que existen dos tipos de soluciones: el *Modo ordinario*, $(a) = 0$, y el *Modo extraordinario*, $(b) = 0$.

Modo ordinario :

El modo ordinario cumple la relación de dispersión $(a) = 0$

$$N^2 = N_o^2 = \varepsilon_{rx} \Rightarrow v = v_o = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{rx}}} \quad (\text{D.11})$$

La velocidad de fase v_o , como en los dieléctricos “ordinarios”, es independiente de la dirección de propagación. Al no cumplirse la condición $(b) = 0$, la única solución posible al sistema formado por las ecuaciones D.9a y D.9c es $E_x = E_z = 0$, por lo que

$$\vec{E} = E \hat{y} , , \quad \vec{H} = \frac{E}{v_o \mu_0} \vec{n} \wedge \hat{y} \quad (\text{D.12})$$

donde \hat{y} representa (figura D.1) al vector normal al plano que contiene a las direcciones de propagación y del eje óptico.

El modo ordinario es, por lo tanto, de tipo TEM con respecto a la dirección de propagación \vec{n} .

Modo extraordinario :

En el modo extraordinario se cumple la condición $(b) = 0$

$$N^2 = N_e^2 = \frac{\varepsilon_{rx} \varepsilon_{rz}}{(\varepsilon_{rx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{rz} \cos^2 \theta)} \Rightarrow v = v_e = v_o \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{rz}} (\varepsilon_{rx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{rz} \cos^2 \theta)} \quad (\text{D.13})$$

La velocidad de fase v_e depende en este caso de la dirección de propagación y toma el valor v_o para la *Dirección paralela* ($\theta = 0$) y el $v_o \sqrt{\varepsilon_{rx}/\varepsilon_{rz}}$ en la *Dirección perpendicular* ($\theta = \pi/2$). La figura D.2a representa al diagrama polar tridimensional de las velocidades de fase en un medio en el que $\varepsilon_{rx} = \varepsilon_{ry} < \varepsilon_{rz}$, por lo que $v_e \leq v_o$. La figura D.2b es el diagrama bidimensional correspondiente incluyendo, además, el caso $\varepsilon_{rx} = \varepsilon_{ry} > \varepsilon_{rz}$, para el cual $v_e \geq v_o$.

Como no se cumple la condición $(a) = 0$, $E_y = 0$. Por otra parte la condición $(b) = 0$ implica que las ecuaciones D.9a y D.9c son proporcionales entre sí, por lo que, dando a v el valor v_e , o haciendo $N = N_e$, cualquiera de ellas puede servir para encontrar la relación existente entre las componentes restantes de \vec{E}

$$E_z = -\frac{\varepsilon_{rx} \sin \theta}{\varepsilon_{rz} \cos \theta} E_x \quad (\text{D.14})$$

La estructura de la onda viene dada por las expresiones

$$\vec{E} = E_x \left(\hat{x} - \frac{\varepsilon_{rx} \sin \theta}{\varepsilon_{rz} \cos \theta} \hat{z} \right) , , \quad \vec{H} = H \hat{y} \quad (\text{D.15})$$

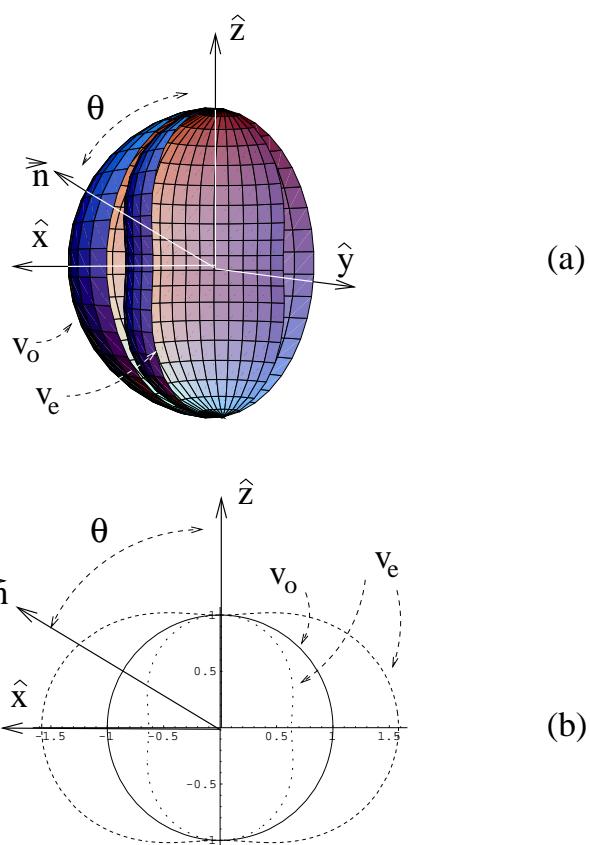


Figura D.2: Velocidades de fase ordinaria y extraordinaria

Este modo no es TEM porque el campo eléctrico tiene una componente longitudinal

$$E_n = \vec{n} \cdot \vec{E} = E_x \operatorname{sen} \theta \left(1 - \frac{\varepsilon_{rx}}{\varepsilon_{rz}} \right) \quad (\text{D.16})$$

que solo se anula cuando la onda se propaga en la dirección del eje óptico.

D.2.2. Medios girótropos

Las ferritas [Beam] y los plasmas definidos en el apéndice C [Chen] se comportan como *Medios girótropos* cuando están sometidos a un campo externo. Referido al eje determinado por este campo, el tensor dieléctrico correspondiente no es diagonal pero sí hermítico y, en consecuencia, sus valores propios son reales. Dado que éstos juegan un papel significativo respecto a los distintos modos de propagación, es conveniente encontrar sus expresiones en función de las componentes del tensor dieléctrico dadas en C.56. De la ecuación de autovalores para el tensor dieléctrico relativo

$$| \stackrel{\leftrightarrow}{\varepsilon}_r - \lambda \stackrel{\leftrightarrow}{I} | = 0 \quad (\text{D.17})$$

se deduce fácilmente que

$$\lambda_1 \equiv R = S - D, \quad \lambda_2 \equiv L = S + D, \quad \lambda_3 = P \quad (\text{D.18})$$

El sistema de ecuaciones a que se reduce la ecuación de onda es algo más complicado que para los medios uniaxiales

$$(S - N^2 \cos^2 \theta) E_x - j D E_y + N^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta E_z = 0 \quad (\text{D.19a})$$

$$j D E_x + (S - N^2) E_y = 0 \quad (\text{D.19b})$$

$$N^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta E_x + (P - N^2 \operatorname{sen}^2 \theta) E_z = 0 \quad (\text{D.19c})$$

En estos medios la descomposición en modos depende de θ por lo que solo se considerará la propagación a lo largo de las direcciones principales, la paralela y la perpendicular.

Propagación paralela ($\theta = 0$) :

Para $\theta = 0$, las ecuaciones anteriores se reducen a

$$(S - N^2) E_x - j D E_y = 0 \quad (\text{D.20a})$$

$$j D E_x + (S - N^2) E_y = 0 \quad (\text{D.20b})$$

$$P E_z = 0 \quad (\text{D.20c})$$

Igualando al determinante de los coeficientes a cero

$$\underbrace{P}_{(a)} \underbrace{(N^4 - 2 S N^2 + S^2 - D^2)}_{(b)} = 0 \Rightarrow P \underbrace{(N^2 - R)}_{(c)} \underbrace{(N^2 - L)}_{(d)} = 0 \quad (\text{D.21})$$

se encuentra que en esta dirección se pueden propagar tres modos:

- El Modo P corresponde a $(a) = 0$ y, de acuerdo con C.57, tiene una relación de dispersión

$$\omega^2 = \omega_p^2 \quad (\text{D.22})$$

en la que no aparece el número de onda β . Bajo la aproximación de plasma frio este modo corresponde a una oscilación, la *Oscilación de plasma*, que se convierte en una onda completa, propagativa, cuando se incluyen los efectos de temperatura. Como $(a) = 0$ y $(b) \neq 0$

$$\vec{E} = E \hat{z} \Rightarrow \vec{H} = 0 \quad (\text{D.23})$$

Se trata pues de una oscilación de tipo electrostático (no acompañada de campo magnético).

- El *Modo R* ("Right" → derecha) corresponde a $(c) = 0$ y el *Modo L* ("Left" → izquierda) a $(d) = 0$. Representan a modos polarizados circulares cuyos campos giran respectivamente a derechas e izquierdas alrededor del campo magnético aplicado. Sus relaciones de dispersión son¹

$$N_R^2 = R \quad , , \quad N_L^2 = L \quad (\text{D.24})$$

Sustituyendo estas relaciones en las ecuaciones D.20, se encuentra que

$$\vec{E}_R = E_{Rx} (\hat{x} - j \hat{y}) \quad , , \quad \vec{E}_L = E_{Lx} (\hat{x} + j \hat{y}) \quad (\text{D.25})$$

por lo que en ambos modos el campo eléctrico es transversal a la dirección de propagación y las amplitudes en las direcciones x e y son las mismas, como corresponde a la polarización circular. En el modo R , la primera componente (E_x) está adelantada en $\pi/2$ con respecto a la segunda con lo que el campo gira a derechas alrededor del tercer eje (el \hat{z})². Esto significa que la onda está polarizada a derechas si $\vec{n} = \hat{z}$ y a izquierdas si $\vec{n} = -\hat{z}$. de forma análoga, se encuentra que el modo L está polarizado circularmente y que sus vectores de campo giran a izquierdas alrededor del eje \hat{z} .

¹Para hallar sus expresiones en la forma $\beta = \beta(\omega)$, véase C.57 y D.2.

²Véase la sección 4.4.3.1.

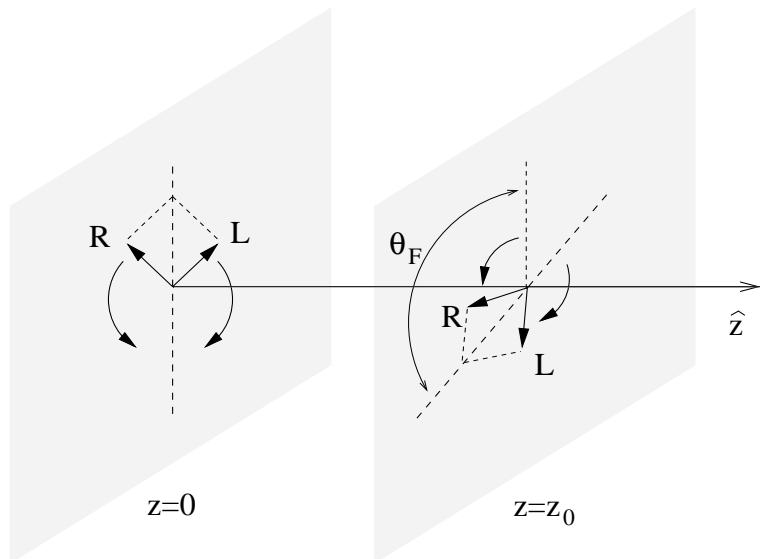


Figura D.3: Rotación de Faraday

En conjunto, estos dos últimos modos dan lugar a un interesante fenómeno, el de la *Rotación de Faraday*³. En la figura D.3 se muestra como una onda polarizada linealmente en el frente de onda $z = 0$ puede ser descompuesta en dos ondas circularmente polarizadas, de amplitud mitad, que giran respectivamente a derechas e izquierdas de la dirección \hat{z} con velocidades angulares $\pm\omega$. Dado que los dos modos circulares tienen velocidades de fase distintas, v_R y v_L , puede demostrarse que en $z = z_0$ se superponen dando lugar a una polarización lineal cuyo plano está rotado con respecto al inicial en un ángulo θ_F proporcional a z_0 .

Propagación perpendicular ($\theta = \pi/2$) :

Para ($\theta = \pi/2$), las ecuaciones anteriores se reducen a

$$S E_x - j D E_y = 0 \quad (\text{D.26a})$$

$$j D E_x + (S - N^2) E_y = 0 \quad (\text{D.26b})$$

$$(P - N^2) E_z = 0 \quad (\text{D.26c})$$

Igualando al determinante de los coeficientes a cero

$$\underbrace{(S^2 - S N^2 - D^2)}_{(b)} \underbrace{(P - N^2)}_{(a)} = 0 \quad (\text{D.27})$$

³Problema d-1.

se obtienen dos modos de propagación cuyas relaciones de dispersión son:

$$N_X^2 = \frac{R L}{S} , , N_O^2 = P \quad (\text{D.28})$$

El primero es el *Modo X* (extraordinario) y el segundo el *Modo O* (ordinario). Ambos tienen una estructura análoga a la de los modos ordinario y extraordinario en los medios uniaxiales. El modo ordinario, de tipo TEM, y el P, longitudinal (véase la sección 4.3), son los que tienen lugar en un plasma sin magnetizar. El que se den también en los plasmas magnetizados se debe a que están polarizados en la dirección del campo magnético aplicado y a que, en la aproximación lineal y no relativista que se hace de la respuesta del plasma, se desprecia la fuerza asociada al campo magnético de la onda. De acuerdo con ésto, la fuerza eléctrica mueve al fluido de carga a lo largo del campo magnético aplicado por lo que este último no actúa sobre su trayectoria.

A diferencia de lo que ocurre en un medio uniaxial no dispersivo, el plasma es netamente dispersivo. Así, para el modo ordinario, según C.57 y D.2,

$$N_O^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \Rightarrow \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 \beta^2 \quad (\text{D.29})$$

Este tipo de relación de dispersión cuadrática se da también en las guías de onda. En la figura D.4 se muestra a las relaciones de dispersión del plasma y del vacío y se interpreta geométricamente a las velocidades de fase y de grupo. Como puede verse, la velocidad de fase es superior a la del vacío, $v_f \geq c$, mientras que la de grupo es inferior a la misma, $v_g \leq c$.

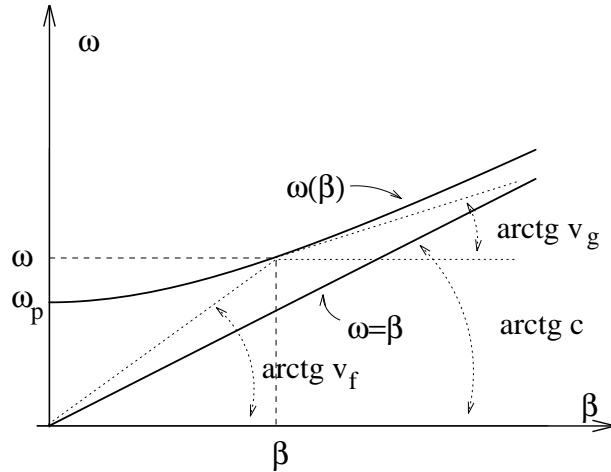


Figura D.4: Relación de dispersión del modo O

Derivando en D.29 se tiene la relación entre estas velocidades

$$v_f v_g = c^2 \quad (\text{D.30})$$

La frecuencia de plasma ω_p aparece aquí como una *Frecuencia de corte*, para la que

$$v_f \rightarrow \infty , , v_g \rightarrow 0 , , \beta \rightarrow 0 , , \lambda \rightarrow \infty \quad (\text{D.31})$$

Por debajo de ω_p , $\beta \equiv -j\kappa$ es imaginario puro (κ es real) y no hay propagación

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\kappa z} e^{j\omega t} \Rightarrow \vec{E} = \text{Re}[\vec{E}] = \vec{E}_0 e^{-\kappa z} \cos(\omega t) \quad (\text{D.32})$$

donde se ha tomado \vec{E}_0 como real.

Justo por encima del corte, las velocidades cambian rápidamente con la frecuencia y el plasma se muestra muy dispersivo. Para $\omega \gg \omega_p$ ambas velocidades tienden a c y las ondas se propagan como a través del vacío; la frecuencia es tan elevada que la inercia de los electrones impide que éstos respondan apreciablemente al campo electromagnético.

D.3. Reflexión y refracción

En esta sección se aplicarán las condiciones de contorno 3.34 y 3.35 a las ondas planas monocromáticas en una superficie plana de separación entre dos medios y se deducirán las consecuencias más significativas. Aunque el modelo de superficie sea plano indefinido, los resultados son aplicables localmente, de forma aproximada, a aquellas superficies cuyos radios de curvatura sean muy superiores a la longitud de la onda λ . En primer lugar se deducen las leyes de Snell, seguidamente las de Fresnel y, por último, se analizan algunos casos que serán de utilidad más adelante.

D.3.1. Leyes de Snell

Las leyes de Snell relacionan a las direcciones de propagación de las ondas a ambos lados de la superficie de separación entre dos medios, el (1), de constante de propagación γ_1 , y el (2), de constante de propagación γ_2 . En la figura D.5 se sitúa a dicha superficie en el plano $z = 0$ y se supone que sobre la misma incide, desde el primer medio, una onda plana monocromática que, sin pérdida de generalidad, tiene al vector unitario de onda contenido en el plano xz .

$$\vec{n}_i = (\sin \theta_i, 0, \cos \theta_i) \quad (\text{D.33})$$

Para cumplir las condiciones de frontera se supone que, además de la onda incidente, se generan otras dos, la reflejada, en el medio (1) con dirección \vec{n}_r , y la refractada o transmitida, en el medio (2) con dirección \vec{n}_t .

Las componentes de los campos incidente, reflejado y transmitido tienen la forma genérica

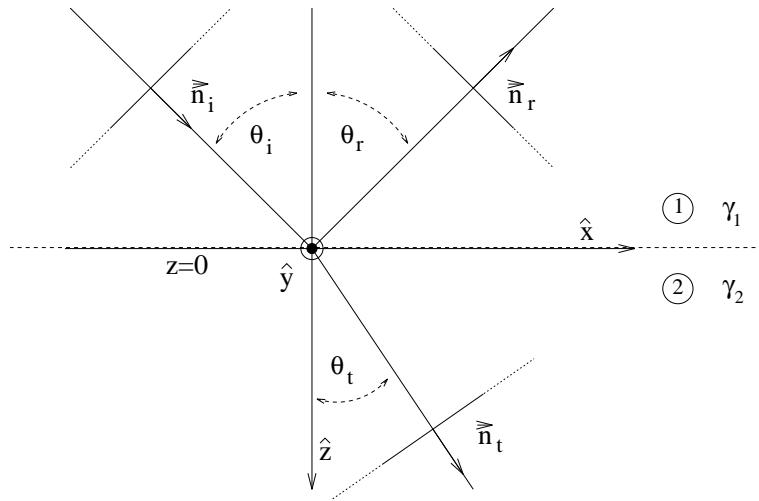


Figura D.5: Leyes de Snell

$$\Phi^i = \Phi_0^i e^{-\gamma_1 \vec{n}_i \cdot \vec{r}} e^{j\omega_i t} \quad (\text{D.34a})$$

$$\Phi^r = \Phi_0^r e^{-\gamma_1 \vec{n}_r \cdot \vec{r}} e^{j\omega_r t} \quad (\text{D.34b})$$

$$\Phi^t = \Phi_0^t e^{-\gamma_2 \vec{n}_t \cdot \vec{r}} e^{j\omega_t t} \quad (\text{D.34c})$$

donde $\gamma_i = \gamma_r = \gamma_1$, porque las ondas incidente y reflejada se propagan por el medio (1), y $\gamma_t = \gamma_2$ dado que la transmitida lo hace a través del segundo medio.

En principio no se hacen hipótesis acerca de los valores que deben tomar las frecuencias o las direcciones de propagación de las ondas reflejadas y transmitidas. Aunque los vectores \vec{n} serán reales en muchos de los casos prácticos, para cubrir en general las condiciones de frontera deberán considerarse como complejos.

Puesto que las ecuaciones de continuidad deben cumplirse en la superficie $z = 0$ para cualquier valor de las variables independientes x , y y t y las funciones exponenciales con distinto argumento son independientes

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \equiv \omega \quad (\text{D.35a})$$

$$\underbrace{\gamma_1 (\vec{n}_i \cdot \vec{r})_{z=0}}_{(a)} = \underbrace{\gamma_1 (\vec{n}_r \cdot \vec{r})_{z=0}}_{(b)} = \underbrace{\gamma_2 (\vec{n}_t \cdot \vec{r})_{z=0}}_{(c)} \quad (\text{D.35b})$$

En la primera expresión se pone de manifiesto que la frecuencia de las ondas no se ve modificada por la reflexión y la refracción sobre una interfaz estática (una en movimiento daría lugar al efecto Doppler). La segunda ecuación, de acuerdo con D.33, puede escribirse de la forma

$$\underbrace{\gamma_1 x \operatorname{sen} \theta_i}_{(a)} = \underbrace{\gamma_1 (n_x^r x + n_y^r y)}_{(b)} = \underbrace{\gamma_2 ((n_x^t x + n_y^t y)}_{(c)}$$

De las ecuaciones $(a) = (b)$ y $(a) = (c)$ se deduce que $n_y^r = n_y^t = 0$. Luego los tres vectores de propagación se encuentran en el mismo plano, el *Plano de incidencia*, que es perpendicular al plano de la interfaz y contiene al vector de onda incidente. Por otra parte, de la primera de estas ecuaciones se deduce la *Ley de Snell de la reflexión*

$$\operatorname{sen} \theta_i = \operatorname{sen} \theta_r \Rightarrow \theta_i = \theta_r \equiv \theta_1 \quad (\text{D.36})$$

con lo que los vectores unitarios de propagación pueden escribirse de la forma

$$\vec{n}_i = (\operatorname{sen} \theta_1, 0, \cos \theta_1) , , \vec{n}_r = (\operatorname{sen} \theta_1, 0, -\cos \theta_1) , , \vec{n}_t = (\operatorname{sen} \theta_2, 0, \cos \theta_2) \quad (\text{D.37})$$

donde se ha escrito $\theta_t \equiv \theta_2$.

De la ecuación $(a) = (c)$ se deduce la *Ley de Snell de la refracción*

$$\gamma_1 \operatorname{sen} \theta_1 = \gamma_2 \operatorname{sen} \theta_2 \quad (\text{D.38})$$

La validez de esta ley se extiende, no solo a constantes de propagación complejas, sino también a vectores y ángulos de propagación complejos⁴. Como se verá más adelante, esto implica que, incluso cuando el ángulo de incidencia es real, la onda transmitida es en general una *Onda plana no homogénea*.

D.3.2. Leyes de Fresnel

Las leyes de Fresnel relacionan a las amplitudes de los campos reflejados y transmitidos con la de los incidentes. Aunque las ondas planas monocromáticas son TEM con respecto a la dirección de propagación, pueden clasificarse, de acuerdo con lo tratado en 4.3, como TE y TM con respecto a la dirección normal a la superficie de separación (también suelen anotarse como TEz y TMz). De acuerdo con 4.15, las soluciones solenoidales, transversal y no transversal, son $\vec{X}_t = B \nabla \wedge (\vec{e} \Psi)$ y $\vec{X}_{nt} = C \nabla \wedge \vec{X}_t$. Tomando $\vec{e} = \hat{z}$ y $\nabla \rightarrow -\gamma \vec{n}$

$$\vec{X}_t \sim \vec{n} \wedge \hat{z} , , \vec{X}_{nt} \sim \vec{n} \wedge \vec{X}_t \quad (\text{D.39})$$

⁴Tomando a las identidades de Euler como definiciones del seno y del coseno, $\operatorname{sen} \theta \equiv (1/2j)(\exp[j\theta] - \exp[-j\theta])$, θ puede tomar valores reales (funciones trigonométricas ordinarias), imaginarios (funciones hiperbólicas) o complejas.

De esta forma, el modo TE tiene a su campo eléctrico orientado perpendicularmente al plano de incidencia, en la dirección $\vec{n} \wedge \hat{z}$, por lo que suele denominarse "modo perpendicular (\perp)", mientras que el campo magnético asociado está contenido en dicho plano. Análogamente, el campo eléctrico del modo TM es paralelo al plano de incidencia, recibiendo también el nombre de "modo paralelo (\parallel)", y el magnético es perpendicular al mismo.

En ambos casos se tomará un convenio para la referencia positiva del campo eléctrico, de forma que sea la misma para las tres ondas cuando la incidencia es normal ($\theta_1 = 0$).

- En el caso de los modos TE, el campo eléctrico se toma como positivo si su dirección coincide con la del eje \hat{y} , según puede verse en la figura D.6.

- En el de los modos TM, los campos eléctricos, cuando son positivos, están orientados de forma que su componente $E_x > 0$, de acuerdo con la figura D.7.

- La referencia positiva del campo magnético se obtiene, a partir de la del eléctrico y de la dirección de propagación, por medio de la relación de estructura de las ondas planas 4.97b.

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{Z} \vec{n} \wedge \vec{E}_0 \quad (\text{D.40})$$

Modos TE (\perp)⁵ :

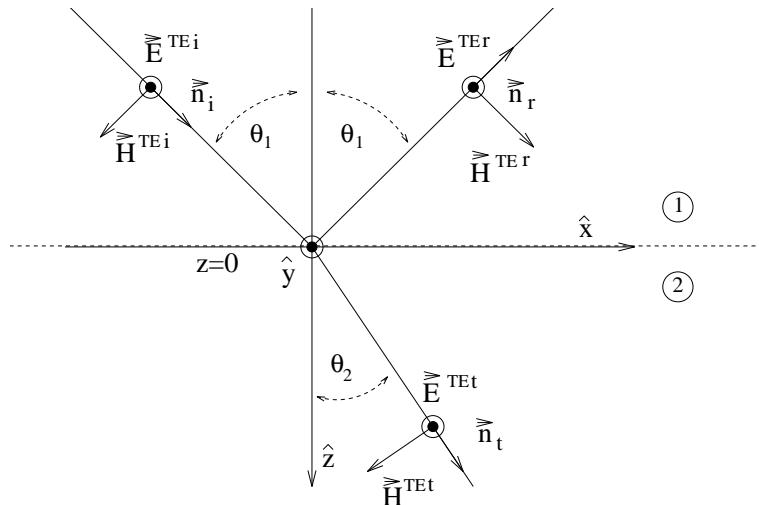


Figura D.6: Modos TE

Las relaciones entre las amplitudes de los campos eléctricos reflejado y transmitido con la del incidente, se deducen de la exigencia de continuidad para las componentes tangenciales totales de

⁵La notación \perp corresponde a la denominación *perpendicular* (al plano de incidencia), con la que también se conce a este tipo de modos.

los campos en la superficie $z = 0$ ⁶. Si el campo incidente tiene una amplitud $\vec{E}_0^i = E_0^i \hat{y}$, haciendo uso de D.40 y D.37,

$$E_0^i + E_0^r = E_0^t \quad (\text{D.41a})$$

$$\frac{1}{Z_1} (E_0^i - E_0^r) \cos \theta_1 = \frac{1}{Z_2} E_0^t \cos \theta_2 \quad (\text{D.41b})$$

Despejando se obtiene el *Coeficiente de reflexión TE* (ρ^{TE}) y el *Coeficiente de transmisión TE* (τ^{TE}), para el campo eléctrico, definidos de la forma

$$\rho^{TE} \equiv \left(\frac{E_0^r}{E_0^i} \right)_{TE} = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \quad (\text{D.42a})$$

$$\tau^{TE} \equiv \left(\frac{E_0^t}{E_0^i} \right)_{TE} = \frac{2 Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \quad (\text{D.42b})$$

Modos TM (||)⁷:

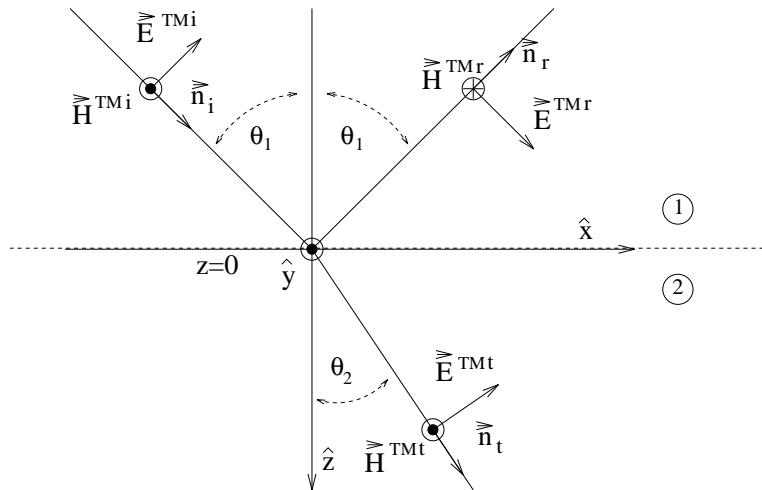


Figura D.7: Modos TM

⁶Es fácil de demostrar que la condición de continuidad de la componente normal de \vec{B} coincide con la de la tangencial de \vec{E} . Véase el problema d-7

⁷La notación || corresponde a la denominación *paralelo* (al plano de incidencia), con la que también se conce a este tipo de modos.

El *Coeficiente de reflexión TM* (ρ^{TM}) y el *Coeficiente de transmisión TM* (τ^{TM}), para el campo eléctrico, se obtienen por el mismo procedimiento que para los TE. Las condiciones de continuidad son⁸

$$(E_0^i + E_0^r) \cos \theta_1 = E_0^t \cos \theta_2 \quad (\text{D.43a})$$

$$\frac{1}{Z_1} (E_0^i - E_0^r) = \frac{1}{Z_2} E_0^t \quad (\text{D.43b})$$

y los coeficientes

$$\rho^{TM} \equiv \left(\frac{E_0^r}{E_0^i} \right)_{TM} = \frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1} \quad (\text{D.44a})$$

$$\tau^{TM} \equiv \left(\frac{E_0^t}{E_0^i} \right)_{TM} = \frac{2 Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1} \quad (\text{D.44b})$$

D.3.3. Incidencia sobre un buen conductor. Resistencia superficial

Un caso de considerable interés práctico es el de la incidencia de ondas planas monocromáticas sobre la superficie de un buen conductor. Para simplificar, se supone que el primer medio es el vacío y el segundo un medio no magnético ($\mu \simeq \mu_0$) de tipo metálico $\epsilon \simeq \epsilon_0$. De acuerdo con estas premisas, las constantes de propagación son, según 4.120,

$$\gamma_1 = jk \quad , \quad \gamma_2 \simeq \alpha(1+j) \quad , \quad \alpha \simeq \frac{k}{\sqrt{2Q}} = \frac{k}{2x} \quad , \quad x = \sqrt{\frac{Q}{2}} \ll 1 \quad (\text{D.45})$$

Sustituyendo en la ley de refracción, dado que $x \ll 1$,

$$\operatorname{sen} \theta_2 = x(1+j) \operatorname{sen} \theta_1 \simeq 0 \Rightarrow \cos \theta_2 = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta_2} \simeq 1 \Rightarrow \begin{cases} \theta_2 \simeq 0 \\ \vec{n}_t \simeq \hat{z} \end{cases} \quad (\text{D.46})$$

se encuentra que la onda penetra aproximadamente en la dirección normal, cualquiera que sea la polarización y dirección de la onda incidente. La onda es aproximadamente homogénea y los campos tienen la forma

$$\vec{E}^t = \vec{E}_0^t e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \alpha z)} \quad , \quad \vec{H}^t = \vec{H}_0^t e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \alpha z)} \quad (\text{D.47})$$

⁸En este caso, la componente D_z es discontinua, compensándose dicha discontinuidad con la presencia de una densidad superficial de carga.

Dado que estas ondas cumplen la relación de estructura de las ondas planas, \vec{E}^t y \vec{H}^t son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación \hat{z} . En la superficie, los campos transmitidos \vec{E}_0^t y \vec{H}_0^t son tangenciales a la misma y, por continuidad, son iguales a las componentes tangenciales \vec{E}_{T0} y \vec{H}_{T0} de los campos totales (incidentes más reflejados) en el primer medio.

$$\vec{E}_0^t = \vec{E}_{T0}, \quad \vec{H}_0^t = \vec{H}_{T0}$$

Como consecuencia, véase la figura D.8, la componente normal del vector de Poynting

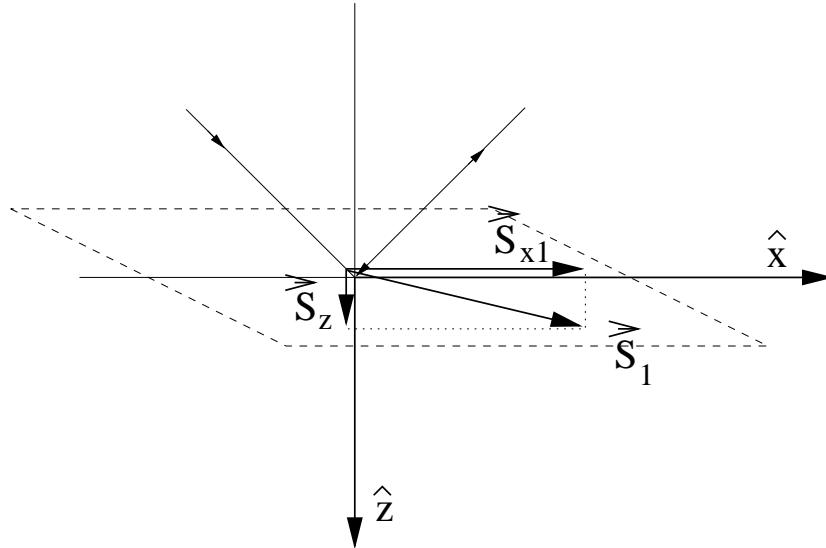


Figura D.8: Resistencia superficial

$$\vec{S}_z^c = \vec{E}_{T0} \wedge \vec{H}_{T0}^* = \vec{E}_0^t \wedge \vec{H}_0^{t*} = Z_2 |\vec{H}_0^t|^2 \hat{z} = Z_2 |\vec{H}_{T0}|^2 \hat{z} \quad (\text{D.48})$$

es continua. Representa a la potencia suministrada al conductor, por unidad de superficie, y disipada por el mismo. Efectivamente, su valor medio es

$$\langle \frac{dP_d}{ds} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{S}_z^c \cdot \hat{z}] = \frac{1}{2} |\vec{H}_{T0}|^2 \operatorname{Re}[Z_2] = \frac{1}{2} R_s |\vec{H}_{T0}|^2 \quad (\text{D.49})$$

donde se ha definido a la *Resistencia superficial* del conductor

$$R_s \equiv \frac{2 \langle dP_d/ds \rangle}{|\vec{H}_{T0}|^2} = \operatorname{Re}[Z_2] = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}} \quad (\text{D.50})$$

En función de este parámetro puede calcularse la potencia media disipada por una pared buena conductora si se conoce el campo magnético tangencial $|H_{T0}|$ justo en el exterior de la misma

$$\langle P_d \rangle = \frac{1}{2} R_s \int_S |\vec{H}_{T0}|^2 ds \quad (\text{D.51})$$

Este resultado es de gran utilidad para la determinación de las pérdidas y la atenuación en guías y cavidades metálicas. Aunque el problema se ha resuelto suponiendo que la superficie del conductor es plana, puede demostrarse que la expresión anterior es aplicable a superficies con radios de curvatura muy superiores a la longitud de onda en el conductor o, lo que es equivalente, a su profundidad pelicular δ .

D.3.4. Reflexión total. Ondas superficiales

Para que \vec{n}_t tenga carácter complejo no es necesario que las constantes de propagación de los medios sean complejas. Si ambos medios son dieléctricos ideales y el segundo es menos denso que el primero ($\mu_2 \epsilon_2 < \mu_1 \epsilon_1$), existen condiciones bajo las cuales la onda incidente es totalmente reflejada a pesar de que en el segundo medio existe una onda transmitida superficial. Más adelante se verá como este efecto constituye el fundamento de la propagación en las guías dieléctricas y las fibras ópticas.

$$\sin \theta_1 = N \sin \theta_2 \quad , \quad N = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}} < 1 \quad (\text{D.52})$$

luego existe un *Angulo crítico*

$$\theta_c = \arcsin N < \frac{1}{2} \pi \quad \Rightarrow \quad (\theta_2)_{\theta_1=\theta_c} = \frac{1}{2} \pi \quad (\text{D.53})$$

tal que para $\theta_1 > \theta_c$ toda la energía incidente es reflejada; a este fenómeno se le conoce por el nombre de *Reflexión total*. Se verá que, a pesar de ésto, existe una *Onda no homogénea* transmitida cuyas componentes responden a la expresión general

$$\Phi^t = \Phi_0^t e^{j(\omega t - \beta_2 \vec{n}_t \cdot \vec{r})} = \Phi_0^t e^{j(\omega t - \beta_2 \sin \theta_2 x - \beta_2 \cos \theta_2 z)}$$

De acuerdo con D.52,

$$\beta_2 \sin \theta_2 = \frac{\beta_2}{N} \sin \theta_1 \equiv \beta_x = \text{real}$$

y, si el ángulo de incidencia es superior al crítico, $\sin \theta_2 > 1$ y

$$\beta_2 \cos \theta_2 = \pm j \beta_2 \sqrt{\sin^2 \theta_2 - 1} = \pm j \frac{\beta_2}{N} \sqrt{\sin^2 \theta_1 - N^2} \equiv -j \kappa_z \quad , \quad \kappa_z = \text{real}$$

Si se quiere que las soluciones sean acotadas en $z \rightarrow \infty$, es necesario elegir $\kappa_z > 0$, con lo que el campo transmitido

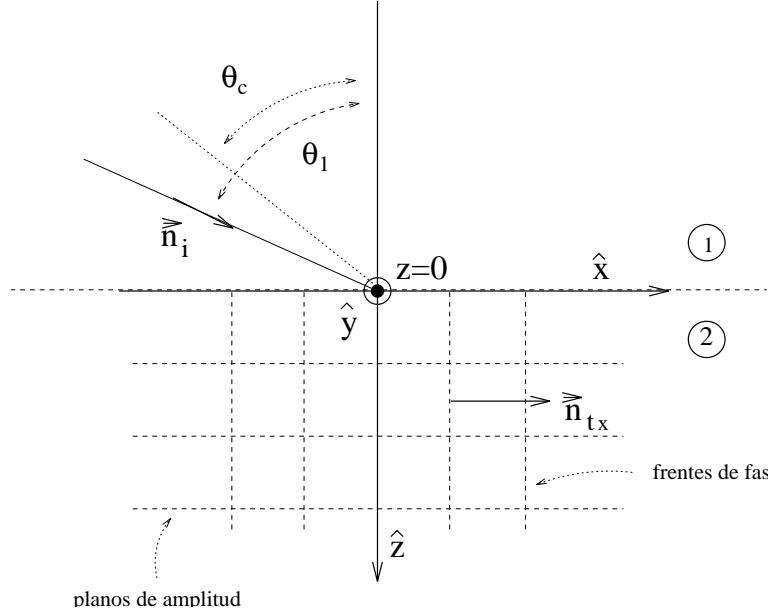


Figura D.9: Reflexión total

$$\Phi^t = \Phi_0^t e^{-\kappa_z z} e^{j(\omega t - \beta_x x)} \quad (\text{D.54})$$

tiene estructura de *Onda superficial*. Este tipo de ondas está confinada (factor $e^{-\kappa_z z}$) al entorno de una superficie y se propaga en dirección tangencial a la misma. Como se representa en la figura D.9, los planos de igual amplitud $z = cte$ no coinciden con los de igual fase $x = cte$. Para un análisis más detallado de las ondas superficiales, véase también la relación de problemas y la sección E.1.7

D.3.5. Reflexión normal. Ondas estacionarias

La incidencia normal puede deducirse, como límite para cualquiera de las dos polarizaciones, haciendo $\theta_1 = 0$. La figura D.10 toma como punto de partida a la D.7. Los coeficientes de reflexión y transmisión vienen dados por

$$\rho^N \equiv \left(\frac{E_0^r}{E_0^i} \right)_N = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} , \quad \tau^N \equiv \left(\frac{E_0^t}{E_0^i} \right)_N = \frac{2 Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad (\text{D.55})$$

Los campos en el primer medio son

$$E_1 = (E_0^i e^{-\gamma_1 z} + E_0^r e^{\gamma_1 z}) e^{j\omega t} = E_0^i (e^{-\gamma_1 z} + \rho^N e^{\gamma_1 z}) e^{j\omega t} \quad (\text{D.56a})$$

$$H_1 = \frac{1}{Z_1} (E_0^i e^{-\gamma_1 z} - E_0^r e^{\gamma_1 z}) e^{j\omega t} = \frac{E_0^i}{Z_1} (e^{-\gamma_1 z} - \rho^N e^{\gamma_1 z}) e^{j\omega t} \quad (\text{D.56b})$$

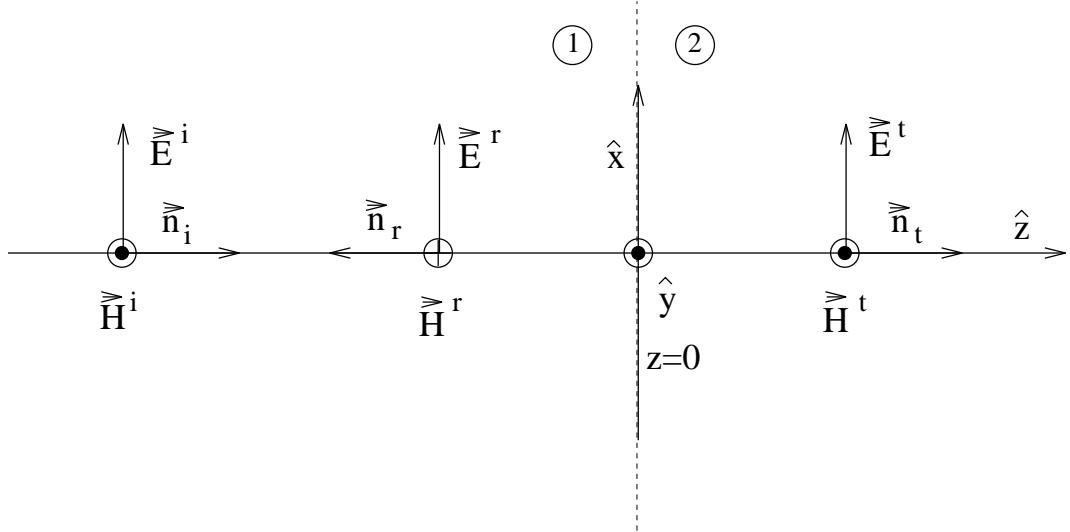


Figura D.10: Incidencia normal

expresiones que son análogas a las que se encontrarán más adelante para los modos únicos de las guías de onda y que muestran como en dicho medio se superponen dos modos independientes, el incidente y el reflejado.

Si los medios son no disipativos, como los dieléctricos ideales, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, z , ρ^N y τ^N son reales y puede descomponerse a los campos anteriores en la suma de una *Onda estacionaria* (a) y otra *Onda viajera* (b)

$$E_1 = \underbrace{\rho^N E_0^i (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z}) e^{j\omega t}}_{(a)} + \underbrace{(1 - \rho^N) E_0^i e^{-j\beta_1 z} e^{j\omega t}}_{(b)} \quad (\text{D.57a})$$

$$H_1 = \underbrace{\frac{\rho^N E_0^i}{Z_1} (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) e^{j\omega t}}_{(a)} + \underbrace{(1 - \rho^N) \frac{E_0^i}{Z_1} e^{-j\beta_1 z} e^{j\omega t}}_{(b)} \quad (\text{D.57b})$$

Cuando el coeficiente de reflexión es tal que $|\rho^N| = 1$, la onda resultante es una *Onda estacionaria pura*, compuesta por dos ondas de igual amplitud que viajan en sentido contrario una de otra. Si el medio (2) es un conductor ideal, su impedancia es nula, $\rho^N = -1$ y el campo real resultante es

$$E_e = \operatorname{Re}[E_1] = \operatorname{Re} \left[E_0^i (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) e^{j\omega t} \right] = 2 E_0^i \operatorname{sen}(\beta_1 z) \operatorname{sen}(\omega t) \quad (\text{D.58a})$$

$$H_e = \operatorname{Re}[H_1] = \operatorname{Re} \left[\frac{E_0^i}{Z_1} (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z}) e^{j\omega t} \right] = 2 \frac{E_0^i}{Z_1} \operatorname{cos}(\beta_1 z) \operatorname{cos}(\omega t) \quad (\text{D.58b})$$

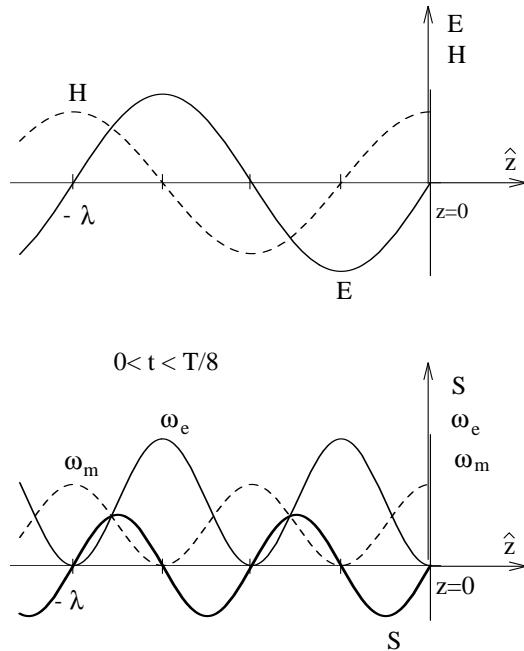


Figura D.11: Onda estacionaria

donde Z_1 es real y se supone que E_0^i también lo es.

Como puede verse en la figura D.11a, los campos oscilan temporalmente sin propagarse; sus nodos y sus vientos ocupan posiciones fijas separadas por una distancia $\lambda/2$. Puesto que el segundo medio es un conductor ideal y el campo es tangencial, este último se anula en $z = 0$. El campo magnético, sin embargo, es máximo en dicha posición, el doble del de la onda incidente. Dado que $E \sim \sin \omega t$ y $H \sim \cos \omega t$, cuando $t = 0, nT/2$, el campo en el medio es solo magnético y, cuando $t = (n + \frac{1}{2})T/2$ el campo es solo eléctrico.

De la condición de frontera para la componente tangencial de \vec{H} 3.35b se deduce que por la superficie del conductor circula una corriente

$$\vec{j} = 2 \frac{E_0^i}{Z_1} \cos \omega t \hat{x} \quad (\text{D.59})$$

por medio de la cual se genera la onda reflejada.

En cuanto a las densidades de energía eléctrica y magnética

$$\omega_e = 2 \varepsilon (E_0^i)^2 \sin^2(\beta_1 z) \sin^2(\omega t) \quad (\text{D.60a})$$

$$\omega_m = 2 \mu \left(\frac{E_0^i}{Z_1} \right)^2 \cos^2(\beta_1 z) \cos^2(\omega t) \quad (\text{D.60b})$$

ambas se alternan espacial y temporalmente con una periodicidad $\lambda/2$ y $T/2$, respectivamente, que, como se muestra en la figura D.11b, es la mitad de la de los campos. En la misma figura puede verse que el vector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{(E_0^i)^2}{Z_1} \operatorname{sen}(2\beta_1 z) \operatorname{sen}(2\omega t) \hat{z} \quad (\text{D.61})$$

tiene la misma periodicidad que las densidades de energía pero su media temporal es nula, lo que concuerda con el hecho de que un conductor ideal no admite ni campos ni energía ($\vec{S}(z=0)=0$). Este vector describe la redistribución periódica de la energía asociada a una onda estacionaria: en $t=0, nT/2$ la energía es de tipo magnético y está almacenada alrededor de los vientos de campo magnético y en $t=(n+\frac{1}{2})T/2$ esta energía a pasado a ser de tipo eléctrico y a estar concentrada alrededor de los vientos de campo eléctrico.

D.4. Problemas

d-1. Hallar la ley de Rotación de Faraday del plano de polarización de una onda plana, linealmente polarizada, que se propaga a lo largo de la dirección \hat{z} del campo magnético principal \vec{B}_0 de un plasma frio y poco denso. Supóngase que el vector eléctrico está polarizado en la dirección x en el plano $z=0$ y que los números de onda de los modos R y L son k_R y k_L .

SOLUCION :

Supóngase que la onda, de acuerdo con la figura D.12-a, Alcanza su amplitud máxima A en $t=0$ de forma que

$$\vec{E}(0, t) = A e^{j\omega t} \hat{x}$$

Esta onda linealmente polarizada puede descomponerse en otras dos con polarización circular cuyos planos de polarización giran, a derechas e izquierdas respectivamente, alrededor del campo magnético. Efectivamente

$$\vec{E}(0, t) = \underbrace{\frac{A}{2} \left\{ e^{j\omega t} \hat{x} + e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \hat{y} \right\}}_{(R)} + \underbrace{\frac{A}{2} \left\{ e^{j\omega t} \hat{x} + e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} \hat{y} \right\}}_{(L)}$$

porque $e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} = -e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} = j e^{j\omega t}$ y la componente total en la dirección y es nula.

(R) corresponde a una onda con polarización a derechas dado que, de acuerdo con la sección 4.4.3.1, puede tomarse $\hat{x} = \hat{e}_1$, $\hat{y} = \hat{e}_2$, $\hat{z} = \hat{e}_3$ y X_1 está adelantada en $\frac{\pi}{2}$ con respecto a X_2 . Por razones análogas, (L) corresponde a una onda polarizada a izquierdas.

De acuerdo con el enunciado, cada uno de estos modos circulares se propaga con distinto número de onda, k_R y k_L o, lo que es lo mismo, con distintas velocidades de

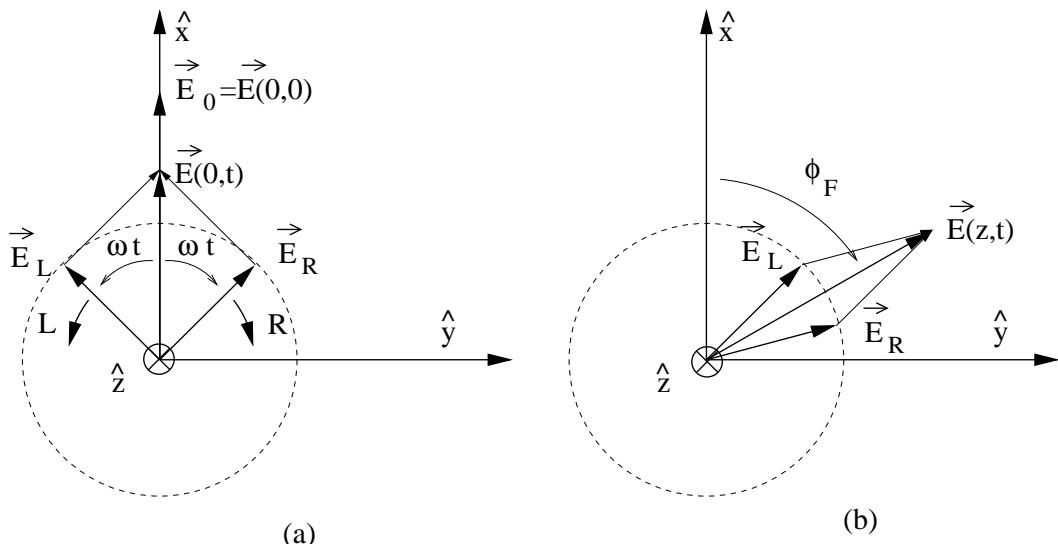


Figura D.12:

fase $v_R = \frac{\omega}{k_R}$ y $v_L = \frac{\omega}{k_L}$, por lo que para $z \neq 0$ el argumento ωt debe ser substituido por $\omega t - k z$

$$\vec{E}(z, t) = \frac{A}{2} \hat{x} (e^{j\alpha_R} + e^{j\alpha_L}) + \frac{A}{2} \hat{y} (j e^{-j\alpha_R} + j e^{j\alpha_L}) \quad , \quad \begin{cases} \alpha_R = \omega t - k_R z \\ \alpha_L = \omega t - k_L z \end{cases}$$

Pasando al campo real

$$\vec{E}(z, t) = Re[\vec{E}(z, t)] = \frac{A}{2} \hat{x} (\cos \alpha_R + \cos \alpha_L) + \frac{A}{2} \hat{y} (\sin \alpha_R - \sin \alpha_L)$$

El ángulo que $\vec{E}(z, t)$ forma con el eje x será, véase la figura D.12-b,

$$\begin{aligned} \phi_F &= \arctg \left(\frac{E_y}{E_x} \right) = \arctg \left(\frac{\sin \alpha_R - \sin \alpha_L}{\cos \alpha_R + \cos \alpha_L} \right) = \arctg \left[\tg \left(\frac{\alpha_R - \alpha_L}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_R - \alpha_L) = \frac{1}{2} (k_L - k_R) z = C_F z \end{aligned}$$

Se llega a la conclusión de que el ángulo girado, el de rotación de Faraday Φ_F , es independiente del tiempo y proporcional a la distancia z recorrida. La onda sigue estando linealmente polarizada pero con el ángulo de polarización rotado con respecto al que tenía en el origen.

- d-2. Un espejo que se aleja del observador con velocidad $\vec{V} = V \hat{x}$ y está colocado perpendicularmente al eje x , refleja a una onda plana monocromática que incide normalmente sobre el mismo. ¿ Que frecuencia y que vector de Poynting reflejados se miden en el laboratorio?

SOLUCION :

Como se muestra en la figura D.13, la onda incide sobre el espejo en movimiento con $n_{xi} = n'_{xi} = 1$ y se refleja con $n_{xr} = n'_{xr} = -1$. Puesto que las leyes de reflexión estudiadas son aplicables a espejos en reposo, es necesario transformar la frecuencia y la amplitud de la onda incidente al sistema propio del espejo \mathcal{S}' .

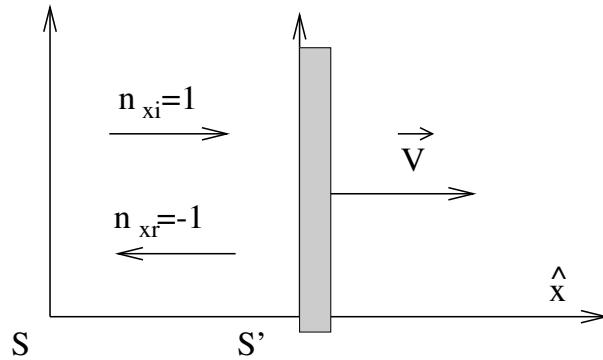


Figura D.13:

$$\omega'_i = \omega_i \gamma (1 - \beta n_{xi}) = \omega_i \gamma (1 - \beta)$$

La reflexión sobre un espejo estático no modifica la frecuencia, luego $\omega'_i = \omega'_r$, por lo que hallando la transformada inversa de esta última

$$\omega_r = \omega'_r \gamma (1 + \beta n'_{xr}) = \omega_i \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

El módulo del vector de Pointyng es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda y esta se transforma como la frecuencia, luego

$$\mathcal{S}_r = \mathcal{S}_i \frac{(1 - \beta)^2}{(1 + \beta)^2}$$

- d-3. En el espacio vacío existente entre dos planos conductores perfectos, situados en $x = 0$, a respectivamente, se propagan ondas planas monocromáticas en la dirección perpendicular a los planos mencionados y con polarización en la dirección \hat{y} .

- Demostrar que existen soluciones compatibles con las condiciones de contorno del problema consistentes en una superposición de ondas estacionarias.
- Hallar, como superposición de ondas estacionarias, el campo electromagnético $\vec{E}(x, t)$ compatible con la condición inicial

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, t = 0) &= E_0 x \hat{y} && \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{2}a \\ \vec{E}(x, t = 0) &= E_0 (2 - x) \hat{y} && \text{para } \frac{1}{2}a \leq x \leq a \\ \vec{H}(x, t = 0) &= 0\end{aligned}$$

Empléese el desarrollo en serie de Fourier y tómese $E_0 = 1$, $a = 2$.

SOLUCION :

(a) - Debido a la reflexión en las paredes, el campo total es la superposición de ondas que viajan en sentidos opuestos. Haciendo uso de la expresión compleja ⁹, el campo eléctrico tiene la siguiente forma

$$\vec{E} = \hat{y} \left(A e^{-jkx} + B e^{jkx} \right) e^{j\omega t}$$

A y B son constantes complejas, en principio arbitrarias, y $k = \frac{\omega}{c}$ porque el medio en que se propagan las ondas es el vacío.

El campo magnético asociado a cada una de estas dos ondas viene dado por las relaciones de estructura correspondientes

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{Z_0} \vec{n} \wedge \vec{E} \quad , \quad \vec{n} = \pm \hat{x} \Rightarrow \\ \vec{H} &= \frac{1}{Z_0} \hat{z} \left(A e^{-jkx} - B e^{jkx} \right) e^{j\omega t}\end{aligned}$$

Estos campos deben de ser compatibles con las condiciones de contorno del problema. Dado que las paredes son conductoras ideales y que el campo eléctrico es tangencial a las mismas, $E(x = 0, a) = 0$

$$x = 0 \rightarrow B = -A$$

$$x = a \rightarrow A \left(e^{jka} - e^{-jka} \right) = 0 \Rightarrow e^{j2ka} = 1 \Rightarrow k_n = n \frac{\pi}{a} \quad , \quad n = 0, 1 \dots$$

Efectivamente, esta condición implica que solo una serie discreta de valores k_n del número de onda, así como de la frecuencia ω_n y de la longitud de onda λ_n , son posibles. Las ondas no monocromáticas que son compatibles con estas condiciones de contorno deberán, en consecuencia, poseer un espectro discreto de frecuencias. En concreto

$$k_n = n \frac{\pi}{a} \quad , \quad \omega_n = k_n c = n \frac{\pi c}{a} \quad , \quad \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{1}{n} 2a$$

Los campos correspondientes a cada una de estas frecuencias son

$$E_n = -2j A_n \operatorname{sen}(k_n x) e^{j\omega_n t}$$

$$H_n = \frac{2 A_n}{Z_0} \cos(k_n x) e^{j\omega_n t}$$

Escribiendo $A_n \equiv \frac{c_n}{2} e^{j\varphi_n}$ y tomando la parte real

⁹Repítase este apartado haciendo uso de las expresiones trigonométricas.

$$E_n = \operatorname{Re}[E_n] = c_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (\text{D.62})$$

$$H_n = \operatorname{Re}[H_n] = \frac{c_n}{Z_0} \cos(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

En la figura D.14 se representa la dependencia espacial del campo eléctrico de las ondas estacionarias correspondientes a $n = 0, 1, 2, 3$.

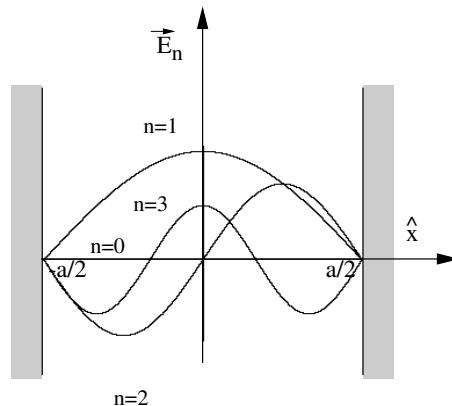


Figura D.14:

Cualquier onda no monocromática que se propage entre los conductores se podrá expresar como combinación lineal de estas ondas estacionarias.

(b) - En primer lugar, debe comprobarse que las condiciones iniciales enunciadas son compatibles con las condiciones de contorno. En la figura D.15, en el intervalo $0 \leq x \leq a$, se representa a la condición inicial para el campo eléctrico. Dada la simetría de la función, su reconstrucción solo requiere la determinación de las amplitudes y de las fases de las ondas estacionarias correspondientes a n impar.

Para determinar las constantes c_n , y φ_n mediante el desarrollo en serie de Fourier, es necesario tener en cuenta que la repetición periódica de E_n no es armónica, por lo que el desarrollo en función de ondas estacionarias no equivale al de Fourier. Sin embargo, puede extenderse la función $E(x, 0)$ añadiéndole la indicada con línea de puntos en el $a < x \leq 2a$, hacer el desarrollo en $0 \leq x \leq 2a$ e identificar a aquellos armónicos que coinciden con las ondas estacionarias en $0 \leq x \leq a$.

Dando a E_0 y a los valores enunciados, las siguientes funciones describen, en los distintos tramos, a la función inicial de la figura D.15 en el intervalo $0 \leq x \leq 4$

$$E(x, 0) = \begin{cases} f_1 = x & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ f_2 = 2 - x & \text{para } 1 \leq x < 3 \\ f_3 = -4 + x & \text{para } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

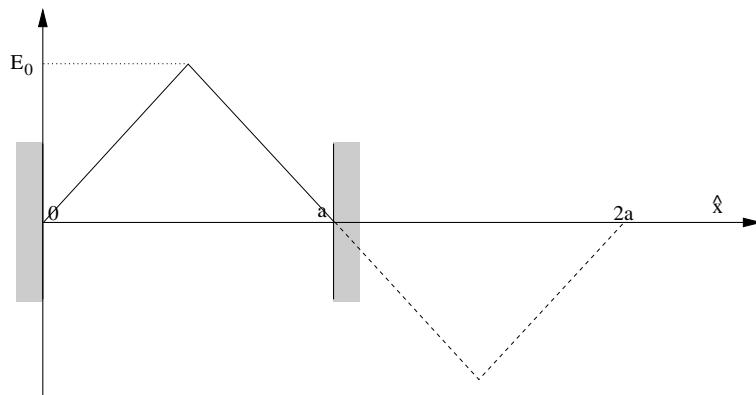


Figura D.15:

con lo que los coeficientes de Fourier, de acuerdo con III.1 y III.9, son

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_0^1 f_1 \cos\left(\frac{1}{2}n\pi x\right) dx + \frac{1}{2} \int_1^3 f_2 \cos\left(\frac{1}{2}n\pi x\right) dx + \frac{1}{2} \int_3^4 f_3 \cos\left(\frac{1}{2}n\pi x\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{2} \int_0^1 f_1 \sin\left(\frac{1}{2}n\pi x\right) dx + \frac{1}{2} \int_1^3 f_2 \sin\left(\frac{1}{2}n\pi x\right) dx + \frac{1}{2} \int_3^4 f_3 \sin\left(\frac{1}{2}n\pi x\right) dx \end{aligned}$$

Como puede comprobarse, $a_n = 0$ para todo n y $b_n = 0$ para n par, por lo que solo quedan los términos correspondientes a b_n impares que, como se ha previsto, corresponden a los armónicos impares. Los primeros coeficientes son

$$c_1 = b_1 = 0,810569 , , c_3 = b_3 = -0,0900633 , , c_5 = b_5 = 0,0324228 , , \dots$$

En la figura D.16a se representa la aproximación hasta $n = 31$ de dichas condiciones iniciales.

Teniendo en cuenta que la expresión espacio-temporal del campo eléctrico D.62 se reduce a la inicial para $t = 0$, $\sin \varphi_n = 1 \Rightarrow \varphi_n = \frac{1}{2}\pi$ y

$$E(x, t) = \sum_{n=1, 3, \dots} c_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$$

En las figuras D.16b-c se representa al campo en los instantes $t = 0,25 T_0$ y $t = 0,5 T_0$. Calcúlese el campo magnético y compruébese que cumple la condición inicial correspondiente (véase la sección 4.7).

- d-4. Una onda plana y monocromática incide normalmente desde el aire sobre la superficie plana de un medio perfectamente absorbente. Hacer uso del tensor de Maxwell y, alternativamente, del principio de acción y reacción entre el campo y el medio, para calcular la presión media ejercida sobre dicha superficie. La magnitud del vector de Poynting incidente es de $1 \text{ KW} \cdot \text{m}^{-2}$.

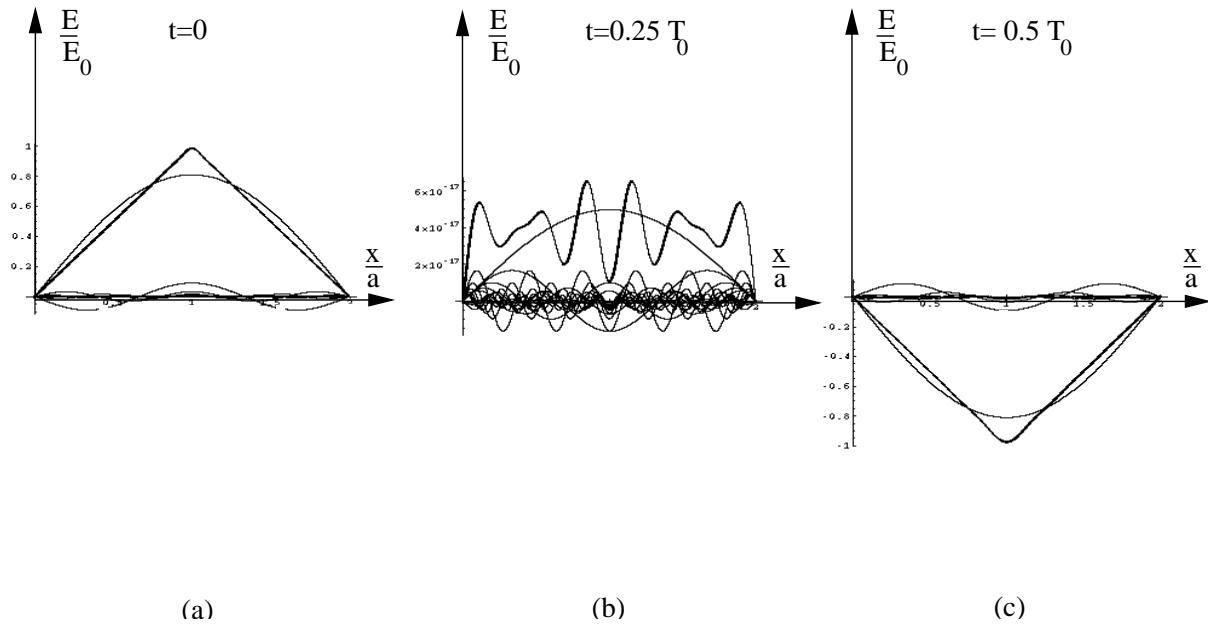


Figura D.16:

Repetir los cálculos anteriores para el caso en que la superficie corresponde a un conductor ideal.

SOLUCION :

La consevación de la cantidad de movimiento viene dada por 3.23. Hallando el promedio temporal de la anterior

$$\int_V \underbrace{\left\langle \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \right\rangle}_{(a)} dv - \oint_S \langle \vec{n} \cdot \overset{\leftrightarrow}{M} \rangle ds = - \int_V \langle \vec{f}_{em} \rangle dv = - \langle \vec{F}_{em} \rangle , , \quad \vec{f}_{em} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$$

(a) es el promedio de la derivada temporal de la cantidad de movimiento, en cuyo desarrollo aparecen términos del tipo

$$\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \wedge \vec{H} \rangle = \frac{1}{2} \vec{n} \operatorname{Re}[j E H^*] = 0$$

porque $E H^*$ es real en el aire.

Queda, pues, como en el caso de los campos estáticos, que

$$\langle \vec{F}_{em} \rangle = \oint_S \langle \vec{n} \cdot \overset{\leftrightarrow}{M} \rangle ds = \oint_S \langle \vec{f}_s \rangle ds$$

En la figura D.17a se representa a una superficie $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ que envuelve al volumen \mathcal{V} que contiene al primer medio salvo una pequeña película de espesor

despreciable próxima al medio absorbente (Se supone a S_1 en el infinito). Dada la simetría del problema, $\langle \vec{f}_s \rangle$ es uniforme en S_2 , la presión sobre dicha superficie es $\langle p_s \rangle = -\langle \vec{f}_s \rangle \cdot \vec{n}_s$ y, por el principio de acción y reacción, la presión sobre la superficie del material absorbente es $\langle p_a \rangle = \langle p_s \rangle$. Luego

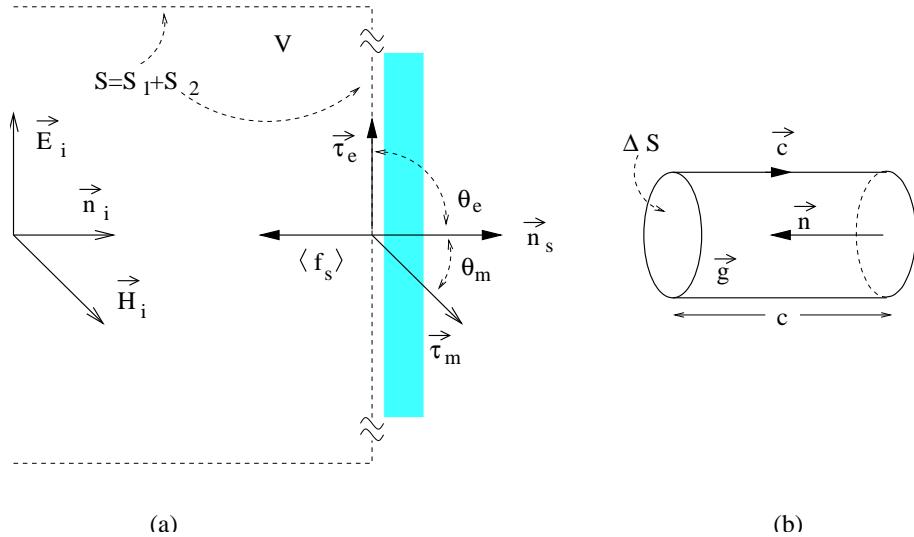


Figura D.17:

$$\begin{aligned} \langle \vec{f}_s \rangle &= \langle \omega_e^i \rangle (\cos 2\theta_e \vec{n}_s + \sin 2\theta_e \hat{\tau}_e) + \langle \omega_m^i \rangle (\cos 2\theta_m \vec{n}_s + \sin 2\theta_m \hat{\tau}_m) \Rightarrow \\ \langle \vec{f}_s \rangle &= -\langle \omega_{em}^i \rangle \vec{n}_s \Rightarrow \langle p_a \rangle = \langle \omega_{em}^i \rangle \end{aligned}$$

porque $\theta_e = \theta_m = \frac{1}{2}\pi$.

De forma menos rigurosa¹⁰, puede considerarse que la onda está compuesta de fotones que inciden sobre el medio absorbente y le transmiten toda su cantidad de movimiento, de manera que la presión será igual a la cantidad de movimiento cedida por unidad de tiempo y unidad de superficie. En la figura D.17b se muestra un cilindro de base $\Delta S = 1$ y altura c , la velocidad de la luz. La base derecha se apoya sobre la superficie absorbente, cuya normal es \vec{n} . Dado que los fotones viajan con velocidad c , todos aquellos contenidos en el cilindro atraviesan la unidad de superficie de este material en la unidad de tiempo

$$\langle p_a \rangle = \frac{d^2 \langle G^i \rangle}{ds dt} = -c \langle \vec{g}^i \rangle \cdot \vec{n} = c \langle g^i \rangle = \omega_{em}^i$$

Compruébese, por ambos procedimientos, que la presión sobre un conductor ideal es la doble de la calculada en el caso anterior.

¹⁰Si el medio en que se incide no fuese plano indefinido, si, por ejemplo, fuera una esfera metálica, este tratamiento puramente mecánico no sería apropiado puesto que habría que tener en cuenta los efectos de difracción.

- d-5. Una partícula esférica, perfectamente reflectante, tiene un radio a y una densidad de $5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Haciendo uso de los datos del problema 4-11 de la sección anterior, calcular el valor límite de a para el que la fuerza de radiación debida al Sol se iguala a la de atracción gravitacional del mismo. (Masa del Sol $M = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$; Constante de gravedad universal $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$). (Para simplificar, considérese que la partícula presenta a la radiación una sección eficaz de radio a).
- d-6. A la distancia que la Tierra dista del Sol, la densidad de flujo de potencia de la radiación electromagnética solar es aproximadamente de $1,5 \text{ KW} \cdot \text{m}^{-2}$ (sobre todo en las regiones ópticas y del infrarrojo), mientras que el viento solar está constituido principalmente por protones con velocidades aproximadas de $10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ y densidades de $2 \times 10^7 \text{ protones por m}^3$.
- Comparar la presión en $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ de la radiación electromagnética con la producida por el viento solar sobre una superficie situada normalmente a la radiación y al viento solar. Con objeto de simplificar el cálculo, supóngase a la superficie como perfectamente absorbente.
 - ¿Pueden ser usados la radiación o el viento solar para propulsar un vehículo interplanetario?
 - ¿Qué dimensión debe de tener "la vela" (en m^2) para que se produzca una fuerza de 100 N con el viento solar a favor?
- d-7. Demostrar que, en la deducción de las leyes de Fresnel para el modo TE, la condición de continuidad de B_z equivale a la correspondiente de E_y .
- d-8. Una onda plana, homogénea, con polarización TM, amplitud $E_0 = 100 \text{ mV} \cdot \text{m}^{-1}$ y longitud de onda $\lambda_0 = 300 \text{ m}$, incide desde el aire con un ángulo de $\theta_1 = 45^\circ$ sobre una superficie plana de agua. Si las constantes de esta última son $\mu_r = 1$; $\epsilon_r = 81$; $\sigma = 5 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, hallar aproximadamente
- Los campos reflejado y transmitido.
 - Las densidades de carga y de corriente. ¿Bajo qué condiciones puede hablarse de densidades superficiales de carga y de corriente?

SOLUCION :

La frecuencia es $f = \frac{c}{\lambda_0} = 10^6 \text{ Hz}$ y la $Q = \frac{2\pi f \epsilon_r \epsilon_0}{\sigma} = 8,7 \times 10^{-4}$, luego, a esta frecuencia, el segundo medio puede considerarse como un buen conductor.

$$Z_1 = Z_0 \simeq 120\pi \quad , \quad Z_2 \simeq (1+j) Z_0 \sqrt{\frac{Q}{\epsilon_r}} \ll Z_1$$

(a) - Dado que $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, véase la figura D.18, $\vec{n}_i = (\sin \theta_1, 0, \cos \theta_1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1, 0, 1)$ y $\vec{n}_r = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1, 0, -1)$ y los campos

$$\vec{E}^i = \frac{1}{2}\sqrt{2} E^i (\hat{x} - \hat{z}) \quad , \quad \vec{H}^i = H^i \hat{y}$$

$$\vec{E}^r = \frac{1}{2} \sqrt{2} E^r (\hat{x} + \hat{z}) , \quad \vec{H}^i = -H^i \hat{y}$$

Debido al carácter de buén conductor del segundo medio, la dirección de transmisión es casi normal a la superficie de separación de los medios $\vec{n}_t \simeq \hat{z}$, por lo que

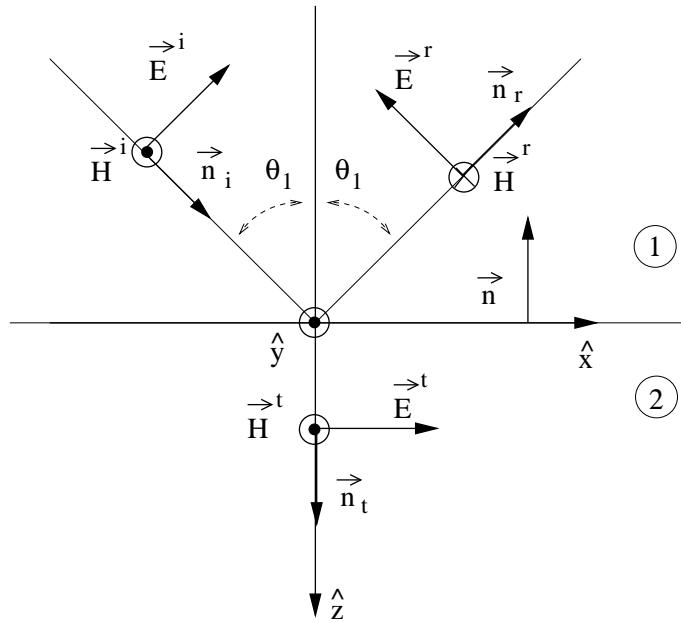


Figura D.18:

$$\vec{E}^t \simeq E^t \hat{x} , \quad \vec{H}^t \simeq H^t \hat{y}$$

Para el cálculo de las amplitudes se necesitan los coeficientes de reflexión y transmisión. Quedándose con los valores principales de la aproximación $Z_2 \ll Z_1$

$$\rho^{TM} = \frac{E_0^r}{E_0^i} \simeq -1 , \quad \tau^{TM} = \frac{E_0^t}{E_0^i} \simeq 2 \frac{Z_2}{Z_1} \simeq 2(1+j) \sqrt{\frac{Q}{\epsilon_r}} \simeq 2 \times 10^{-2} (1+j)$$

lo que, junto con las relaciones de estructura correspondientes, permite expresar a todos los campos en función de E_0^i .

(b) - Solo existen corrientes en el seno del medio conductor

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}^t = \hat{x} \sigma \tau^{TM} E_0^i e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \alpha z)}$$

donde

$$\alpha \simeq \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} = 0,5 \text{ m}^{-1} \Rightarrow \delta = 2 \text{ m}$$

Como se vió en la sección 4.2.2.2, en un medio lineal y homogéneo, la densidad de volumen de carga es nula pero puede aparecer carga superficial si hay una discontinuidad de \vec{D} .

Bajo la aproximación de buén conductor, $E_z^t \simeq 0$, por lo que solo puede haber componente normal del campo eléctrico en el primer medio. De acuerdo con la figura, en $z = 0_-$ (medio (1))

$$E_{1z}(z = 0) = \operatorname{sen} \theta_1 (-E^i + E^r)_{z=0} = -\sqrt{2} E_0^i e^{j\omega(t - \frac{\sqrt{2}}{2c} x)}$$

dado que $(e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})})_{z=0} = e^{j(\omega t - k x \operatorname{sen} \theta_1)}$, tanto para la onda incidente como para la reflejada.

Aplicando la condición de contorno de discontinuidad $-\vec{D}_1(z = 0) \cdot \hat{z} = \sigma$

$$\sigma = \sigma_0 e^{j\omega(t - \frac{\sqrt{2}}{2c} x)} , , \quad \sigma_0 = \sqrt{2} \varepsilon_0 E_0^i$$

Compruébese que las condiciones de contorno se pueden plantear suponiendo que $\vec{H}_2 = 0$ y que en la superficie del conductor hay una densidad superficial de corriente

$$\vec{j}_s = \hat{x} \int_{z=0}^{\infty} j(z) dz$$

lo que corresponde a considerar al conductor como ideal.

- d-9. Una onda plana, homogénea y monocromática incide, con $\theta_1 = 30^\circ$, sobre la superficie plana de un medio cuyas constantes son $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 1 S \cdot m^{-1}$ y $Q = 1/(2\sqrt{2})$. Demostrar que la onda transmitida no es homogénea y determinar la orientación de los planos de igual amplitud y la de los de igual fase.

SOLUCION :

Las componentes de los campos de la onda transmitida tiene la forma general

$$\Phi^t = \Phi_0^t e^{-\gamma_2 \vec{n}_2 \cdot \vec{r}} e^{j\omega t}$$

Las constantes de propagación de los medios son

$$\gamma_1 = j k = j \frac{\omega}{c} , , \quad \omega = \frac{Q \sigma}{\varepsilon_0} = 4 \times 10^{10} \text{ rad} \cdot s^{-1} , , \quad k = 133 \text{ m}^{-1}$$

$$\gamma_2 = \alpha + j \beta = k(1 + j\sqrt{2})$$

Por otra parte, el vector unitario de propagación en el segundo medio es

$$\vec{n}_2 = \operatorname{sen} \theta_2 \hat{x} + \cos \theta_2 \hat{z} \Rightarrow \gamma_2 \vec{n}_2 \cdot \vec{r} = \gamma_2 \operatorname{sen} \theta_2 x + \gamma_2 \cos \theta_2 z$$

y, aplicando la ley de refracción,

$$\gamma_2 \operatorname{sen} \theta_2 = \gamma_1 \operatorname{sen} \theta_1 = j \frac{1}{2} k \Rightarrow \gamma_2 \vec{n}_2 \cdot \vec{r} = j \frac{k}{2} (x + \operatorname{ctg}(\theta_2) z)$$

donde

$$\operatorname{ctg} \theta_2 = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta_2} - 1} = 2,71 - j 1,46$$

ya que

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta_2} = 4 \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} = 4 - j 8\sqrt{2}$$

con lo que

$$\gamma_2 \vec{n}_2 \cdot \vec{r} = 97z + j(66,5x + 180z)$$

Esto implica que los planos de igual amplitud \vec{n}_a y los de igual fase \vec{n}_f tienen direcciones distintas:

$$\vec{n}_a = \hat{z}, \quad \vec{n}_f = 0,35\hat{x} + 0,94\hat{z}$$

d-10. Una onda plana monocromática, cuyo vector de Poynting tiene un valor medio $\langle \vec{S}_i \rangle$, incide normalmente a la superficie del mar. Calcular los vectores de Poynting reflejado y transmitido en función del incidente. Los parámetros del agua son: $\sigma = 4 \text{ S/m}$; $\varepsilon_r = 81$; $\mu_r = 1$. Considerar a) $f=1 \text{ Mhz}$; b) $f=10 \text{ Ghz}$.

d-11. Una onda plana de frecuencia $f=2 \text{ GHz}$, polarización TE, incide con $\theta_i = 30^\circ$ sobre una gran lámina de cobre ($\sigma = 5,8 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$). Calcular la fracción entre la potencia media que incide y la que se absorbe en cada unidad de superficie de la lámina. ¿Sería correcto este enunciado para frecuencias próximas al espectro visible?

SOLUCION :

El color definido del cobre indica que, en la estrecha banda del visible, refleja selectivamente por lo que su conductividad debe ser dispersiva en dicha banda (dependiente de la frecuencia).

Para calcular la potencia media absorbida es conveniente comprobar que a la frecuencia enunciada, el cobre es un buen conductor. Efectivamente, $Q \simeq 2 \times 10^{-9}$. Por lo tanto, puede hacerse dicho cálculo haciendo uso del concepto de resistencia superficial.

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2 \sigma}} \simeq 10^{-2} \Omega \cdot m^{-2}$$

Ahora es necesario calcular el campo magnético tangencial en el primer medio (véase la figura D.19). Para ello puede aproximarse al cobre como conductor ideal

La potencia media incidente, por unidad de la superficie del conductor es

$$\left\langle \frac{dP_i}{ds} \right\rangle = \langle \vec{S} \cdot \hat{z} \rangle = \frac{1}{2} Z_0 |H_0^i|^2 \cos \theta_1$$

$$Z_2 = 0 \Rightarrow \rho^{TE} = \frac{E_0^r}{E_0^i} = -1$$

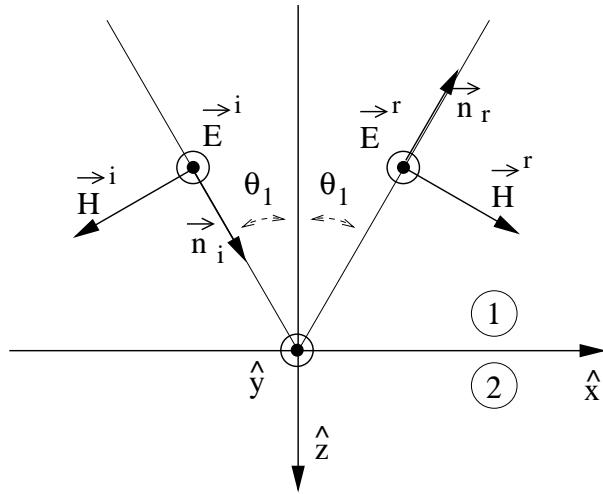


Figura D.19:

con lo que el campo tangencial total, en el aire, es

$$H_{T0} = -H_0^i \cos \theta_1 + H_0^r \cos \theta_1 = -2 H_0^i \cos \theta_1$$

, puesto que $H_0^r = \frac{E_0^r}{Z_0} = -\frac{E_0^i}{Z_0} = -H_0^i$, y la disipada a través de la misma superficie

$$\langle \frac{dP_d}{ds} \rangle = \frac{1}{2} R_s |H_{T0}|^2 = 2 |H_0^i|^2 \cos^2 \theta_1 R_s$$

Luego

$$\frac{\langle \frac{dP_d}{ds} \rangle}{\langle \frac{dP_i}{ds} \rangle} = \frac{4}{Z_0} \cos \theta_1 R_s \simeq 9 \times 10^{-5}$$

d-12. Dos dieléctricos indefinidos, de constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_3 , se hallan separados por una lámina de otro dieléctrico de constante ϵ_2 y cuyo espesor es a .

- Hallar las condiciones necesarias para que una onda monocromática de frecuencia f que incide normalmente desde el primer medio no sufra reflexión.
- Aplicar los resultados al acoplamiento entre el aire, primer medio, y un vidrio de $\epsilon_{r3} = 4$ a la frecuencia de 1 GHz .
- Hallar el coeficiente de reflexión total para una frecuencia de $1,1 \text{ GHz}$.

SOLUCION :

(a) - Se ilumina desde la izquierda de modo que, como se indica en la figura D.20, en el primer medio habrá, en general, una onda incidente y otra reflejada. Deben buscarse las condiciones bajo las cuales se anula esta última. En la lámina, necesariamente, deben coexistir ambos modos. En el último medio solo habrá una

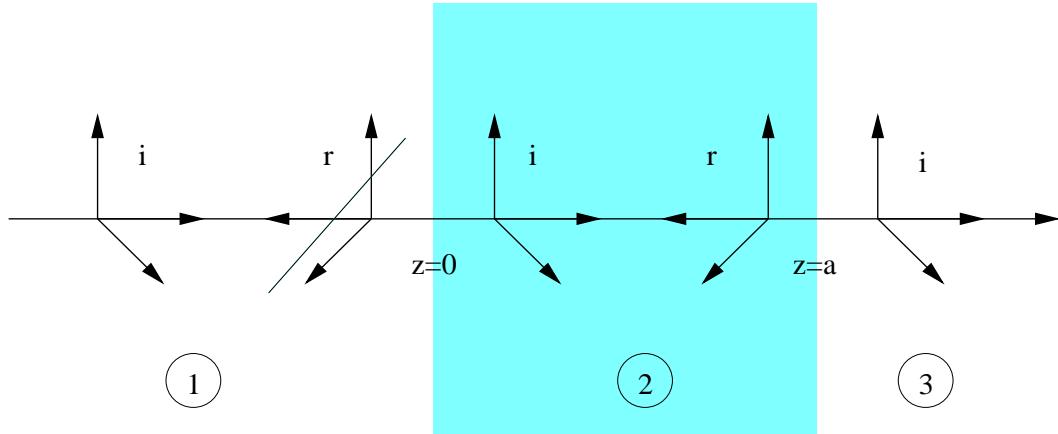


Figura D.20:

onda incidente puesto que, para $z > a$, no existe ninguna discontinuidad que la refleje.

Suponiendo que las ondas están polarizadas en la dirección del eje y , que se propagan en la dirección z y que se ha eliminado a la onda reflejada en el primer medio, los campos serán

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= A_1 e^{-j\beta_1 z} \hat{x} & \vec{H}_1 &= \frac{A_1}{Z_1} e^{-j\beta_1 z} \hat{y} \\ \vec{E}_2 &= (A_2 e^{-j\beta_2 z} + B_2 e^{j\beta_2 z}) \hat{x} & \vec{H}_2 &= \frac{1}{Z_2} (A_2 e^{-j\beta_2 z} - B_2 e^{j\beta_2 z}) \hat{y} \\ \vec{E}_3 &= A_3 e^{-j\beta_3 z} \hat{x} & \vec{H}_3 &= \frac{A_3}{Z_3} e^{-j\beta_3 z} \hat{y}\end{aligned}$$

Estos campos, dado que son tangenciales a las interfaces, deben cumplir las condiciones de continuidad

$$\begin{aligned}&\text{para } z = 0 : \underbrace{(E_1)_{z=0} = (E_2)_{z=0}}_{(A)}, \quad \underbrace{(H_1)_{z=0} = (H_2)_{z=0}}_{(B)} \\ &\text{para } z = a : \underbrace{(E_2)_{z=a} = (E_3)_{z=a}}_{(C)}, \quad \underbrace{(H_2)_{z=a} = (H_3)_{z=a}}_{(D)}\end{aligned}$$

De las condiciones en $z = 0$ se deduce que

$$A_2 = A_1 \frac{Z_1 + Z_2}{2 Z_1}, \quad B_2 = A_1 \frac{Z_1 - Z_2}{2 Z_1}$$

De las condiciones en $z = a$, dividiendo una por otra y eliminando las constantes $A_{2,3}$ y B_2 , se tiene que

$$e^{-2j\beta_2 a} = \frac{(Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 - Z_2)} = \text{Número real} \quad (\text{D.63})$$

dado que las impedancias de los dieléctricos son reales.

En la figura D.21 se representa en el plano complejo a $e^{-j\beta_2 a}$ como un vector, de módulo unitario y fase $-j\beta_2 a$, que solo toma los valores reales

$$e^{-2j\beta_2 a} = \begin{cases} +1 & \Rightarrow 2\beta_2 a = 2m\pi, \quad m = 1, 2 \dots \\ -1 & \Rightarrow 2\beta_2 a = (2m+1)\pi, \quad m = 0, 1 \dots \end{cases}$$

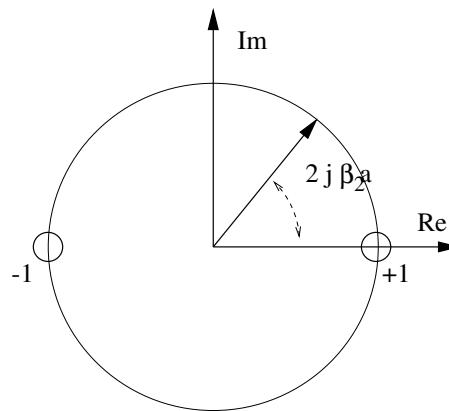


Figura D.21:

Tomando los primeros valores de m y substituyendo en D.63, se obtienen las siguientes condiciones:

$$a = \frac{\lambda_2}{2}, \quad Z_1 = Z_3$$

que corresponde a una lámina desfasadora de media onda. El primer medio y el segundo son iguales.

$$a = \frac{\lambda_2}{4}, \quad Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}$$

correspondiente a una lámina adaptadora de cuarto de onda. Este es el principio adoptado en óptica para obtener superficies no reflectantes.

El resto de los apartados se dejan como ejercicio.

d-13. Supóngase al agua como un dieléctrico ideal con $\epsilon_r = 81$.

- a) Calcular el ángulo crítico para la interfase agua-aire.
- b) Calcular la atenuación, en la dirección normal a la interfase, de la onda superficial en el aire si el ángulo de incidencia es $\theta_i = 45^\circ$. Expresar la atenuación en decibelios para una distancia λ de la superficie.

Apéndice E

Apéndice II del capítulo 4

E.1. Propagación guiada

Las ondas electromagnéticas transportan energía y, por lo tanto, información. Su conducción y acondicionamiento son, pues, de una utilidad práctica evidente y sus aplicaciones son numerosas, como lo muestran los siguientes ejemplos:

- Comunicaciones: Radiofonía, enlace de microondas entre postes o satélites, enlaces de fibra óptica.
- Consumo: Hornos industriales y domésticos, detectores de intrusos.
- Telemetría: Radares de regulación de tráfico, de vigilancia, meteorológicos, de prospección.
- Científicas: Aceleradores de partículas, creación y calentamiento de plasmas, radiotelescopios, sondeo ionosférico, estudio de las propiedades de la materia.

En la mayoría de los casos, la radiación electromagnética es utilizada como portadora de información. Dado que la velocidad máxima a que puede transmitirse información es directamente proporcional al ancho de banda disponible, existe un interés en el dominio de técnicas de conducción y tratamiento de dicha radiación hasta frecuencias tan elevadas como sea posible. Actualmente se utiliza una amplia zona del espectro, con algún hueco, que cubre desde las ondas de radio largas hasta el dominio del visible ($f \in [\sim 10^4 \text{ Hz} \rightarrow \sim 10^{15} \text{ Hz}]$, $\lambda \in [\sim 3 \times 10^4 \text{ m} \rightarrow \sim 3 \times 10^{-7} \text{ m}]$). En la primera parte del espectro, correspondiente a la radio y televisión analógicas, las longitudes de onda son grandes comparadas con las dimensiones de los elementos utilizados para el tratamiento de las ondas. Su conducción a través de distancias que no sean comparables con la longitud de onda de la señal se lleva a cabo por medio de cables, o líneas, que no introducen retraso o distorsión sobre la misma. A frecuencias superiores, en el rango de microondas ($f \in [\sim 10^9 \text{ Hz} = 1 \text{ GHz} \rightarrow \sim 10^3 \text{ GHz}]$, $\lambda \in [\sim 30 \text{ cm} \rightarrow \sim 0,3 \text{ mm}]$) o de las fibras ópticas (infrarrojo cercano o visible), los elementos utilizados tienen dimensiones comparables o superiores a la longitud de onda, por lo que han de estudiarse planteando un problema de contorno para los campos cuyo fundamento se ilustra en esta sección. Un circuito, o sistema, completo contiene a elementos

de condicionamiento de energía que requieren para su estudio técnicas de carácter específico que no serán abordadas en este texto; salvo en el caso de los elementos resonantes, las consideraciones que aquí se hacen sobre este tipo de elementos son puramente cualitativas.

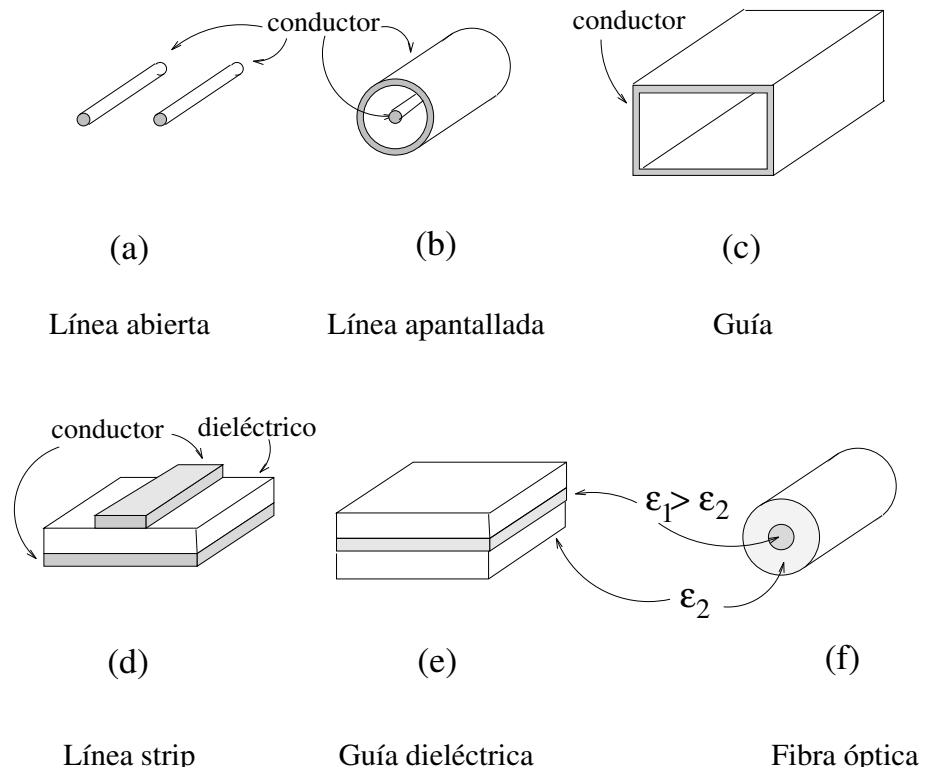


Figura E.1: Tipos de guía de onda

La figura E.1 es un muestrario de los principales tipos de *Guías de onda*. Las E.1a-b son multi-conductor o *Líneas de transmisión* y se suelen utilizar a frecuencias relativamente bajas con modos TEM. Cuando son cortas comparadas con las longitudes de onda pueden ser tratadas como meros cables pero, en caso contrario, incluso a frecuencias muy inferiores a las de microondas (en líneas telegráficas o en las de distribución de energía), deben configurarse como verdaderas líneas de transmisión en las que los fenómenos propagativos son importantes. La E.1c es monoconductor y se le reserva la apelación, por defecto, de *Guía de onda*. En éstas, el confinamiento se logra mediante una sola superficie conductora que, normalmente, envuelve a un dieléctrico homogéneo y se utiliza a frecuencias de microondas superiores a las de las líneas de transmisión. Las E.1d son *Guías strip*, construidas con dieléctricos y conductores laminares. Por último, las E.1e-f son *Guías dieléctricas* en las que las ondas son confinadas por reflexión total. Las primeras son de tipo laminar y las segundas son las *Fibras ópticas*, destinadas a operar en las cercanías del visible.

En principio se supone que las guías están compuestas por conductores y dieléctricos ideales y homogéneos y que su geometría tiene simetría translacional en la dirección del eje Z, como se muestra en la figura E.2. En la práctica, los medios no son ideales pero si buenos, dentro de la

zona espectral en que son útiles, por lo que las pérdidas energéticas pueden ser consideradas como pequeñas e introducidas como perturbación a la solución correspondiente a medios ideales. Los resultados obtenidos suponiendo simetría translacional son aproximadamente válidos cuando las estructuras sufren curvaturas cuyos radios son grandes comparados con las longitudes de onda y sirven también como base para el estudio de segmentos finitos de guía.

La forma más conveniente de estudiar estas estructuras, especialmente cuando la geometría transversal no se adapta al uso de coordenadas cartesianas, es por medio de los potenciales de Debye.

E.1.1. Potenciales de Debye de las guías

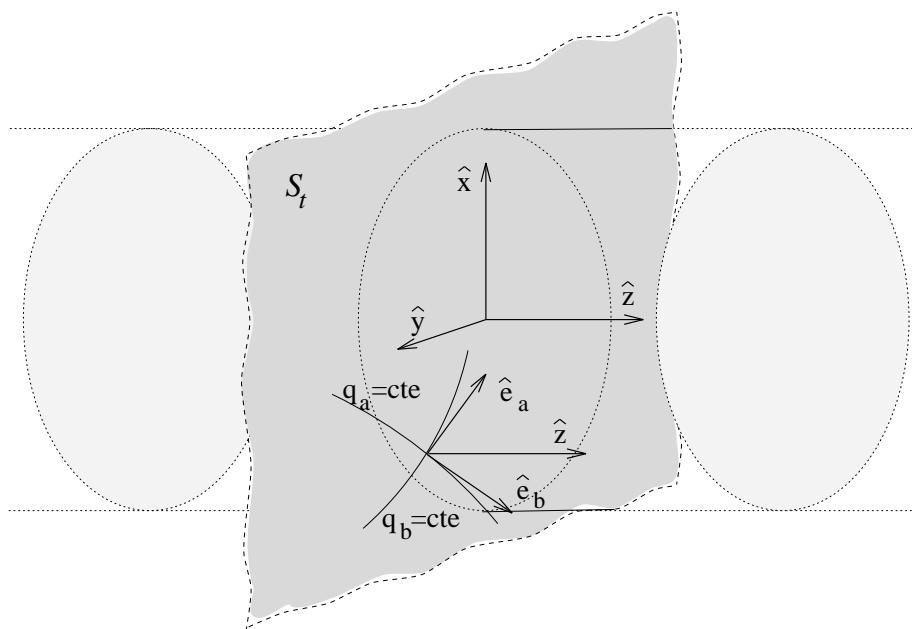


Figura E.2: Geometría de las guías

En el seno de un dieléctrico ideal, la ecuación que deben cumplir los potenciales de Debye son

$$(\nabla^2 + \beta^2) \Psi = 0 \quad (\text{E.1})$$

$$\beta = \frac{\omega}{v} \quad , \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad , \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (\text{E.2})$$

β , v y λ son: la constante de propagación o número de onda, la velocidad de fase y la longitud de las ondas planas monocromáticas y homogéneas en el dieléctrico.

La solución general, de acuerdo con la figura E.2, se expresará en coordenadas cilíndricas curvilíneas (cartesianas, circulares, elípticas ...). Es útil separar la dependencia funcional de las coordenadas transversales (q_a, q_b) de la longitudinal z , escribiendo

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_t(q_a, q_b) Z(z) \quad (\text{E.3})$$

y descomponiendo al operador ∇ en sus componentes transversal y longitudinal

$$\nabla = \nabla_t + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} , , \quad \nabla_t = \hat{e}_a \nabla_a + \hat{e}_b \nabla_b \quad (\text{E.4})$$

Los operadores ∇_a y ∇_b afectan a las coordenadas transversales y los vectores unitarios transversales \hat{e}_a y \hat{e}_b están contenidos en la superficie transversal \mathcal{S}_t y son perpendiculares a \hat{z} .

De acuerdo con las definiciones anteriores, el laplaciano se descompone también de la forma

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{E.5})$$

La separación de variables en la ecuación E.1 se lleva a cabo sustituyendo en ella E.5 y E.3 y dividiendo por Ψ

$$\underbrace{\frac{1}{\Psi_t(q_a, q_b)} \nabla_t^2 \Psi_t(q_a, q_b)}_{(a)=cte} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}_{(b)=cte} + \beta^2 = 0 \quad (\text{E.6})$$

Las constantes de separación (a) y (b) se escribirán en principio con la notación

$$(a) = -\beta_c^2 , , \quad (b) = -\beta_z^2 \Rightarrow \beta^2 = \beta_c^2 + \beta_z^2 \quad (\text{E.7})$$

donde β_c y β_z son, respectivamente, el número de onda de corte y el número de onda longitudinal del modo en la guía. De acuerdo con ésto, las ecuaciones separadas toman la forma

$$\nabla_t^2 \Psi_t(q_a, q_b) = -\beta_c^2 \Psi_t(q_a, q_b) \quad (\text{E.8a})$$

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -\beta_z^2 Z(z) \quad (\text{E.8b})$$

Para resolver la primera ecuación es necesario conocer la estructura de la guía, elegir el tipo de coordenadas más adecuado y aplicar las condiciones de contorno pertinentes. La constante de separación $-\beta_c^2$ es el autovalor del operador ∇_t^2 y sus valores $-\beta_{clm}^2$ compatibles con el problema transversal constituyen, en las guías con pared metálica ideal, un espectro discreto y real, doblemente

numerable por los índices (l, m) ¹. Las autofunciones Ψ_{lm} generan a los modos TE_{lm}, TM_{lm} . El TEM es un caso particular de los anteriores para $\beta_c = 0$.

Por lo que se refiere a la segunda ecuación, al considerar a la línea como indefinida, se resuelve sin condiciones de contorno y su solución, bien conocida, es

$$Z(z, t) = A e^{j(\omega t - \beta_z z)} + B e^{j(\omega t + \beta_z z)} \quad (\text{E.9})$$

a la que se ha añadido el factor temporal $e^{j\omega t}$ para poner de manifiesto que resulta de superponer un modo que viaja en sentido positivo con otro que lo hace en sentido contrario. Incluyendo a la dependencia de las coordenadas transversales

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_t(q_a, q_b) \left(A e^{j(\omega t - \beta_z z)} + B e^{j(\omega t + \beta_z z)} \right) \quad (\text{E.10})$$

Cada uno de los sumandos de la expresión anterior es una *Onda plana no homogénea*, con un *Número de onda longitudinal* β_z , en la que los *Planos de fase constante*

$$\varphi_z = \omega t \pm \beta_z z = cte \quad (\text{E.11})$$

vianjan con una velocidad de fase y una longitud de onda, a lo largo de la guía,

$$v_z = \frac{\omega}{\beta_z} , , \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z} \quad (\text{E.12})$$

pero la amplitud en dichos planos $\Psi_t(q_a, q_b)$ no es uniforme.

E.1.1.1. Relaciones de dispersión. Parámetros de corte

Dado que la resolución del problema de contorno correspondiente a la función de las coordenadas transversales determina el conjunto de autovalores β_{clm}^2 compatibles con el mismo y que éstos están ligados con el número β de las ondas planas homogéneas y con el longitudinal β_z a través de la expresión E.7, para los *Modos de propagación* designados por los índices (l, m) , se cumple la *Relación de dispersión*

$$\beta_{zlm}^2 = \beta^2 - \beta_{clm}^2 \quad (\text{E.13})$$

que establece una dependencia de β_z con β , o, lo que es lo mismo, con la frecuencia ω .

β_c se denomina *Número de onda de corte*. Definiendo los parámetros *Frecuencia de corte* ω_c (f_c) y *Longitud de onda de corte* λ_c

$$\omega_c = 2\pi f_c \equiv v \beta_c , , \quad \lambda_c = \frac{2\pi}{\beta_c} \quad (\text{E.14})$$

¹En las guías dieléctricas o con paredes conductoras no ideales el carácter real de los autovalores no está asegurado.

y teniendo en cuenta a E.2, las relaciones de dispersión anteriores pueden escribirse de las formas:

$$\beta_{zlm}^2 = \frac{1}{v^2} (\omega^2 - \omega_{clm}^2) = \frac{(2\pi)^2}{v^2} (f^2 - f_{clm}^2) \quad (\text{E.15a})$$

$$\frac{1}{\lambda_{zlm}^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{clm}^2} \quad (\text{E.15b})$$

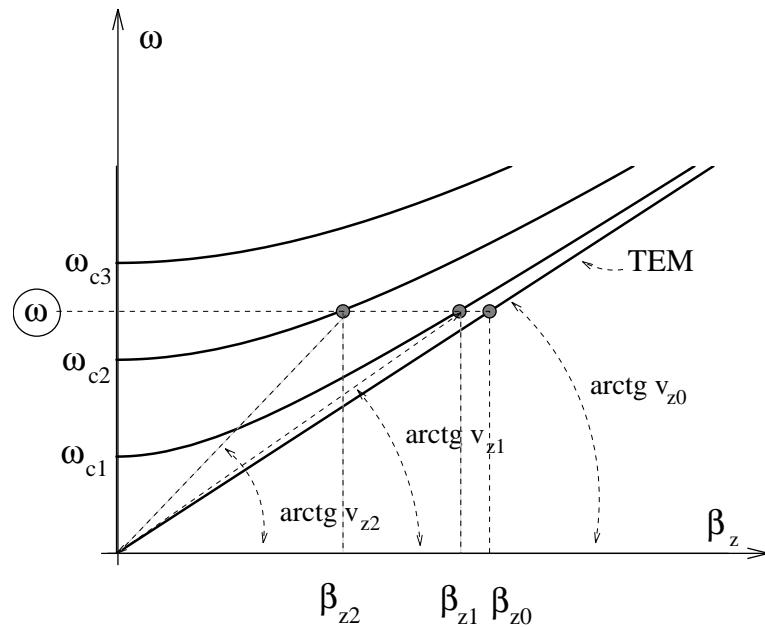


Figura E.3: Relación de dispersión de los modos en la guía

ω_{clm} , (f_{clm}) son realmente frecuencias de corte, en el mismo sentido de la encontrada en el caso de los plasmas, para aquellos modos que son generados por los potenciales de Debye de índices (l, m). Efectivamente, las soluciones E.10 solo corresponden a ondas que se propagan si β_z es real, es decir, cuando la frecuencia de operación es superior a la de corte $\omega > \omega_c$. En caso contrario, $\omega < \omega_c$, se dice que el modo está en corte, o es un *Modo evanescente* y el potencial responde a la expresión

$$\Psi = \Psi_t e^{-\frac{z}{\delta_z}} e^{j\omega t} \quad (\text{E.16})$$

en la que el número de onda se hace imaginario puro y el modo se atenúa sin propagarse. La *Profundidad de penetración de los modos* en la guía, a lo largo de la cual la onda se atenúa por el factor $1/e$,

$$\delta_{z_{lm}} = \frac{1}{j\beta_{z_{lm}}} = \frac{v}{\sqrt{\omega_{clm}^2 - \omega^2}} \quad (\text{E.17})$$

es tanto mayor cuando más cercana al corte se halle la frecuencia de operación. Así, pues, los modos en corte quedan confinados en los alrededores de los puntos en que se generan, tanto más cuanto mayor sea la diferencia $\omega_c - \omega$. Aunque en una guía indefinida este tipo de modo no aparece, ya que sería atenuado en el infinito, los circuitos reales están compuestos por elementos de dimensión finita y cuya geometría, como se verá más adelante, no se ajusta al ideal de la figura E.2. La solución general de la ecuación de onda incluye también a los modos en corte y el papel de éstos es determinante en el comportamiento de aquellos elementos cuya función es la de condicionamiento de la onda que se propaga por ellos.

La relación de dispersión de los modos (l, m) puede aún escribirse, de forma análoga a la de D.29, como $\omega = \omega(\beta_z)$

$$\omega^2 = \omega_{clm}^2 + \beta_{z_{lm}}^2 v^2 \quad (\text{E.18})$$

En la figura E.3 se presentan las relaciones de dispersión de los primeros modos de la guía, ordenados, según la magnitud de su frecuencia de corte, por un solo índice $n = 0, 1, 2, \dots$. El primero corresponde a $\beta_c = 0$, es decir, al modo TEM, y los demás a los modos superiores. Para cada frecuencia ω pueden propagarse por la guía todos aquellos modos para los que $\omega > \omega_{clm}$. A la frecuencia marcada en la figura, estos modos son los correspondientes a $n = 0, 1$ y 2 , con velocidades de fase y números de onda (v_{z_1}, β_{z_1}) , (v_{z_2}, β_{z_2}) y (v_{z_3}, β_{z_3}) . Los modos $n > 3$ son modos en corte. Más adelante se verá que el modo TEM, solo puede propagarse en guías multiconductoras, es decir, en líneas de transmisión.

El uso ordinario de las guías es en *Modo único* (solo se propaga uno de los modos), preferentemente con el *Modo dominante*. Este último es el modo con menor frecuencia de corte de entre los que pueden propagarse en la guía ($n=0$ para las líneas, $n=1$ para las guías). Más adelante se verá como es posible favorecer la propagación de un modo y dificultar la del resto de los mismos. Aún trabajando en modo único la guía dispersa a los grupos de onda porque, como se deduce de E.18,

$$v_{z_{lm}} = \frac{\omega}{\beta_{z_{lm}}} = \frac{v}{\sqrt{1 - x^2}} \quad , \quad x = \frac{\omega_{clm}}{\omega} = \frac{f_{clm}}{f} \quad (\text{E.19a})$$

$$v^2 = v_{z_{lm}} v_{g_{lm}} \quad (\text{E.19b})$$

la velocidad de fase $v_{z_{lm}}$ y la de grupo $v_{g_{lm}}$ del modo en la guía son funciones de la frecuencia.

E.1.2. Clasificación de los modos

Para el estudio de las guías ideales propuestas anteriormente, es útil la clasificación de los modos, según su transversalidad con respecto al vector unitario \hat{z} , en TE, TM y, como caso particular de los

anteriores, TEM. En los dieléctricos homogéneos que forman parte de las guías, la divergencia de los campos es nula por lo que, según se ha visto en la sección 4.3.1, puede utilizarse la componente X_{ntz} como potencial de Debye

$$X_{ntz} = \Psi \quad (\text{E.20})$$

y, de acuerdo con 4.19 y E.4,

$$\vec{X}_t = B \nabla \Psi \wedge \hat{z} = B \nabla_t \Psi \wedge \hat{z} \quad (\text{E.21})$$

donde B es una constante que se determinará más adelante.

Si se identifica al campo transversal \vec{X}_t con \vec{E} (o \vec{H}), el no transversal \vec{X}_{nt} asociado al primero será \vec{H} (o \vec{E}), de acuerdo con las leyes de Ampère y Faraday

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \wedge \vec{E} \quad , \quad \vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \wedge \vec{H} \quad (\text{E.22})$$

y con la relación 4.15c

$$\vec{X}_{nt} = C \nabla \wedge \vec{X}_t = BC \nabla \wedge (\nabla_t \Psi \wedge \hat{z}) \quad (\text{E.23})$$

donde

$$C = \begin{cases} -\frac{1}{j\omega\mu} & \text{si } \vec{X}_t = \vec{E} \\ \frac{1}{j\omega\varepsilon} & \text{si } \vec{X}_t = \vec{H} \end{cases} \quad (\text{E.24})$$

Este campo no transversal puede expresarse como suma de sus componentes longitudinal y transversal desarrollando $\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$, descomponiendo al operador ∇^2 y haciendo uso de E.8a

$$\vec{X}_{nt} = BC [\beta_c^2 \Psi \hat{z} + \nabla_t \frac{\partial \Psi}{\partial z}] = X_{ntz} \hat{z} + \vec{X}_{ntt} \quad (\text{E.25})$$

\vec{X}_{ntt} es la componente de \vec{X}_{nt} contenida en el plano transversal³ y X_{ntz} la componente longitudinal:

$$X_{ntz} = BC \beta_c^2 \Psi \quad , \quad \vec{X}_{ntt} = BC \nabla_t \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (\text{E.26})$$

Cabe resaltar que \vec{X}_{nt} tiene componente longitudinal excepto cuando $\beta_c = 0$, en cuyo caso el modo es TEM (TEMz).

Para $\beta_c \neq 0$ puede tomarse

²Téngase en cuenta que $\hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \cdot \nabla_t \rightarrow 0$.

³ $\nabla_t f$ está contenido en el plano transversal, según E.4.

$$X_{ntz} \equiv \Psi \Rightarrow B = \frac{1}{C \beta_c^2} \quad (E.27)$$

y escribir

$$\vec{X}_{nt_t} = \nabla_t \Phi \quad (E.28)$$

donde

$$\Phi \equiv \frac{1}{\beta_c^2} \frac{\partial X_{ntz}}{\partial z} \quad (E.29)$$

se define como el *Potencial del modo*.

En cuanto al campo transversal \vec{X}_t , de acuerdo con E.27, E.21 y E.29

$$\vec{X}_t = \frac{1}{C \beta_c^2} \nabla_t \wedge X_{ntz} \hat{z} = \frac{1}{C \beta_c^2} \nabla_t X_{ntz} \wedge \hat{z} \quad (E.30)$$

, expresión en la que C toma el valor indicado en E.24.

El potencial de Debye X_{ntz} es, por lo tanto, solución de la ecuación E.8a

$$\nabla_t^2 X_{ntz}(q_a, q_b, z) = -\beta_c^2 X_{ntz}(q_a, q_b, z) \quad (E.31)$$

Recuérdese que la dependencia de $\Psi = X_{ntz}$ con respecto a la variable z viene dada por E.9.

Según ésto, los modos pueden clasificarse dentro de los tres tipos anunciados:

- TE: $E_z = 0$ y $\beta_c \neq 0$. Derivan de H_z .

- TM: $H_z = 0$ y $\beta_c \neq 0$. Derivan de E_z .

- TEM: $E_z = 0$, $H_z = 0$ y $\beta_c = 0$. Derivan directamente de Ψ , solución de la ecuación de Laplace. Por esta razón, los campos de los modos *TEM* son, en parte, análogos a los estático.

E.1.3. Relaciones de estructura

Modos TE :

En estos modos $E_z = 0$ y las componentes transversales de los campos se obtienen en función de $X_{ntz} = H_z$ que, a su vez, es solución de E.31. El *Potencial TE* es

$$\Phi^{TE} \equiv \frac{1}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial z} = \mp \frac{j \beta_z}{\beta_c^2} H_z \quad (E.32)$$

donde, según E.10, el signo $(-)$ es aplicable a los modos que se propagan en la dirección $\vec{n} = +\hat{z}$ y el $(+)$ lo es a aquellos que viajan en la dirección $\vec{n} = -\hat{z}$. Es cómodo expresar el gradiente longitudinal, cuando se aplica a modos que se propagan en la dirección $\vec{n} = \pm \hat{z}$, de la forma

$$\nabla_z = \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -j\beta_z \vec{n} \quad (\text{E.33})$$

De acuerdo con la definición del potencial y las expresiones E.21, E.24, E.28 y E.30, las componentes transversales de los campos son

$$\vec{H}_t^{TE} = \nabla_t \Phi^{TE} \quad (\text{E.34a})$$

$$\vec{E}^{TE} = Z^{TE} \vec{H}_t^{TE} \wedge \vec{n} \quad (\text{E.34b})$$

donde se ha definido la *Impedancia del modo TE* como

$$Z^{TE} = \frac{\omega\mu}{\beta_z} = Z \frac{\beta}{\beta_z} , , \quad Z = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (\text{E.35})$$

, siendo Z la impedancia del dieléctrico. Para los modos TE correspondientes a los índices (l, m) , la impedancia toma el valor

$$Z_{lm}^{TE} = \frac{Z}{\sqrt{1-x^2}} , , \quad x = \frac{\omega_{clm}}{\omega} = \frac{f_{clm}}{f} \quad (\text{E.36})$$

Esta relación de estructura, véase la figura E.4 es aplicable a los modos TE que viajan en una dirección determinada $\vec{n} = \pm\hat{z}$.

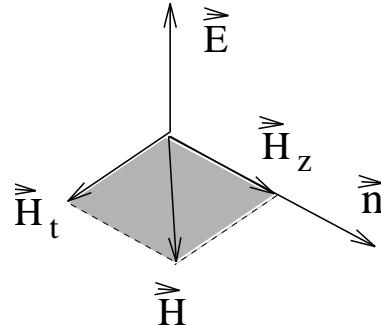


Figura E.4: Relación de estructura TE

Modos TM :

Procediendo de forma análoga a como se ha hecho con el modo TE, se tiene que el *Potencial TM* es

$$\Phi^{TM} \equiv \frac{1}{\beta_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (\text{E.37})$$

y la relación de estructura para las componentes

$$\vec{E}_t^{TM} = \nabla_t \Phi^{TM} \quad (\text{E.38a})$$

$$\vec{H}^{TM} = \frac{1}{Z^{TM}} \vec{n} \wedge \vec{E}_t^{TM} \quad (\text{E.38b})$$

La *Impedancia del modo TM* es

$$Z^{TM} = Z \frac{\beta_z}{\beta} \quad (\text{E.39})$$

En concreto

$$Z_{lm}^{TM} = Z \sqrt{1 - x^2} , \quad x = \frac{\omega_{clm}}{\omega} = \frac{f_{clm}}{f} \quad (\text{E.40})$$

y la relación de estructura correspondiente es la que se muestra en la figura E.5.

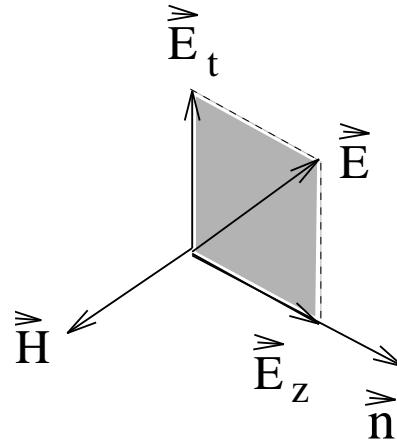


Figura E.5: Relación de estructura TM

Modos TEM :

El modo TEM resulta de hacer $\beta_c = 0$, luego la relación de dispersión E.13 y la velocidad de fase se reducen a

$$\beta_z = \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} , , \quad v_z = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = v \quad (\text{E.41})$$

donde v es la velocidad de las ondas planas homogéneas en el medio. Como en el caso de estas últimas ondas, estos modos no sufren dispersión⁴ puesto que la velocidad de fase es independiente de la frecuencia. También comparten la misma relación de estructura:

Al ser nula la componente longitudinal de los campos, no es posible utilizarla como potencial de Debye, pero puede, por ejemplo, identificarse a " \vec{X}_{nt} " con \vec{E}^{TEM} y definir como *Potencial TEM* a

$$\Phi^{TEM} \equiv BC \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (\text{E.42})$$

con lo que, de acuerdo con E.26

$$\vec{E}^{TEM} = \nabla_t \Phi^{TEM} \quad (\text{E.43})$$

El campo magnético puede deducirse de la relación de estructura de los modos *TM* (E.38b y E.39) teniendo en cuenta que $(\beta_z)_{\beta_c=0} = \beta$ e identificando a $\vec{E}_t^{TM} \rightarrow \vec{E}^{TEM}$ y a $\vec{H}_t^{TM} \rightarrow \vec{H}^{TEM}$

$$\vec{H}^{TEM} = \frac{1}{Z^{TEM}} \vec{n} \wedge \vec{E}^{TEM} \quad , \quad Z^{TEM} = Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (\text{E.44})$$

Se diferencia de los modos homogéneos en que la amplitud de los campos en los planos de fase constante es función de las coordenadas transversales. Con respecto a los modos *TE* y *TM* se distingue, además de por su carácter no dispersivo, ya que v_f no depende de la frecuencia, porque carece de componentes longitudinales.

Dada la nulidad de las componentes longitudinales, el campo eléctrico puede calcularse planteando un problema de tipo electrostático en el plano transversal:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla_t \cdot \vec{E}^{TEM} = 0 \quad (\text{E.45a})$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -j \omega \mu \vec{H} \Rightarrow \nabla_t \wedge \vec{E}^{TEM} = 0 \quad (\text{E.45b})$$

lo que significa que el campo eléctrico de este modo deriva de un potencial que es solución de un problema bidimensional de tipo electrostático en el plano transversal.

$$\nabla_t^2 \Phi^{TEM} = 0 \quad (\text{E.46})$$

De forma análoga, puede verse que el campo magnético responde a un problema magnetostático

$$\nabla_t \cdot \vec{H}^{TEM} = 0 \quad , \quad \nabla_t \wedge \vec{H}^{TEM} = 0 \quad , \quad \oint \vec{H}^{TEM} \cdot d\vec{l} = I \quad (\text{E.47})$$

⁴Si se introducen los efectos de pérdidas en las paredes conductoras los modos propagativos tienen necesariamente una componente longitudinal y aparecen efectos dispersivos.

aunque basta con resolver el problema para uno de los campos ya que el otro se deduce del primero mediante la relación de estructura.

Dado que un campo electrostático nace y muere en cargas de distinto signo y situadas en distintas superficies equipotenciales, para que una guía pueda soportar un modo TEM es necesario que contenga al menos a dos conductores. Este es el tipo de guía definido como línea de transmisión.

Por otra parte, es interesante notar que el vector de Poynting en el dieléctrico

$$\vec{S}^c = \vec{E}^{TEM} \wedge \vec{H}^{TEM*} = \frac{1}{Z} |\vec{E}^{TEM}|^2 \vec{n}$$

, para un modo que se propaga en la dirección \vec{n} , tiene dirección axial. Su proyección sobre las paredes conductoras es nula y éstas no absorben energía de la onda. Si los conductores no fueran ideales, existiría, de acuerdo con D.48, una componente del vector de Poynting normal a la superficie, responsable de las pérdidas por conducción, y el modo no sería TEM. En la práctica, las paredes de las líneas son buenas conductoras y existe un modo aproximadamente TEM (cuasi-TEM).

A continuación se considera la propagación de los distintos tipos de modo en algunos ejemplos típicos de guía.

E.1.4. El modo TEM en la línea coaxial

Aunque se tome como referencia a la línea coaxial, los conceptos aquí definidos tienen validez general. En éste tipo de línea, como se muestra en la figura E.6, el dieléctrico está encerrado entre dos conductores concéntricos de sección circular: el interior, de radio a y el exterior, de radio interior b . Se suele utilizar a frecuencias relativamente bajas ($\omega < \omega_{c1}$ en la figura E.3) a las que solo puede propagarse el modo TEM.

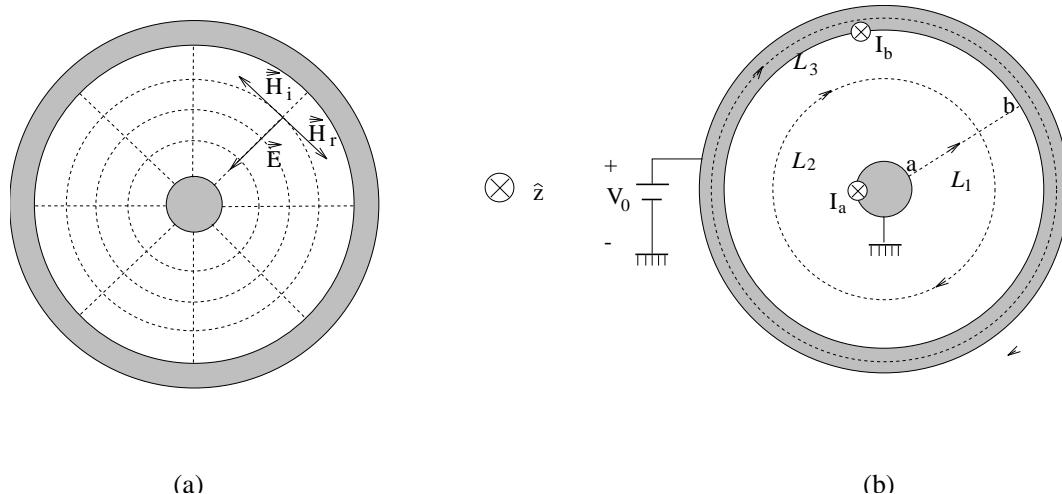


Figura E.6: Línea coaxial

Dependencia transversal :

La dependencia transversal de este modo se obtiene resolviendo la ecuación E.46. Dado que el problema es de tipo electrostático, se puede escribir $\Phi^{TEM} \equiv -V$ e imponer como condición de contorno una diferencia de potencial V_0 entre el conductor externo y el interno. Por simetría, el potencial en el dieléctrico es solo función de la distancia radial ρ al eje z y la ecuación de Poisson correspondiente es

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = 0$$

La solución que cumple las condiciones de contorno impuestas es bien conocida

$$V = V_0 \frac{\ln(\rho/a)}{\ln(b/a)}$$

Luego el campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\nabla_t V = -\frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \quad (\text{E.48})$$

El campo \vec{H} se obtiene por medio de la relación de estructura E.44. En adelante, se denominará *Onda incidente* a la que viaja en el sentido positivo del eje Z y *Onda reflejada* a la que lo hace en sentido contrario y a las magnitudes asociadas a cada una de ellas se les denotará por los índices (i) y (r). Según esto, añadiendo la dependencia de z y de t , los campos de estas ondas pueden escribirse de la forma

$$\vec{E}_i(\rho) = -\frac{V_i}{\ln(b/a)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} e^{j(\omega t - \beta_z z)}, \quad \vec{H}_i(\rho) = -\frac{V_i}{Z \ln(b/a)} \frac{\hat{\varphi}}{\rho} e^{j(\omega t - \beta_z z)} \quad (\text{E.49a})$$

$$\vec{E}_r(\rho) = -\frac{V_r}{\ln(b/a)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} e^{j(\omega t + \beta_z z)}, \quad \vec{H}_r(\rho) = +\frac{V_r}{Z \ln(b/a)} \frac{\hat{\varphi}}{\rho} e^{j(\omega t + \beta_z z)} \quad (\text{E.49b})$$

Como se indica en la figura E.6a, las líneas de \vec{E} son radiales y las de \vec{H} azimutales.

Aunque, como se verá más adelante, el diseño de elementos de microondas requiere el uso de la teoría de campos y el conocimiento de la dependencia transversal de todos los modos posibles, en la práctica, trabajando en modo único, suele bastar con representar a la guía como a un circuito de parámetros distribuidos. Para ello se definen las funciones tensión e intensidad del modo utilizado.

Funciones tensión e intensidad. Impedancia característica. :

Para cada uno de los modos, incidente y reflejado, se define la amplitud de la tensión como

$$V_0 \equiv \int_a^b dV = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{E.50})$$

V_0 toma el valor $V_i (V_r)$ para la onda incidente (reflejada).

También puede definirse la amplitud de la intensidad en la línea de la siguiente forma. Puesto que el camino \mathcal{L}_3 discurre por el interior del conductor externo, circunda a la corriente I_b que circula por la cara interna de éste y a la I_a que circula por la cara externa del conductor interno⁵. Al ser nulo el campo interno del conductor,

$$\oint_{\mathcal{L}_3} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_b + I_a = 0 \Rightarrow I_b = -I_a \equiv I_0$$

o

$$I_0 \equiv - \oint_{\mathcal{L}_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{Z} \oint_{\mathcal{L}_2} \vec{n} \wedge \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{E.51})$$

I_0 toma el valor I_i para la onda incidente, cuya dirección de propagación es $\vec{n} = \hat{z}$, e I_r para la onda reflejada, cuya dirección de propagación es $\vec{n} = -\hat{z}$.

En el caso de las líneas, trabajando con el modo *TEM*, es conveniente definir la *Impedancia característica* de la línea de la forma⁶

$$\mathcal{Z}_c \equiv \frac{V_i}{I_i} = Z \frac{\int_a^b \vec{E}_i \cdot d\vec{l}}{\oint_{\mathcal{L}_2} \hat{z} \wedge \vec{E}_i \cdot d\vec{l}} = -\frac{V_r}{I_r} \quad (\text{E.52})$$

que, como puede comprobarse, toma el valor

$$\mathcal{Z}_c = \frac{1}{2\pi} Z \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\text{E.53})$$

para la línea coaxial⁷.

De esta forma, se obtiene la tensión a lo largo de la línea, como superposición de las contribuciones de las ondas incidente y reflejada⁸

⁵Como los conductores son ideales, los campos y las corrientes armónicas son nulos en su interior por lo que estas últimas solo pueden circular por su superficie.

⁶Esta definición concuerda con la utilizada en los circuitos de corriente cuasi-estacionaria. En el caso general de las guías, esto no suele ser cierto.

⁷Problema e-23.

⁸No es necesario arrastrar el factor $e^{j\omega t}$.

$$V(z) = V_i e^{-j\beta z} + V_r e^{j\beta z} \quad (\text{E.54a})$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_c} (V_i e^{-j\beta z} - V_r e^{j\beta z}) \quad (\text{E.54b})$$

, ecuaciones que son análogas a las D.56.

E.1.5. Guía rectangular

Las guías rectangulares están constituidas por un dieléctrico, que normalmente es el vacío, y una pared conductora que lo envuelve, cuya geometría transversal, como se muestra en la figura E.7, es rectangular. En las guías estándar $a \simeq 2b$.

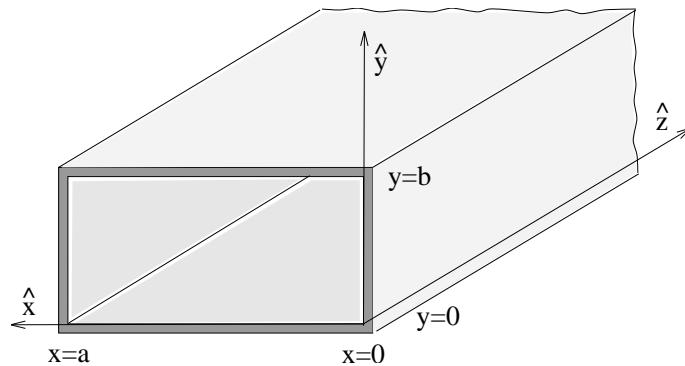


Figura E.7: Guía rectangular

La ecuación transversal E.31 se plantea, de forma adecuada a la geometría de este problema, en coordenadas cartesianas

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) X_z(x, y) = -\beta_c^2 X_z(x, y) \quad (\text{E.55})$$

y puede resolverse, por ejemplo, mediante el método de separación de variables, escribiendo

$$X_z(x, y) = X(x) Y(y) \quad (\text{E.56})$$

Anotando las constantes de separación como $-\beta_x^2$ y $-\beta_y^2$, resultan las ecuaciones separadas

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\beta_x^2 X(x) \quad (\text{E.57a})$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\beta_y^2 Y(y) \quad (\text{E.57b})$$

y la condición de separación

$$\beta_c^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 \quad (\text{E.58})$$

Las soluciones de E.55 pueden, por lo tanto, escribirse de la forma

$$X_z(x, y) = (A_1 \sin \beta_x x + A_2 \cos \beta_x x)(B_1 \sin \beta_y y + B_2 \cos \beta_y y) \quad (\text{E.59})$$

donde las constantes A , B y β deberán ajustarse a las condiciones de contorno.

Dado que los campos derivan de las componentes longitudinales, basta con imponer a éstas las condiciones de frontera para determinar la estructura de cada uno de los modos. A continuación se encuentran las condiciones de contorno para las componentes longitudinales sobre la superficie de un conductor ideal, las cuales no se restringen a una geometría determinada de la guía, y se determina la dependencia transversal de los modos TE y TM.

E.1.5.1. Modos TE

Para estos modos $X_z = H_z$.

Condiciones de contorno :

En este caso es suficiente con exigir la anulación sobre la superficie del conductor de la derivada normal de H_z . Esto asegura que la componente tangencial de \vec{E} y la normal de \vec{H} se anulan sobre dicha superficie. La condición de contorno para los modos TE es, por lo tanto,

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial n_s} \right)_S = 0 \quad \text{Condición de contorno TE} \quad (\text{E.60})$$

Efectivamente, de acuerdo con la figura E.8, en la que S es la superficie del conductor y \vec{n}_s la normal a la misma,

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial n_s} \right)_S \equiv (\nabla H_z \cdot \vec{n}_s)_S = (\nabla_t H_z \cdot \vec{n}_s)_S$$

puesto que $\hat{z} \cdot \vec{n}_s = 0$. Teniendo en cuenta a la definición del potencial TE y a E.34a

$$(\nabla_t H_z \cdot \vec{n}_s)_S \sim (\nabla_t \Phi^{TE} \cdot \vec{n}_s)_S = (\vec{H}_t \cdot \vec{n}_s)_S = H_{tn}$$

donde H_{tn} es la componente del campo \vec{H}_t transversal que es perpendicular a la superficie del conductor. Luego, si se cumple la condición E.60, \vec{H}_t es tangencial en dicha superficie⁹ y, por la relación de estructura correspondiente ($\vec{E} \perp \vec{H}_t$), \vec{E} es normal a la misma.

⁹ \vec{H}_z es tangencial a la superficie y, al ser $\vec{H}_{tn} = 0$, \vec{H}_t también es tangencial.

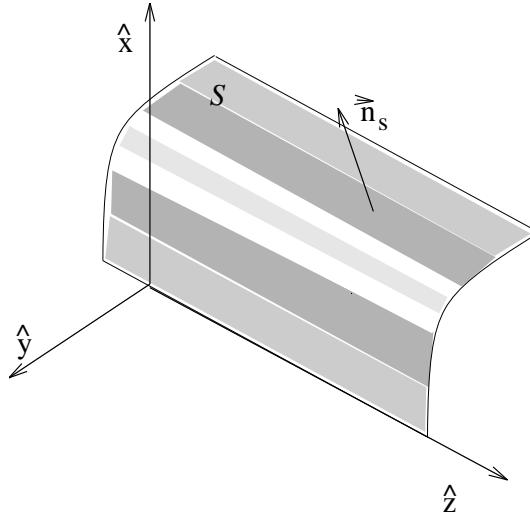


Figura E.8: Condiciones de contorno

Dependencia transversal :

La condición de contorno E.60 se concreta en

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0 \text{ y } x = a \quad (\text{E.61a})$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0 \text{ y } y = b \quad (\text{E.61b})$$

De la aplicación de estas condiciones a E.59 se deduce que \$A_1 = 0\$ y \$B_1 = 0\$ y que las constantes de separación transversales solo pueden tomar los valores discretos

$$\beta_x = \frac{l\pi}{a} , , \quad \beta_y = \frac{m\pi}{b} , , \quad l, m = 0, 1, \dots \quad (\text{E.62})$$

Por lo tanto, los modos forman un conjunto doblemente infinito generado por

$$H_{z_{lm}} = H_{0_{lm}} \cos\left(l\pi\frac{x}{a}\right) \cos\left(m\pi\frac{y}{b}\right) \quad (\text{E.63})$$

La dependencia funcional de \$H_z\$ excluye la posibilidad del modo \$l = m = 0\$ porque \$H_{z_{00}} = cte\$ y el resto de las componentes son nulas.

Las constantes de corte y de propagación son

$$\beta_{c_{lm}} = \pi \sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} , , \quad \beta_{z_{lm}} = \sqrt{\beta^2 - \beta_{c_{lm}}^2} \quad (\text{E.64})$$

Las componentes transversales H_x y H_y se obtienen a partir del potencial TE E.32 y tomando $\nabla_t = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}$ en E.34a

$$H_{x_{lm}} = \pm H_{0_{lm}} \left(\frac{j\beta_{z_{lm}}}{\beta_{c_{lm}}^2} \right) \left(\frac{l\pi}{a} \right) \operatorname{sen} \left(l\pi \frac{x}{a} \right) \cos \left(m\pi \frac{y}{b} \right) \quad (\text{E.65a})$$

$$H_{y_{lm}} = \pm H_{0_{lm}} \left(\frac{j\beta_{z_{lm}}}{\beta_{c_{lm}}^2} \right) \left(\frac{m\pi}{b} \right) \cos \left(l\pi \frac{x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(m\pi \frac{y}{b} \right) \quad (\text{E.65b})$$

El signo (+) corresponde a las ondas incidentes (i) y el (-) a las reflejadas (r).

El campo eléctrico se obtiene por medio de la ecuación E.34b

$$E_{x_{lm}} = \pm Z_{lm}^{TE} H_{y_{lm}} \quad (\text{E.66a})$$

$$E_{y_{lm}} = \mp Z_{lm}^{TE} H_{x_{lm}} \quad (\text{E.66b})$$

E.1.5.2. Modos TM

En este caso $X_z = E_z$.

Condiciones de contorno :

Las condiciones de contorno para los modos TM se reducen a la exigencia de que se anule la componente longitudinal del campo eléctrico

$$(E_z)_S = 0 \quad \text{Condición de contorno TM} \quad (\text{E.67})$$

Si se cumple esta condición, la superficie del conductor es equipotencial para Φ^{TM} y, como consecuencia, \vec{E}_t , que deriva de este potencial, es perpendicular a la superficie. Esto implica que $\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_z = \vec{E}_t$ también lo es y que, dada la relación de estructura pertinente, \vec{H} es tangencial a dicha superficie.

Dependencia transversal :

En el caso de la guía rectangular, las condiciones aplicables a la superficie son

$$E_z = 0 \quad \text{para } x = 0, x = a, y = 0, y = b \quad (\text{E.68})$$

de donde se deducen las mismas relaciones E.62 y E.64 para las constantes de separación, de corte y de propagación longitudinal, y se obtiene para E_z la expresión

$$E_{z_{lm}} = E_{0_{lm}} \operatorname{sen} \left(l\pi \frac{x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(m\pi \frac{y}{b} \right), \quad l, m = 1, 2 \dots \quad (\text{E.69})$$

En este caso, ninguno de los índices puede igualarse a cero.

E.1.5.3. Ordenación de los modos. Modo TE_{10}

Ordenación de los modos :

Como se acaba de ver, de la dependencia funcional de las componentes E_z y H_z en una guía rectangular se sigue la no existencia de los modos TE_{00} , TM_{l0} y TM_{0m} . Las frecuencias y longitudes de onda de corte son, según E.64,

$$f_{clm} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} , \quad \lambda_{clm} = \frac{v}{f_{clm}} \quad (E.70)$$

dependen de los índices (l, m) pero no del tipo de modo. En la figura E.9 aparecen los primeros modos no nulos ordenados por la magnitud de su frecuencia de corte ¹⁰.

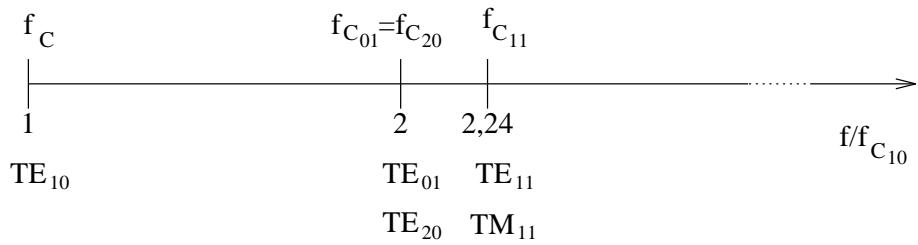


Figura E.9: Ordenación de los modos de una guía rectangular

La frecuencia de corte inferior corresponde al modo TE_{10} el cual es el *Modo dominante* o fundamental. Es el que tiene la estructura más simple y de más fácil utilización, ya que es el único que se propaga cuando se trabaja a una frecuencia superior a la primera de corte e inferior a la segunda.

Modo TE_{10} . :

Para este modo, $l = 1, m = 0$. Las guías rectangulares destinadas a operar con él suelen fabricarse en series estándar, cada uno de cuyos tipos cubre una banda de frecuencia determinada: las S, X, J, P, etc.. Así, por ejemplo, las de la banda X, recomendadas para frecuencias entre 8.2 y 12.4 GHz, tienen unas dimensiones $a = 2,286\text{ cm}$ y $b = 1,016\text{ cm}$. Si el dieléctrico, como es usual, es aire ($v = c$), las frecuencias de corte de los dos primeros modos son

$$f_{c_{10}} = \frac{c}{2a} = 6,56\text{ GHz} , \quad f_{c_{20}} = \frac{c}{a} = 13,1\text{ GHz} \quad (E.71)$$

que corresponden a las longitudes de onda de corte

$$\lambda_{c_{10}} = 2a = 4,572\text{ cm} , \quad \lambda_{c_{20}} = a = 2,286\text{ cm} \quad (E.72)$$

¹⁰Se ha tomado $a = 2b$ lo que hace que ciertos valores de la frecuencia de corte correspondan a más de un modo. En la práctica, $a \approx 2b$, por lo que las coincidencias que, como la $f_{c_{01}} = f_{c_{20}}$, se dan para modos con índices distintos, no son exactas.

Como puede comprobarse, no se aprovecha todo el intervalo $f_{c20} - f_{c10}$ para propagar el modo TE_{10} . La banda recomendada se aleja suficientemente de ambos extremos; la guía es demasiado dispersiva cuando la frecuencia de trabajo se acerca a la de corte del modo que se propaga y, por el contrario, si la frecuencia de trabajo se acerca a la de corte del siguiente modo, la profundidad de penetración de éste puede ser excesiva.

Los parámetros de este modo son, en general,

$$\beta_{c10} = \frac{\pi}{a} , , \quad f_{c10} = \frac{c}{2a} , , \quad \lambda_{c10} = 2a \quad (\text{E.73})$$

$$\beta_{z10} = \frac{\pi}{a} \frac{1}{x} \sqrt{1 - x^2} , , \quad x = \frac{c}{2af} = \frac{\lambda}{2a} \quad (\text{E.74})$$

$$Z_{10}^{TE} = Z \frac{\beta}{\beta_{z10}} = \frac{Z}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (\text{E.75})$$

De las componentes de los campos transversales E.65 y E.66, solo H_x y E_y son distintas de cero. Los campos del modo incidente tienen, pues, la forma¹¹

$$H_z^i = H_0^i \cos\left(\pi \frac{x}{a}\right) e^{j(\omega t - \beta_z z)} \quad (\text{E.76a})$$

$$H_x^i = j\beta_z \left(\frac{a}{\pi}\right) H_0^i \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) e^{j(\omega t - \beta_z z)} \quad (\text{E.76b})$$

$$E_y^i = -j\omega \mu_0 \left(\frac{a}{\pi}\right) H_0^i \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) e^{j(\omega t - \beta_z z)} \quad (\text{E.76c})$$

Puede demostrarse (véase la relación de problemas) que estos campos pueden obtenerse como superposición de dos ondas planas homogéneas que se reflejan en las paredes de la guía.

Si H_0^i se toma como real, los campos reales son

$$H_z^i = H_0^i \cos\left(\pi \frac{x}{a}\right) \cos(\omega t - \beta_z z) \quad (\text{E.77a})$$

$$H_x^i = -\beta_z \left(\frac{a}{\pi}\right) H_0^i \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sin(\omega t - \beta_z z) \quad (\text{E.77b})$$

$$E_y^i = \omega \mu_0 \left(\frac{a}{\pi}\right) H_0^i \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sin(\omega t - \beta_z z) \quad (\text{E.77c})$$

¹¹Se prescinde de los índices l, m y se incluyen las dependencias temporal y longitudinal.

Las componentes normales de \vec{E} y las tangenciales de \vec{H} generan densidades superficiales de carga y de corriente que, de acuerdo con 3.34a y 3.35b, son

$$\vec{n}_s \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (\text{E.78a})$$

$$\vec{n}_s \wedge \vec{H} = \vec{j}_s \quad (\text{E.78b})$$

En la figura E.10 se representa a los campos y las corrientes del modo. En la figura E.10a se muestra la amplitud de la componente $H_z(x, z)$ en un instante determinado y en un intervalo de una longitud de onda a lo largo de la guía. Como los campos de este modo son independientes de y , esta figura es representativa de cualquier sección $y = \text{cte}$. En E.10b y E.10c se muestra a las amplitudes de las componentes $H_x(x, z)$ y $E_y(x, z)$. Por último, en E.10d se dibuja esquemáticamente a las líneas de campo y de corriente en la cara lateral $x = 0$ y en la superior $y = b$. Las cargas superficiales aparecen en las caras superior e inferior de la guía: son positivas en los puntos de origen de las líneas de \vec{E} y negativas en los finales. Las líneas de campo eléctrico son verticales y su intensidad máxima tiene lugar en el centro, mientras que las del campo magnético se mantienen en los planos horizontales y son, como debe ser, cerradas. Las líneas de corriente son perpendiculares a los \vec{H} tangenciales, por lo que son verticales en las caras laterales y curvas, hacia o desde el centro de las caras, en la inferior y la superior. En estas caras, solo es recta la línea de corriente que discurre a lo largo su eje central.

Puesto que los elementos de un circuito de microondas han de ser diseñados específicamente para el modo en que operen, el conocimiento de esta estructura de los campos y corrientes es importante.

Componentes para circuitos TE_{10} :

Un circuito de microondas está compuesto por un conjunto de componentes activos (generadores) y pasivos. La figuras E.11 y E.12 representan a algunos de los componentes pasivos más simples de un circuito de microondas destinado a operar con el modo TE_{10} , dentro de la banda recomendada. En el comportamiento global de estos componentes juegan un papel importante los campos del modo dominante y los de los modos en corte, especialmente aquellos cuyas frecuencias de corte están más próximas a la de trabajo. Como puede verse, la geometría de éstos componentes no corresponde a la de una guía ideal y, en consecuencia, alrededor de las irregularidades se acumula energía electromagnética que corresponde a dichos modos evanescentes y se generan ondas propagativas reflejadas y transmitidas.

Las figuras E.11a-b representan a diversos tipos de ranura. Aquellas practicadas en la dirección de las líneas de corriente del modo que se propaga, se califican de no radiativas porque no perturban apreciablemente a la estructura ideal de los campos. Este tipo de ranura es útil cuando se quiere acceder al interior de la guía sin perturbar excesivamente a los campos. Por el contrario, las ranuras transversales a la dirección de la corriente, las radiativas, interrumpen a dicha corriente y provocan la acumulación de cargas oscilantes, de distinto signo, a ambos lados la misma. La línea de dipolos

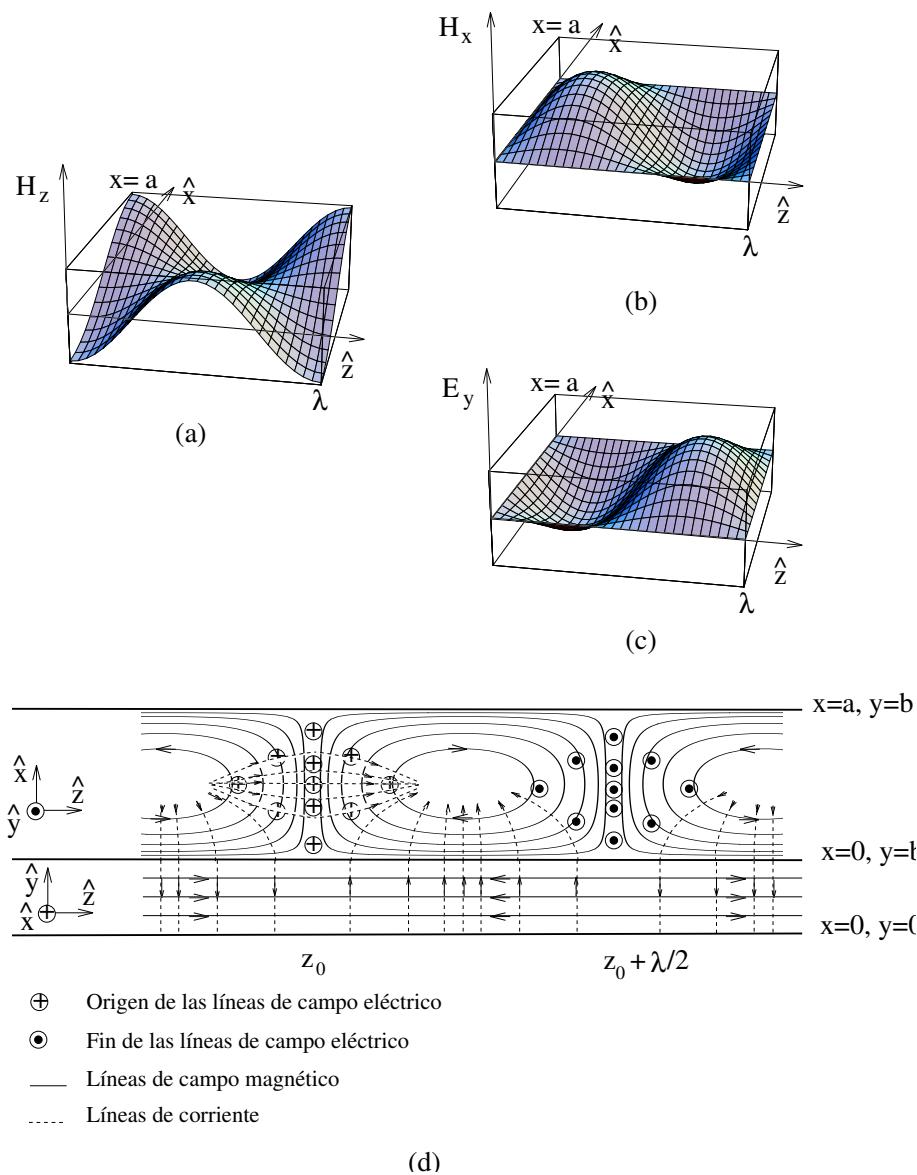
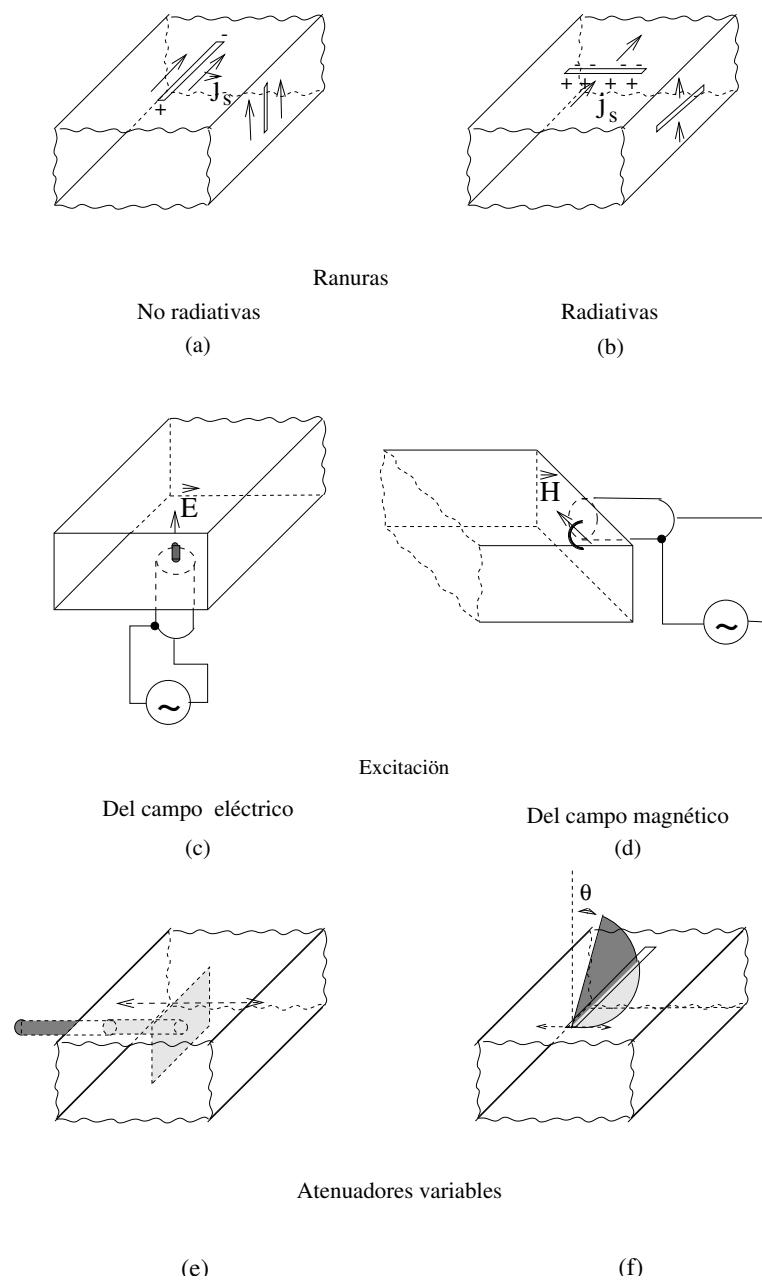
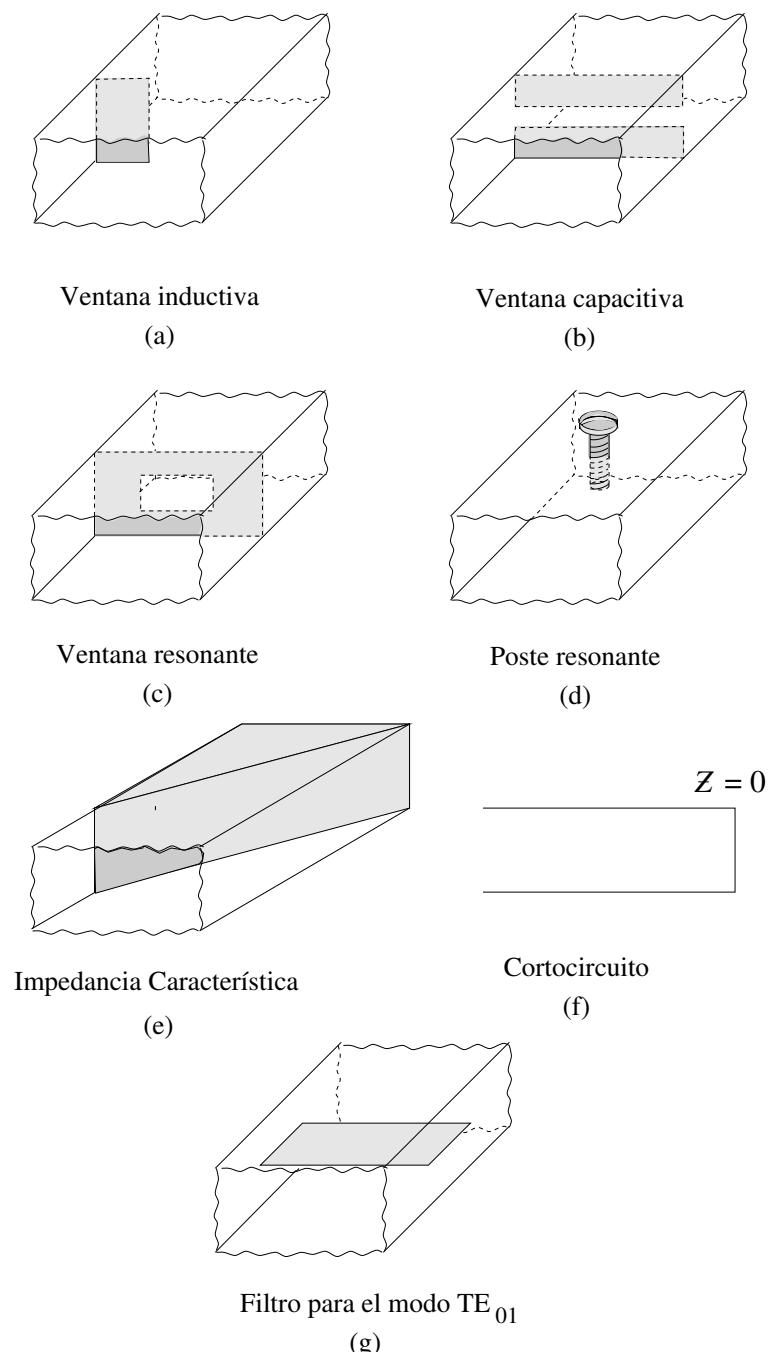


Figura E.10: Campos del modo dominante

Figura E.11: Componentes TE_{10}

Figura E.12: Componentes TE_{10}

así creada radia energía y perturba apreciablemente la estructura de los campos. De esta forma se posibilita el transvase de energía electromagnética entre el interior y el exterior de la guía.

En E.11c-d se muestran dos formas de excitar el modo dominante en la guía a través de una línea coaxial. En el primer caso se hace uso de una pequeña antena lineal, prolongación del conductor interno de la línea, en la posición y dirección del campo eléctrico máximo: a una distancia de $\lambda/4$ de la pared inicial de la guía y de $a/2$ de las paredes laterales de la misma. En el segundo, una antena de lazo excita al campo H_x en condiciones análogas a las que se acaban de describir para E_y .

Las siguientes figuras E.11e-f representan a dos tipos de atenuador variable. Están destinados a disipar una parte variable de la energía del modo y consisten, básicamente, en láminas de conductividad finita colocadas en posición regulable pero tangencial al campo eléctrico de modo. La continuidad de la componente tangencial del campo hace circular corrientes en la lámina que disipan energía, en tanta más cantidad cuanto mayor es la superficie de la placa expuesta al campo eléctrico y cuanto mayor es la amplitud de éste último. En el primer caso, cuando la lámina está próxima a la pared lateral de la guía la atenuación es pequeña y cuando se posiciona en el centro es máxima. Si la lámina fuera conductora ideal, el componente actuaría como un filtro que dificulta la propagación del modo, reflejándolo sin absorción de energía. En el segundo tipo, la lámina está situada en la posición de campo máximo y las distintas atenuaciones se consiguen introduciendo a la lámina en el interior de la guía mediante un giro θ .

Los componentes representados en E.12a-b-c son elementos en los que una lámina conductora ideal, tangencial al campo eléctrico, obstruye parcialmente a la sección transversal de la guía. En la primera, la ventana inductiva, la lámina está situada en una región en la que predomina el campo magnético y su comportamiento es análogo al de una autoinducción. En la segunda, la capacitiva, la interacción predominante es sobre el campo eléctrico, por lo que esta ventana es análoga a un condensador. Por último, la ventana resonante, que comparte características con las dos anteriores, tiene un comportamiento resonante a la frecuencia de trabajo. El poste resonante de la figura E.12d puede comportarse como capacitivo, inductivo o resonante en función de la longitud del tornillo introducida en la guía.

La figura E.12e corresponde a la sección longitudinal de una impedancia acoplada, elemento de gran utilidad en las configuraciones de medida en microondas. Equivale a una impedancia igual a la impedancia característica de la guía y absorbe la casi totalidad de la onda incidente. Esencialmente consiste en una larga cuña de material cuya superficie tiene una conductividad adecuada. El campo eléctrico es tangencial a dicha superficie, la cual genera una corriente que disipa paulatinamente a la onda incidente. De esta forma, la onda reflejada es prácticamente nula. La figura E.12f representa al corte longitudinal de un cortocircuito, es decir, de una impedancia nula ($Z=0$). Consiste en un conductor ideal que cubre totalmente a una sección transversal de la guía. Al ser tangencial al campo eléctrico, anula a éste y el modo es reflejado en su totalidad.

Es interesante resaltar que estos componentes solo ejercen la función que de ellos se espera cuando operan con un modo concreto, el TE_{10} , y dentro de la banda de frecuencias recomendada. Así, la lámina conductora ideal que en E.12g aparece colocada en el plano horizontal $y = b/2$, es totalmente compatible con el modo TE_{10} , porque su campo eléctrico es perpendicular y el magnético tangencial a dicha lámina, mientras que obstaculiza al TE_{01} que tiene análoga estructura de campos

a la del modo anterior pero su campo eléctrico tiene la dirección del eje X y su campo magnético está contenido en los planos $x = cte$. Se trata, por lo tanto, de un filtro, componente de los circuitos de la banda X, destinado a impedir la aparición del modo TE_{01} .

E.1.6. Guía circular

E.1.7. Guía dieléctrica

La guía dieléctrica es actualmente uno de los vehículos más eficaces para la transmisión de información, especialmente una de sus variantes, la fibra óptica. Aquí se estudiarán los aspectos fundamentales de la propagación de ondas en este tipo de guías a través de un ejemplo sencillo: la guía planar, la cual es un componente común en la óptica integrada. Aunque su fundamento radica en el fenómeno de la reflexión total estudiado en la sección D.3.4, aquí se abordará el problema con el mismo procedimiento empleado para el resto de las guías.

En la figura E.13 se muestra una sección transversal de una guía planar simétrica. Está constituida por una lámina plana de dieléctrico, el *Núcleo*, cuya semianchura es d y cuyas constantes son μ_0 y ϵ_n , inmersa entre dos semiespacios infinitos, el *Substrato* y la *Armadura*, que en este caso son idénticos y menos densos que el núcleo: sus constantes son μ_0 y $\epsilon_a < \epsilon_n$. Se plantea un problema bidimensional en el que se buscan modos que se propagan en la dirección Z y que no dependen de la variable y ($\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow 0$).

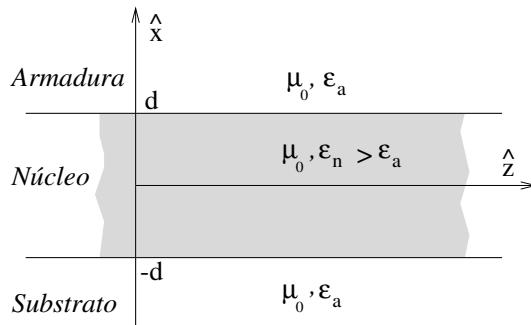


Figura E.13: Guía dieléctrica simétrica

Como en ocasiones anteriores, la componente longitudinal del campo que se propaga en el sentido positivo del eje Z , para cualquiera de las polarizaciones TE o TM y, en cualquiera de los tres medios, puede escribirse de la forma

$$X_z(x, z, t) = X_{zt}(x) e^{j(\omega t - \beta_z z)} \quad (\text{E.79})$$

donde $X_{zt}(x)$ es la función transversal. Esta componente es tangencial a las superficies que separan a los distintos medios, por lo que debe ser continua para cualesquiera t y z , lo que exige que la frecuencia ω y la constante de propagación longitudinal β_z tomen los mismos valores en todos ellos.

$X_{zt}(x)$ juega el papel de potencial de Debye y es, por lo tanto, solución de la ecuación E.31

$$\frac{d^2}{dx^2} X_{zt}(x) = -\beta_c^2 X_{zt}(x) \quad (\text{E.80})$$

En este caso, β_c no tiene el sentido de constante de corte que posé en las guías metálicas, pero sigue cumpliendo relaciones de dispersión del tipo de E.7.

Para que la onda se propague sin atenuación, ω y β_z deben ser reales y, como ya se ha establecido, toman los mismos valores en los tres medios. No ocurre lo mismo con β y β_c . La primera toma los valores reales pero distintos

$$\beta \rightarrow \begin{cases} \beta_n \equiv \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_n} & , , \text{ núcleo} \\ \beta_a \equiv \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_a} & , , \text{ armadura y substrato} \end{cases} \quad (\text{E.81})$$

β_c puede tomar valores imaginarios ¹². Para modos guiados, que estén confinados en el entorno del núcleo, es conveniente escribir

$$\beta_c^2 \rightarrow \begin{cases} \kappa^2 & , , \text{ núcleo} \\ -\nu^2 & , , \text{ armadura y substrato} \end{cases} \quad (\text{E.82})$$

con κ y ν reales y positivos. Con esta notación, las relaciones de dispersión se expresan de la forma

$$\beta_z^2 = \beta^2 - \beta_c^2 \rightarrow \begin{cases} \beta_z^2 = \beta_n^2 - \kappa^2 & , , \text{ núcleo} \\ \beta_z^2 = \beta_a^2 + \nu^2 & , , \text{ armadura y substrato} \end{cases} \quad (\text{E.83})$$

De la igualdad de β_z en todos los medios se deducen dos propiedades fundamentales de estas guías:

$$\beta_z^2 = \beta_n^2 - \kappa^2 = \beta_a^2 + \nu^2 \Rightarrow \beta_a < \beta_z < \beta_n \quad (\text{E.84})$$

Si κ y ν son reales y positivos, la constante de propagación longitudinal β_z tiene por cota superior a β_n y por cota inferior a β_a . Esto significa, en primer lugar, que $\varepsilon_a < \varepsilon_n$, lo que confirma que el núcleo debe ser más denso que los medios exteriores por lo que la onda se confina por reflexión total, desde el primero, en las superficies de separación con los segundos. En segundo lugar, puesto que las condiciones de frontera harán que el espectro de las κ , ν y β_z sea discreto para una frecuencia dada, a dicha frecuencia solo podrá propagarse un número finito de modos, propiedad que esta guía comparte con las que anteriormente se han estudiado.

Si se concreta este desarrollo para los modos TE , la solución de la componente longitudinal se expresará, de forma general, como

$$H_z(x) = \begin{cases} C e^{-\nu x} & , \quad x > d \quad \text{armadura} \\ A \sin(\kappa x) + B \cos(\kappa x) & , \quad -d \leq x \leq d \quad \text{núcleo} \\ D e^{\nu x} & , \quad x < -d \quad \text{substrato} \end{cases} \quad (\text{E.85})$$

¹²Si a β_c se le da un valor complejo, β_z toma también un valor complejo, puesto que debe cumplir la relación de dispersión, y β es real. La onda resultante se atenúa en la dirección de propagación. Este tipo de modos se denominan radiativos o "leaky" τ son necesarios para completar la base de las posibles soluciones pero, en lo que sigue, no serán tenidos en cuenta.

En el substrato y en la armadura, si ν es real, la solución general es una combinación de exponenciales reales. En el primero dicha solución debe ser acotada para $x \rightarrow -\infty$ por lo que solo se puede considerar la contribución del exponencial positivo. En la segunda, la convergencia debe tener lugar cuando $x \rightarrow \infty$, por lo que se toma la solución exponencial negativa. A, B, C y D son constantes, tres de las cuales se determinarán en función de una de ellas mediante el uso de las condiciones de contorno. Para cumplimentar a estas últimas, solo es necesario exigir la continuidad de las componentes tangenciales de \vec{E} y \vec{H} en los planos $x = \pm d$, pues, de esta manera, como puede comprobarse, se asegura la continuidad de las componentes de los campos normales a dichos planos (B_x en el caso TE y D_x en el caso TM).

Dada la simetría del problema, es conveniente considerar por separado a los modos *Pares*, en los cuales $B = 0$, y a los modos impares ($A = 0$)¹³. Imponiendo la continuidad de H_z en $x = \pm d$ para los modos pares, se tiene que

$$H_z(x) = \begin{cases} A \operatorname{sen}(\kappa d) e^{-\nu(x-d)} & , \quad x > d \quad \text{armadura} \\ A \operatorname{sen}(\kappa x) & , \quad -d \leq x \leq d \quad \text{núcleo} \\ -A \operatorname{sen}(\kappa d) e^{\nu(x+d)} & , \quad x < -d \quad \text{substrato} \end{cases} \quad (\text{E.86})$$

La componente transversal del campo magnético se obtiene a partir del potencial Φ^{TE} definido en E.32

$$\Phi^{TE} = \begin{cases} j \frac{\beta_z}{\nu^2} H_z & , \quad \text{armadura y substrato} \\ -j \frac{\beta_z}{\kappa^2} H_z & , \quad \text{núcleo} \end{cases} \quad (\text{E.87})$$

mediante el gradiente transversal E.34a

$$\vec{H}_t = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \Phi^{TE}$$

luego

$$H_x(x) = \begin{cases} -j \frac{\beta_z}{\nu} A \operatorname{sen}(\kappa d) e^{-\nu(x-d)} & , \quad x > d \quad \text{armadura} \\ -j \frac{\beta_z}{\kappa} A \cos(\kappa x) & , \quad -d \leq x \leq d \quad \text{núcleo} \\ -j \frac{\beta_z}{\nu} A \operatorname{sen}(\kappa d) e^{\nu(x+d)} & , \quad x < -d \quad \text{substrato} \end{cases} \quad (\text{E.88})$$

El campo eléctrico se obtiene de la componente transversal del magnético según E.34b, resultando

$$\vec{E}^{TE} = -Z^{TE} H_x \hat{y} \quad , \quad Z^{TE} = \frac{\omega \mu_0}{\beta_z}$$

y

¹³La paridad aludida en estas definiciones se refiere a las componentes transversales. La de las longitudinales es precisamente la contraria.

$$\vec{E}_y(x) = \begin{cases} \frac{\omega\mu_0}{\nu} A \sin(\kappa d) e^{-\nu(x-d)} & , \quad x > d \quad \text{armadura} \\ \frac{\omega\mu_0}{\kappa} A \cos(\kappa x) & , \quad -d \leq x \leq d \quad \text{núcleo} \\ \frac{\omega\mu_0}{\nu} A \sin(\kappa d) e^{\nu(x+d)} & , \quad x < -d \quad \text{substrato} \end{cases} \quad (\text{E.89})$$

Como puede comprobarse, la simetría de las componentes transversales es, efectivamente, par.

Pero el problema no está completamente resuelto puesto que, como ya se ha comentado, no todos los valores de κ , ν y β_z son compatibles con las condiciones de contorno impuestas: además de la continuidad de H_z , hay que asegurarse de que E_y también lo es.

Dada la simetría de la guía, basta con exigir la continuidad de E_y en una de las superficies $x = \pm d$. Esto conduce a la condición

$$\frac{1}{\kappa} \cos(\kappa d) = \frac{1}{\nu} \sin(\kappa d) \Rightarrow b = a \operatorname{tg}(a) \quad (\text{E.90})$$

o *Ecuación característica* de los modos pares, donde se ha utilizado la notación $a \equiv \kappa d$ y $b \equiv \nu d$.

Procediendo de forma análoga para los modos pares se obtiene la ecuación característica de los modos impares

$$b = -a \operatorname{cotg}(a) \quad (\text{E.91})$$

Por otra parte, de E.84 se deduce que

$$a^2 + b^2 = R^2 \quad (\text{E.92})$$

donde

$$R \equiv \omega d \sqrt{\mu_0(\varepsilon_n - \varepsilon_a)} \quad (\text{E.93})$$

es el radio de un círculo en el plano ab .

Para encontrar los valores posibles de a y de b se ha de resolver un sistema de ecuaciones trascendente: E.92 y E.90 para los modos pares y E.92 y E.91 para los impares. Esto solo es posible hacerlo de forma gráfica o numérica, como se indica en la figura E.14. En la parte superior de la gráfica se superponen, en el plano ab , las ecuaciones características de los modos pares e impares y se determinan las intersecciones con el círculo de radio R . En la parte inferior se representa a la parte negativa de la función

$$f(a) = a \operatorname{tg}(a) - b = a \operatorname{tg}(a) - \sqrt{R^2 - a^2} \quad (\text{E.94})$$

, correspondiente a los modos pares, y se marcan sus ceros (éstos pueden obtenerse numéricamente mediante cualquier rutina de extracción de raíces).

Por cualquiera de estos procedimientos se obtienen las parejas de valores posibles (a_m, b_m) y, haciendo uso de la relación E.84, las β_{zm} ($m = 0, 1, \dots$) correspondientes a los modos pares e

impares. Como se desprende de la gráfica superior, el número de modos que se puede propagar a una frecuencia determinada, es finito (cinco, de 0 a 4 en el ejemplo gráfico). El número máximo de modos que pueden propagarse viene dado por la condición

$$m \frac{1}{2} \pi < R \quad (\text{E.95})$$

como puede verse en la figura, dado que las curvas $b = a \operatorname{tg}(a)$ y $b = -a \operatorname{cotg}(a)$ cortan al eje a en los puntos $a = m \frac{1}{2} \pi$. De esta condición y de E.93 se deduce la *Frecuencia de corte*, por debajo de la cual no se propaga un determinado modo de índice m , es

$$\omega_m^c = \frac{m \pi}{2d \sqrt{\mu_0(\varepsilon_n - \varepsilon_a)}} \quad (\text{E.96})$$

Los modos TM tienen por componentes a E_z , E_x y H_y y su análisis es paralelo al anterior. Las ecuaciones características son, en este caso

$$b = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_n} a \operatorname{tg}(a), \text{ modos pares}, \quad b = -\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_n} a \operatorname{cotg}(a), \text{ modos impares} \quad (\text{E.97})$$

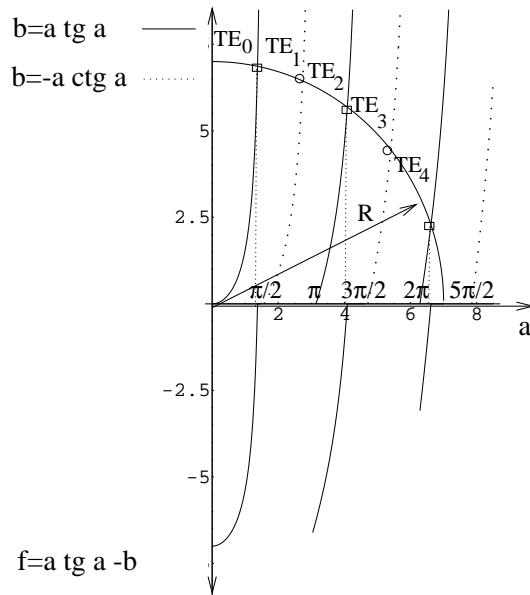


Figura E.14: Modos de un guía dieléctrica simétrica: Determinación de las constantes.

E.1.8. Transmisión de potencia. Funciones tensión e intensidad

Transmisión de potencia :

En una guía ideal, la potencia transportada a lo largo de la misma, en la dirección $+\hat{z}$, se obtiene integrando al vector de Poynting a través de la superficie transversal, en el dieléctrico, con $d\vec{s} = \hat{z} ds$. Así, el valor medio de dicha potencia es

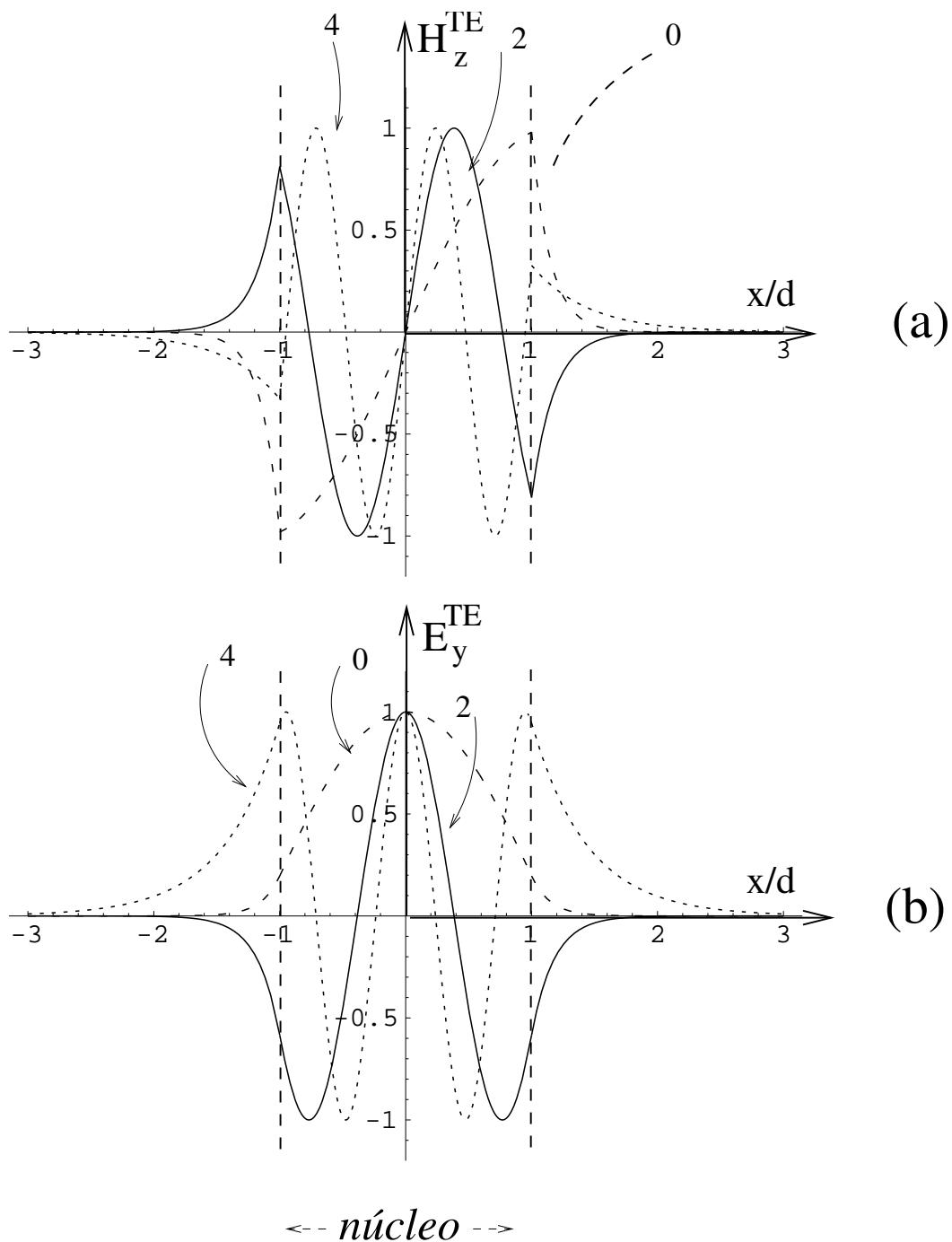


Figura E.15: Modos pares :(a) Componente H_z . (b) Componente E_y .

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{\mathcal{S}_t} \vec{\mathcal{S}}_z^c \cdot d\vec{s} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{\mathcal{S}_t} \vec{E}_t \wedge \vec{H}_t^* \cdot d\vec{s} \right] \quad (\text{E.98})$$

donde solo la componente longitudinal $\vec{\mathcal{S}}_z^c$ contribuye a la integral. Para un modo determinado de impedancia Z^M (E.36, E.40 o E.44)

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{S}}_z^c \cdot \hat{z} &= E_t H_t^* = \frac{1}{Z^{M*}} (E_t^i e^{-j\beta_z z} + E_t^r e^{j\beta_z z})(E_t^{i*} e^{j\beta_z z} - E_t^{r*} e^{-j\beta_z z}) \\ &= \frac{1}{Z^{M*}} (|\vec{E}_t^i|^2 - |\vec{E}_t^r|^2) \underbrace{- E_t^i E_t^{r*} e^{-2j\beta_z z} + E_t^r E_t^{i*} e^{2j\beta_z z}}_{(a)} \end{aligned} \quad (\text{E.99a})$$

En el caso de los modos propagativos, $Z^M = Z^{M*}$ es real y (a), que es la diferencia de un número complejo y su conjugado, imaginario puro. Introduciendo este desarrollo en E.98 y hallando la parte real se tiene que

$$\langle P \rangle = \langle P_i \rangle - \langle P_r \rangle \quad (\text{E.100})$$

donde

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}_t} \vec{E}_t^i \wedge \vec{H}_t^{i*} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2Z^M} \int_{\mathcal{S}_t} |\vec{E}_t^i|^2 ds \quad (\text{E.101a})$$

$$\langle P_r \rangle = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}_t} \vec{E}_t^r \wedge \vec{H}_t^{r*} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2Z^M} \int_{\mathcal{S}_t} |\vec{E}_t^r|^2 ds \quad (\text{E.101b})$$

Para un modo evanescente, incidente o reflejado, Z^M y β_z son imaginarias puras y la potencia media transmitida es nula.

Luego, en las guías ideales, la potencia media es transportada independientemente por la onda incidente y la reflejada¹⁴, siendo la potencia $\langle P \rangle$ transmitida en la dirección $+\hat{z}$ la diferencia entre las transportadas por estas dos ondas.

La potencia transportada por las líneas ideales puede expresarse en función de las tensiones e intensidades definidas en E.1.4 para el modo TEM. En la figura E.16 se presenta a la sección transversal de una línea, constituida por un dieléctrico y dos conductores ideales A y B (el razonamiento puede generalizarse a líneas multiconductoras), y se dibujan las curvas coordenadas $q_a = cte$ y $q_b = cte$ de un determinado sistema de coordenadas. En la curva \mathcal{L}_a , $q_b = cte$: comienza en el conductor A y termina en el B . La \mathcal{L}_b circunda a los conductores y en ella $q_a = cte$. Los

¹⁴Esto no es cierto en las guías con pérdidas. En este caso, también transportan energía los modos evanescentes.

sentidos de recorrido han sido elegidos de forma que $\hat{e}_a \wedge \hat{e}_b$ tenga la dirección y el sentido de \hat{z} ¹⁵, con lo que

$$d\vec{s} = d\vec{l}_a \wedge d\vec{l}_b = dl_a \hat{e}_a \wedge dl_b \hat{e}_b$$

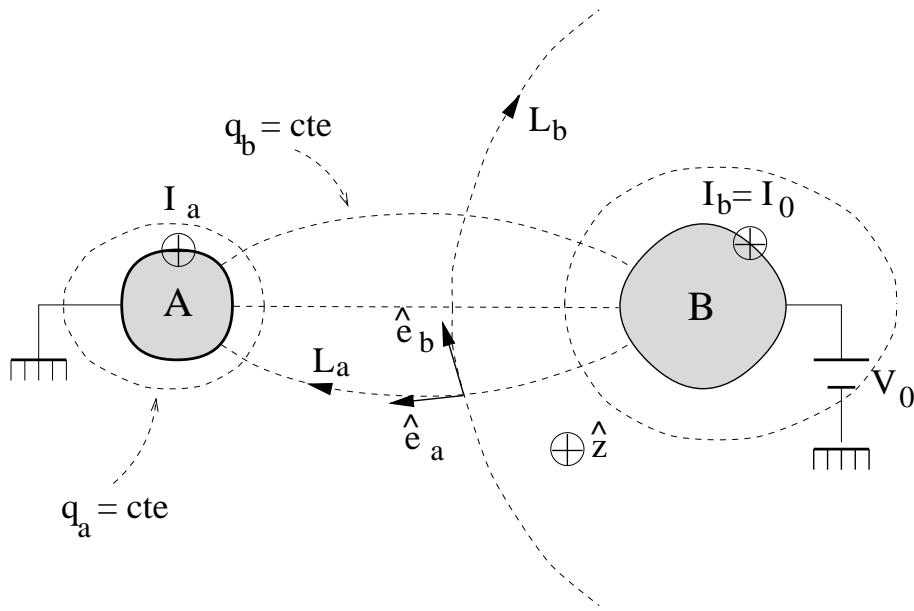


Figura E.16: Línea bifilar

Con objeto de calcular la potencia incidente, el producto escalar

$$\vec{E}_t^i \wedge \vec{H}_t^{i*} \cdot d\vec{s} = (\vec{E}_t^i \wedge \vec{H}_t^{i*}) \cdot (dl_a \wedge dl_b)$$

se desarrolla mediante el uso de las reglas de los productos vectoriales mixto y triple. Sustituyendo el resultado en E.101a

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}_a} \underbrace{\left(\oint_{\mathcal{L}_b} \vec{H}_t^{i*} \cdot dl_b \right) \vec{E}_t^i \cdot dl_a}_{(a)} - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}_a} \underbrace{\left(\oint_{\mathcal{L}_b} \vec{E}_t^i \cdot dl_b \right) \vec{H}_t^{i*} \cdot dl_a}_{(b)}$$

Como \mathcal{L}_b es un camino cerrado y \vec{E}_t un campo de tipo electrostático, la integral (b) se anula. La integral (a) circunda negativamente al conductor A y en sentido positivo al B, por lo que $(a) = I_0^*$ es una constante y puede sacarse de la integral sobre \mathcal{L}_a . De acuerdo con la definición E.50,

¹⁵Los vectores coordenados \hat{e} se toman unitarios, pero no necesariamente ortogonales.

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_i I_i^*] = \frac{1}{2} V_i I_i^* \quad (\text{E.102a})$$

$$\langle P_r \rangle = \frac{1}{2} V_r I_r^* \quad (\text{E.102b})$$

Funciones tensión e intensidad :

También pueden definirse funciones tensión e intensidad para modos no TEM , tanto incidentes como reflejados, aunque de forma no tan directa como la utilizada con el TEM , [Atwater] y [Collin]. Estas definiciones permiten extender la utilidad de las ecuaciones de propagación E.54 y las de la potencia E.102 para dichos modos. Para ello, es interesante resaltar que todas las componentes de un modo derivan de una sola, la longitudinal, y que, debido a las relaciones de estructura, \vec{E}_t y \vec{H}_t tienen la misma dependencia funcional de las variables transversales ($\operatorname{sen}(\pi \frac{x}{a})$) para el modo TE_{10}) y la relación dimensional entre ellos es la misma que entre V e I : $[E/H] = [V/I] = [Z]$. Pueden tomarse las amplitudes, normalizadas mediante constantes adecuadas, como funciones de tensión e intensidad y es conveniente elegir a dichas constantes de forma que se cumplan las expresiones E.102. Si se cumple E.102a, debe cumplirse, según E.101a,

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2Z^M} \int_{S_t} |\vec{E}_t^i|^2 ds = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_i I_i^*]$$

Si, se define la *Impedancia característica* del modo en la guía, por analogía con E.52, de forma que cumpla la relación

$$\mathcal{Z}_c = \frac{V_i}{I_i} = -\frac{V_r}{I_r} \quad (\text{E.103})$$

$$|V_i| = \left(\frac{\mathcal{Z}_c}{Z^M} \int_{S_t} |\vec{E}_t^i|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{S_t} |\vec{E}_t^i|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{E.104})$$

Al escribir la última igualdad, se ha optado por asignar a la impedancia característica el valor de la del modo

$$\mathcal{Z}_c \equiv Z^M \quad (\text{E.105})$$

Esta no es la única posibilidad. Suele también definirse $\mathcal{Z}_c \equiv 1$, con lo que se obtienen las tensiones e intensidades "normalizadas", además, como puede comprobarse, la definición de la impedancia característica de las líneas que se ha propuesto en E.52 no coincide con ninguna de las anteriores.

De esta forma queda definido $|V_i|$ y, según E.103, $|I_i|$. Queda por definir la fase de la tensión y la de la intensidad. Puesto que los modos son linealmente polarizados, las componentes de \vec{E}^i tienen

la misma fase φ_{E_i} y las de \vec{H}^i la φ_{H_i} . Por otra parte, de acuerdo con las relaciones de estructura de las componentes transversales y con E.103

$$Z^M = \frac{E_t^i}{H_t^i} = \frac{V_i}{I_i} \Rightarrow \varphi_{ZM} = \varphi_{E_i} - \varphi_{H_i} = \varphi_{V_i} - \varphi_{I_i}$$

por lo que pueden definirse las fases de la tensión y la intensidad de la forma¹⁶

$$\varphi_{V_i} \equiv \varphi_{E_i} , , \quad \varphi_{I_i} \equiv \varphi_{H_i} \quad (\text{E.106})$$

Definidas, de una u otra forma, la tensión y la intensidad de los modos incidente y reflejado, las ecuaciones que describen la evolución de estas funciones a lo largo de una guía ideal son análogas a las correspondientes de las líneas de transmisión E.54

$$V(z) = V_i e^{-j\beta_z z} + V_r e^{j\beta_z z} \quad (\text{E.107a})$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_c} (V_i e^{-j\beta_z z} - V_r e^{j\beta_z z}) \quad (\text{E.107b})$$

por lo que, dentro de este formalismo, todos los modos pueden ser tratados individualmente de igual forma.

E.1.9. Pérdidas en las guías

Cuando las pérdidas debidas a la conductividad finita de las paredes de una guía, o al carácter dispersivo de su medio interno, son grandes, la estructura de modos se ve fuertemente modificada y el análisis de la propagación se complica considerablemente. Pero, en la práctica, dentro de la banda de frecuencias recomendada, dichas pérdidas son muy pequeñas y su efecto puede ser tenido en cuenta considerándolo como una perturbación de pequeña magnitud de la estructura ideal de los modos. En general, las guías de pared metálica están vacías, llenas de aire, y sus pérdidas se deben fundamentalmente a la absorción de energía en las paredes. A continuación se analiza este último caso.

Considérese una onda incidente en la guía, que se propaga en el sentido positivo del eje Z , y sea $\langle P'_d \rangle$ la potencia media que disipa por unidad de longitud de guía y $\langle P \rangle$ la potencia media que transmite a través de la sección transversal de la misma. El principio de conservación de la energía exige que

$$\langle P'_d \rangle = - \frac{d \langle P \rangle}{dz} \quad (\text{E.108})$$

Si se supone que las pérdidas de potencia en la pared son proporcionales a la que se transmite a lo largo de la guía

¹⁶En las guías ideales, $\varphi_{H_i} = \varphi_{E_i} \Rightarrow \varphi_{I_i} = \varphi_{V_i}$.

$$\langle P'_d \rangle = \alpha_w \langle P \rangle \Rightarrow \frac{d \langle P \rangle}{dz} = -\alpha_w \langle P \rangle$$

donde α_w es la constante de atenuación de la energía.

La solución de esta última ecuación es

$$\langle P \rangle = \langle P \rangle_0 e^{-\alpha_w z}$$

lo que significa que el valor medio de la potencia transmitida a través de una sección transversal S_t en el punto z se atenúa exponencialmente al avanzar a lo largo de la guía. Puesto que la energía tiene una constante de atenuación doble a la correspondiente a las amplitudes de los campos,

$$\alpha_z = \frac{\alpha_w}{2} = \frac{\langle P'_d \rangle}{2 \langle P \rangle} \quad (\text{E.109})$$

Para el cálculo de α_z , la constante de atenuación de la amplitud, es conveniente expresar ambas potencias en función del campo magnético.

De acuerdo con D.50, la potencia disipada en una superficie metálica S' , cuyo radio de curvatura sea grande comparado con la profundidad de penetración pelicular, es

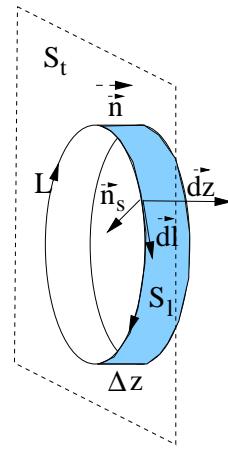


Figura E.17: Segmento de guía

$$\langle P_d \rangle = \frac{1}{2} R_s \int_{S'} |\vec{H}_T|^2 ds' \quad (\text{E.110})$$

por lo que la potencia disipada por unidad de longitud puede calcularse, véase la figura E.17, como

$$\langle P'_d \rangle = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta z} R_s \int_{S'} |\vec{H}_T|^2 dl dz \simeq \frac{1}{2} R_s \oint_L |\vec{H}|^2 dl \quad (\text{E.111})$$

Para escribir la última aproximación se ha tenido en cuenta que la componente normal del campo magnético es muy pequeña, puesto que la pared se comporta como un buen conductor. De acuerdo con ésto, introduciendo la expresión de $\langle P \rangle$ dada en E.101a

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \int_{S_t} \vec{E}_t \wedge \vec{H}_t^* \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} Z^M \int_{S_t} |\vec{H}_t|^2 ds \quad (\text{E.112})$$

con lo que

$$\alpha_z = \frac{1}{2} \frac{R_s}{Z^M} \frac{\oint_L |\vec{H}|^2 dl}{\int_{S_t} |\vec{H}_t|^2 ds} \quad (\text{E.113})$$

Es interesante investigar la dependencia de la constante de atenuación con respecto a la frecuencia. De D.50 se deduce que $R_s \sim f^{\frac{1}{2}}$ y, si se define a la frecuencia normalizada como $f_n \equiv \frac{\omega}{\omega_c}$, de E.44 que $Z^{TEM} = cte$, de E.35 que $Z^{TE} \sim \frac{f_n}{\sqrt{f_n^2 - 1}}$, de E.39 que $Z^{TM} \sim \frac{\sqrt{f_n^2 - 1}}{f_n}$. Por otra parte, la integral sobre L puede descomponerse en dos si se tiene en cuenta que

$$|\vec{H}|^2 \simeq |\vec{H}_T|^2 = |\vec{H}_t|^2 + |\vec{H}_z|^2$$

y que, de acuerdo con E.32, $\Phi^{TE} \sim \beta_z H_z$

$$|\vec{H}_z|^2 \sim \frac{1}{\beta_z^2} |\vec{H}_t|^2 \sim \frac{1}{f_n^2 - 1} |\vec{H}_t|^2$$

Sustituyendo en E.113 las dependencias funcionales para cada tipo de modo, se tiene que¹⁷

$$\alpha_{z_{TEM}} = C_1 \underbrace{f^{\frac{1}{2}}}_{(a)} \quad (\text{E.114a})$$

$$\alpha_{z_{TE}} = C_2 \underbrace{\frac{f_n^{3/2}}{\sqrt{f_n^2 - 1}}}_{(b)} + C_3 \underbrace{\frac{f_n^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{f_n^2 - 1}}}_{(c)} \quad (\text{E.114b})$$

$$\alpha_{z_{TM}} = C_4 \frac{f_n^{3/2}}{\sqrt{f_n^2 - 1}} \quad (\text{E.114c})$$

donde las C son independientes de la frecuencia.

En la figura E.18 se muestran los distintos términos que aparecen en las ecuaciones anteriores, en función de la frecuencia. El (a) correspondiente a las líneas de transmisión operando en el modo TEM crece con la frecuencia¹⁸. El (b), común a los modos TE y TM , tiene un mínimo para $f_n = \sqrt{3}$, mientras que el (c), que solo aparece en los modos TE , decrece monótonamente con la frecuencia. En la figura E.19 se representa la dependencia de la constante de atenuación, en $Nepers \cdot m^{-1}$, para guías de la banda X con pared de cobre. Como puede verse, el modo TE_{10} es el que menos pérdidas presenta dentro de un amplio margen de frecuencias.

¹⁷ $\alpha_{z_{TEM}}$ no se normaliza porque $f_{c_{TEM}} = 0$.

¹⁸ En este caso, la contribución del dieléctrico suele ser más importante que la de las paredes.

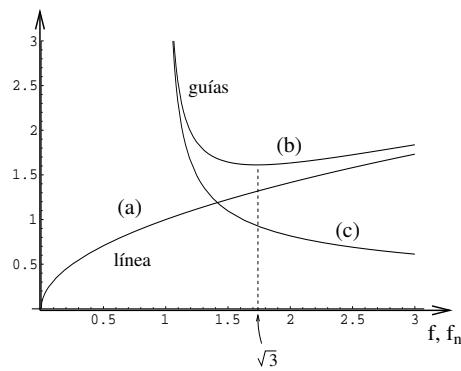


Figura E.18: Contribuciones a las pérdidas

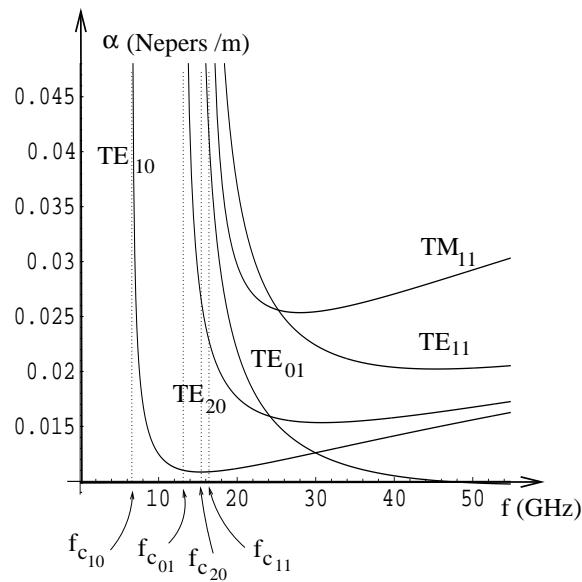


Figura E.19: Pérdidas en las paredes de una guía

E.1.10. El segmento de guía como componente de parámetros distribuidos

Circuito equivalente :

En el uso normal de las guías no es necesario el conocimiento detallado de la estructura de los campos: es suficiente con el uso de las ecuaciones de propagación E.107 y con modelar a los componentes como circuitos de parámetros distribuidos o localizados.

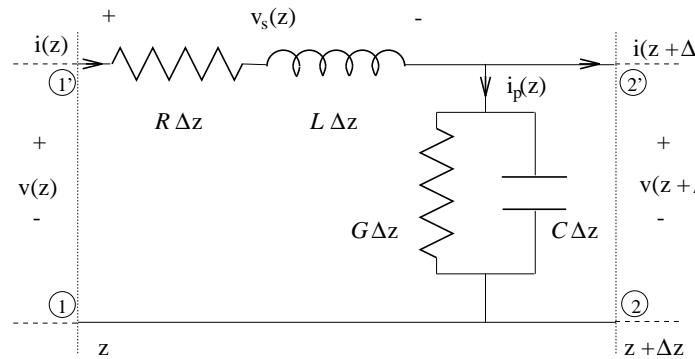


Figura E.20: Circuito equivalente

Puede comprobarse que una guía, incluidas las posibles pérdidas en las paredes y en el dieléctrico, se comportan de forma análoga al circuito de parámetros distribuidos de la figura E.20 en la que se representa al circuito equivalente de un pequeño segmento de guía de longitud $\Delta z \ll \lambda_{z_{min}}^{19}$. R es la *Resistencia equivalente* por unidad de longitud de la guía y representa, principalmente²⁰, a las pérdidas a lo largo de una longitud unidad de la pared. G es la *Conductancia equivalente* por unidad de longitud de la guía y representa a las pérdidas debidas a los flujos de corriente, de conducción y de desplazamiento, transversales a la guía. De igual forma, L es la *Autoinducción equivalente* y C la *Capacidad equivalente* por unidad de longitud de la guía.

Los parámetros equivalentes son, en general, función de la frecuencia. Esta circunstancia hace que el tratamiento del circuito equivalente en el dominio del tiempo solo sea relativamente sencillo en el supuesto de que, dentro del ancho de banda de trabajo, dichos parámetros puedan ser considerados como constantes. Este suele ser el caso de las líneas de transmisión cuando se propaga por ellas el modo TEM.

Ecuaciones en el dominio del tiempo :

Sean $v(z, t)$ e $i(z, t)$ la tensión y la intensidad en el dominio del tiempo. Sus valores en $z + \Delta z$, es decir, en la puerta $(2 - 2')$, son

$$v(z + \Delta z, t) \simeq v(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} v(z, t) \Delta z \quad , \quad i(z + \Delta z, t) \simeq i(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} i(z, t) \Delta z$$

¹⁹ $\lambda_{z_{min}}$ es la mínima longitud de onda de la banda de frecuencias utilizada.

²⁰ El dieléctrico puede también contribuir a estas pérdidas.

Si se aplican las leyes de Kirchhoff a la rama serie ($1' - 2'$), resulta que

$$\begin{aligned} v_s(z, t) &= v(z, t) - v(z + \Delta z, t) \simeq \\ &\simeq -\Delta z \frac{\partial}{\partial z} v(z, t) = \Delta z (\mathcal{R} + \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial t}) i(z, t) \end{aligned}$$

Haciéndolo con la rama paralelo ($2' - 2$), el resultado es

$$\begin{aligned} i_p(z, t) &= i(z, t) - i(z + \Delta z, t) \simeq \\ &\simeq -\Delta z \frac{\partial}{\partial z} i(z, t) = \Delta z (\mathcal{G} + \mathcal{C} \frac{\partial}{\partial t}) v(z, t) \end{aligned}$$

Dividiendo por Δz a las ecuaciones anteriores se obtienen las de v e i en el dominio del tiempo²¹

$$\frac{\partial}{\partial z} v(z, t) = -(\mathcal{R} + \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial t}) i(z, t) \quad (\text{E.117a})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} i(z, t) = -(\mathcal{G} + \mathcal{C} \frac{\partial}{\partial t}) v(z, t) \quad (\text{E.117b})$$

Las ecuaciones de onda correspondientes, *Ecuaciones del telegrafista*, resultan de la eliminación de una de las variables dependientes de la ecuación anterior

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mathcal{LC} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\mathcal{RC} + \mathcal{GL}) \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{RG} \right) \begin{Bmatrix} v(z, t) \\ i(z, t) \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{E.118})$$

Ecuaciones en el dominio de la frecuencia :

La ecuaciones en el dominio de la frecuencia pueden obtenerse transformando por Fourier a las anteriores o aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito equivalente

$$\frac{d}{dz} V(z) = -\mathcal{Z} I(z) \quad , \quad \mathcal{Z} \equiv \mathcal{R} + j\omega \mathcal{L} \quad (\text{E.119a})$$

$$\frac{d}{dz} I(z) = -\mathcal{Y} V(z) \quad , \quad \mathcal{Y} \equiv \mathcal{G} + j\omega \mathcal{C} \quad (\text{E.119b})$$

²¹Las ecuaciones en el dominio del tiempo solo tienen la forma simple que se presenta en las ecuaciones anteriores en el caso de las líneas de transmisión puesto que en las guías, que son esencialmente dispersivas, los parámetros equivalentes deberían expresarse como integrales de convolución o, en el dominio de la frecuencia, como funciones de ésta.

\mathcal{Z} es la *Impedancia equivalente* e \mathcal{Y} la *Admitancia equivalente* por unidad de longitud de la guía. \mathcal{R} , \mathcal{G} , \mathcal{L} y \mathcal{C} pueden ser función de la frecuencia. De estas ecuaciones se deducen las de onda

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \gamma_z^2 \right) \begin{Bmatrix} V(z) \\ I(z) \end{Bmatrix} = 0 \quad , \quad \gamma_z^2 \equiv \mathcal{Y}\mathcal{Z} \quad , \quad \gamma_z = \alpha_z + j\beta_z \quad (\text{E.120})$$

γ_z es la constante de propagación compleja del modo en la guía.

Hallando la solución general para V e I y sustituyendo en E.119 se obtienen las ecuaciones

$$V(z) = V_i e^{-\gamma_z z} + V_r e^{\gamma_z z} \quad (\text{E.121a})$$

$$I(z) = \frac{1}{\mathcal{Z}_c} (V_i e^{-\gamma_z z} - V_r e^{\gamma_z z}) \quad (\text{E.121b})$$

donde la impedancia característica viene dada por

$$\mathcal{Z}_c = \sqrt{\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Y}}} \quad (\text{E.122})$$

Se comprueba que, efectivamente, el circuito equivalente propuesto modela correctamente a la propagación guiada del modo M .

Aproximación de pérdidas pequeñas :

Las guías se fabrican de forma que, dentro de la banda recomendada de frecuencias, los dieléctricos y conductores sean buenos y las pérdidas pequeñas. Se puede definir esta aproximación mediante la condición de que las partes reales de la impedancia y la admitancia equivalentes sean mucho más pequeñas que las imaginarias:

$$x \equiv \frac{\mathcal{R}}{\omega\mathcal{L}} \ll 1 \quad , \quad y \equiv \frac{\mathcal{G}}{\omega\mathcal{C}} \ll 1 \quad (\text{E.123})$$

Escribiendo la constante de propagación E.120 en función de x e y

$$\gamma_z = k \sqrt{(x+j)(y+j)} \quad , \quad k = \omega \sqrt{\mathcal{LC}}$$

y aproximando hasta el segundo orden de las magnitudes pequeñas,

$$\alpha_z \simeq \frac{k}{2} (x+y) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{R} \sqrt{\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{L}}} + \mathcal{G} \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} \right) \quad (\text{E.124a})$$

$$\beta_z \simeq k [1 + \frac{1}{8} (x - y)^2] = \omega \sqrt{\mathcal{LC}} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\mathcal{R}}{\omega \mathcal{L}} - \frac{\mathcal{G}}{\omega \mathcal{C}} \right)^2 \right] \quad (\text{E.124b})$$

Como puede verse, $\alpha_z \ll \beta_z$ lo que permite despreciar los efectos de atenuación en la mayoría de los casos. No obstante, cuando las guías son muy largas, se emplean para frecuencias relativamente altas, transportan una potencia elevada, o constituyen elementos resonantes, el papel de dichas pérdidas es importante y ha de ser tenido en cuenta. Como ya se ha visto, en el caso de los modos TE y TM, la constante de propagación es inherentemente dispersiva por lo que los parámetros equivalentes son, a su vez, función de la frecuencia de operación.

En el caso de las líneas de transmisión, trabajando con el modo TEM, los parámetros equivalentes pueden en general tomarse como independientes de la frecuencia, con lo que su estudio es más simple. Como puede verse, en la aproximación de segundo orden, α_z es independiente de la frecuencia por lo que todas las componentes armónicas, en un grupo de ondas, se atenúan en la misma proporción. La velocidad de fase $v_z = \omega/\beta_z$ también es independiente de la frecuencia hasta el primer orden. Puede lograrse que la línea se comporte como no dispersiva, hasta la aproximación de segundo orden, procurando que $x \simeq y$ ²².

En la mayoría de los casos prácticos, pueden despreciarse los parámetros equivalentes disipativos \mathcal{R} y \mathcal{G} y tratar a la guía como ideal.

E.1.10.1. La guía ideal

Ecuaciones en el dominio del tiempo :

En el caso particular de las guías ideales, las ecuaciones E.117 se reducen a

$$\frac{\partial}{\partial z} v(z, t) = -\mathcal{L} \frac{\partial}{\partial t} i(z, t) \quad (\text{E.125a})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} i(z, t) = -\mathcal{C} \frac{\partial}{\partial t} v(z, t) \quad (\text{E.125b})$$

y las ecuaciones de onda a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v_z^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} v(z, t) \\ i(z, t) \end{Bmatrix} = 0 \quad , \quad v_z = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{LC}}} \quad (\text{E.126})$$

Como ya se ha apuntado, estas ecuaciones solo son fácilmente utilizables, en el dominio del tiempo, cuando el modo es el TEM. En este caso, identificando v_z con E.41,

²²Esto se consigue normalmente por el procedimiento de "pupinización" (del nombre de su inventor) que consiste en aumentar artificialmente la autoinducción por unidad de longitud de la línea incorporando periódicamente cuentas de ferrita a lo largo de la misma.

$$v_z = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{LC}}} \quad (\text{E.127})$$

lo que puede también confirmarse calculando la capacidad y la autoinducción por unidad de longitud de la línea coaxial (véase la relación de problemas).

La solución de esta ecuación es análoga a la obtenida para las ondas planas homogéneas en el capítulo cuarto: es la superposición de dos ondas, de forma arbitraria, que viajan en sentidos contrarios, más unos términos constantes V_0 e I_0 ²³. Si se exige el cumplimiento de las ecuaciones de partida E.125

$$v(z, t) = v_i(z - v_z t) + v_r(z + v_z t) + V_0 \quad (\text{E.128a})$$

$$i(z, t) = \frac{1}{R_c} [v_i(z - v_z t) - v_r(z + v_z t)] + I_0 \quad (\text{E.128b})$$

R_c es la resistencia característica de la línea ideal; coincide en valor con la impedancia característica pero el apelativo de impedancia carece de sentido en el dominio del tiempo.

Ecuaciones en el dominio de la frecuencia :

En el dominio de la frecuencia, estas ecuaciones toman la forma

$$\frac{d}{dz} V(z) = -j\omega \mathcal{L} I(z) \quad (\text{E.129a})$$

$$\frac{d}{dz} I(z) = -j\omega \mathcal{C} V(z) \quad (\text{E.129b})$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \beta_z^2 \right) \begin{Bmatrix} V(z) \\ I(z) \end{Bmatrix} = 0 \quad , \quad \beta_z = \omega \sqrt{\mathcal{LC}} \quad (\text{E.130})$$

La solución E.121 es ahora

$$V(z) = V_i e^{-j\beta_z z} + V_r e^{j\beta_z z} \quad (\text{E.131a})$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_c} (V_i e^{-j\beta_z z} - V_r e^{j\beta_z z}) \quad (\text{E.131b})$$

²³Estos términos fueron ignorados en el caso de las ondas pero se incluyen aquí porque son significativos para las líneas.

que coincide con E.54. La impedancia característica es real

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} \quad (\text{E.132})$$

Si se identifica a Z_c con la Z^M del modo en la guía y su velocidad de fase v_z con la de E.130, pueden determinarse la capacidad y la autoinducción equivalentes, por unidad de longitud, para cualquiera de los modos TE, TM o TEM (véase la relación de problemas).

Un problema básico. Impedancia y coeficiente de reflexión :

En la figura E.21 se muestra el esquema de un problema básico de guías de onda ²⁴. El segmento de la guía se sitúa entre las coordenadas $z = 0$, donde se encuentra la puerta de entrada, o del generador, y la $z = L$, que corresponde a la puerta de salida o de carga. En la práctica se prefiere utilizar la coordenada $\xi = L - z$ referida al extremo de carga. Se supone que L es lo suficientemente grande como para que los modos evanescentes que se puedan generar en las discontinuidades existentes en uno de los extremos no lleguen con amplitud apreciable hasta el otro extremo. El efecto de dichos modos evanescentes se supone englobado en las impedancias Z_e , la de salida del generador, y Z_L , la de carga de la guía. El thevenin [García Olmedo] desde el interior de la guía hacia afuera de la puerta de carga ($2 - 2'$) se supone que es la impedancia pasiva Z_L , mientras que el correspondiente al exterior de la puerta del generador ($1 - 1'$) se supone equivalente a una fuerza electromotriz V_e con impedancia de salida Z_e . De esta forma, como en la guía indefinida cuando trabaja en modo fundamental, solo es necesario considerar la propagación de este modo y, conocidos los parámetros de los thevenin del generador y de la carga, el problema queda completamente especificado.

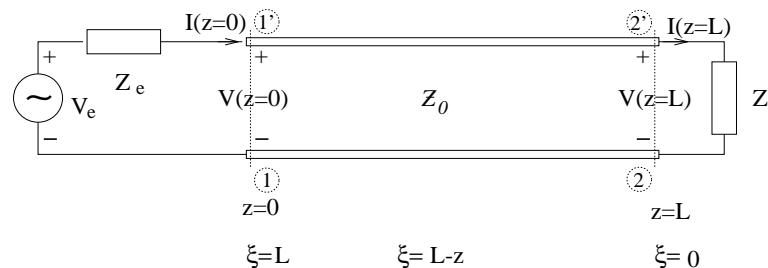


Figura E.21: Problema básico

Las ecuaciones de propagación E.131 toman la forma

$$V(\xi) = V^i e^{j\beta_z \xi} + V^r e^{-j\beta_z \xi} \quad (\text{E.133a})$$

²⁴El segmento de la guía se representa simbólicamente, como un circuito de dos puertas, por dos conductores, el ($1' - 2'$) que sirve de referencia positiva, y el ($1 - 2$) que lo hace de referencia negativa, de acuerdo con el circuito equivalente de la figura E.20.

$$I(\xi) = \frac{1}{Z_c} (V^i e^{j\beta_z \xi} - V^r e^{-j\beta_z \xi}) \quad (\text{E.133b})$$

donde

$$V^i = V_i e^{-j\beta_z L}, \quad V^r = V_r e^{j\beta_z L}$$

Hay dos incógnitas, las amplitudes de las ondas de tensión, incidente y reflejada, y dos condiciones independientes, en cada uno de los extremos de la guía, que determinan al problema de forma unívoca.

Estas ecuaciones pueden expresarse también en función del *Coeficiente de reflexión* de la tensión en un punto de la guía, definido como la relación entre las amplitudes de las ondas de tensión, reflejada e incidente, en dicho punto²⁵

$$\rho(\xi) \equiv \frac{V^r}{V^i} e^{-2j\beta_z \xi} = |\rho(\xi)| e^{j\varphi(\xi)} = \rho_L e^{-2j\beta_z \xi} = |\rho_L| e^{j(\varphi_L - 2\beta_z \xi)} \quad (\text{E.134})$$

donde $|\rho(\xi)|$ es el módulo del coeficiente de reflexión, $\varphi(\xi)$ su fase y

$$\rho_L = \frac{V^r}{V^i} = \rho(\xi = 0) = |\rho_L| e^{j\varphi_L} \quad (\text{E.135})$$

el coeficiente de reflexión en el extremo de carga, de módulo $|\rho_L|$ y fase φ_L . De estas dos últimas expresiones se deduce que el coeficiente de reflexión, a lo largo de una guía ideal, tiene un módulo constante, igual a $|\rho_L|$, y una fase variable $\varphi = \varphi_L - 2\beta_z \xi$.

De acuerdo con esto

$$V(\xi) = V^i e^{j\beta_z \xi} [1 + \rho(\xi)] \quad (\text{E.136a})$$

$$I(\xi) = \frac{1}{Z_c} V^i e^{j\beta_z \xi} [1 - \rho(\xi)] \quad (\text{E.136b})$$

Si se define a la *Impedancia* en un punto de la guía como la relación, en dicho punto, entre la tensión y la intensidad, el coeficiente de reflexión puede expresarse en función de ésta, por lo que dichos parámetros son equivalentes. Efectivamente, dividiendo E.136a por E.136b se obtiene

$$Z(\xi) \equiv \frac{V(\xi)}{I(\xi)} = Z_c \frac{1 + \rho(\xi)}{1 - \rho(\xi)} \Rightarrow \rho(\xi) = \frac{Z(\xi) - Z_c}{Z(\xi) + Z_c} \quad (\text{E.137})$$

Haciendo $\xi = 0$ en E.137 se obtiene la relación entre la impedancia y el coeficiente de reflexión en la carga.

²⁵Obsérvese que el coeficiente de reflexión de la intensidad es el de la tensión cambiado de signo.

$$Z_L = \mathcal{Z}_c \frac{1 + \rho_L}{1 - \rho_L} \Rightarrow \rho_L = \frac{Z_L - \mathcal{Z}_c}{Z_L + \mathcal{Z}_c} \quad (\text{E.138})$$

De E.133, E.135 y E.138, se deduce que

$$Z(\xi) = \mathcal{Z}_c \frac{Z_L + j\mathcal{Z}_c \operatorname{tg}(\beta_z \xi)}{\mathcal{Z}_c + jZ_L \operatorname{tg}(\beta_z \xi)} \quad (\text{E.139})$$

Esta expresión permite "trasladar.^a la impedancia de carga hasta cualquier punto de la guía (hallar la impedancia de la guía en ξ en función de Z_L). Es interesante considerar los casos más significativos, como son $Z_L = \mathcal{Z}_c$, guía perfectamente acoplada, $Z_L = 0$, guía cortocircuitada y $Z_L = \infty$, guía abierta.

- En la *Guía perfectamente acoplada (adaptada)*

$$Z_L = \mathcal{Z}_c \Rightarrow \rho_L = 0 \Rightarrow V^r = 0, \quad Z(\xi) = \mathcal{Z}_c \quad (\text{E.140})$$

En este caso, la onda incidente es absorbida completamente por la impedancia de carga y no se produce onda reflejada. Puesto que solo existe onda incidente, la impedancia a lo largo de la guía es invariable e igual a la impedancia característica.

- En la *Guía cortocircuitada*

$$Z_L = 0 \Rightarrow \rho_L = -1 \Rightarrow \begin{cases} V^r = -V^i & \Rightarrow V(\xi = 0) = 0 \\ I^r = I^i & \Rightarrow I(\xi = 0) = 2I^i \end{cases} \quad (\text{E.141})$$

y la impedancia a lo largo de la guía

$$Z(\xi) = jX, \quad X = \mathcal{Z}_c \operatorname{tg}(\beta_z \xi) \quad (\text{E.142})$$

es imaginaria pura, lo que se debe al hecho de que la guía es ideal, no disipa energía, y la impedancia del cortocircuito ($Z_L = 0$) tampoco. Dicha impedancia se dice que es una *Impedancia inductiva* si $X > 0$, una *Impedancia capacitiva* cuando $X < 0$ y una *Impedancia resonante* cuando $X = 0$. Dado que $|\rho_L| = 1$, la onda en la guía es completamente estacionaria.

- El caso de la *Guía en circuito abierto*²⁶ es similar al anterior:

$$Z_L = \infty \Rightarrow \rho_L = 1 \Rightarrow \begin{cases} V^r = V^i & \Rightarrow V(\xi = 0) = 2V^i \\ I^r = -I^i & \Rightarrow I(\xi = 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.143})$$

y la impedancia es

²⁶El circuito abierto no puede lograrse seccionando la guía y dejando abierto su extremo, en comunicación directa con el espacio libre. La longitud de la onda es comparable con la dimensión de la abertura creada, por lo que a través de ésta se radia una cantidad significativa de energía y $Z_L \neq \infty$. Una forma de implementarlo es por medio de una línea en cortocircuito de longitud $\xi = \frac{\lambda_z}{4}$.

$$Z(\xi) = j X \quad , \quad X = \frac{-Z_c}{\operatorname{tg}(\beta_z \xi)} \quad (\text{E.144})$$

Según se desprende de lo anterior, el conocimiento de la impedancia de carga Z_L determina al coeficiente de reflexión, del que se deduce la amplitud de la onda reflejada en función de la incidente. Las condiciones impuestas en la puerta de entrada permiten determinar V^i en función de V_e y Z_e .

Medidas básicas en guías. Razón de onda estacionaria :

Las medidas básicas en las guías son aquellas que conducen a la determinación del coeficiente de reflexión y, en consecuencia, de la impedancia a lo largo de la guía. En primer lugar es necesario determinar λ_z (β_z) y, puesto que el coeficiente de reflexión en ξ difiere de ρ_L solo en el factor de fase $e^{-2j\beta_z\xi}$, basta con medir el módulo $|\rho_L|$ y la fase φ_L de dicho coeficiente en la puerta de carga.

El módulo $|\rho_L|$ se determina mediante la medida de la *Razón de onda estacionaria*²⁷, la cual se define como la razón entre los valores máximo y mínimo del módulo de la tensión a lo largo de la línea

$$s \equiv \frac{|V(\xi)|_{max}}{|V(\xi)|_{min}} \quad (\text{E.145})$$

Puede comprobarse que el módulo de la tensión toma sus valores máximos (mínimos) en los puntos donde ocurren los mínimos (máximos) de intensidad y que en dichos puntos la impedancia es real y máxima (mínima). En primer lugar, es fácil de verificar que, puesto que $\infty > |Z_L| \geq 0$, $1 \geq |\rho_L| = |\rho| \geq 0$. Por otra parte, dado que $|e^{j\beta_z\xi}| = 1$, los módulos de la tensión y de la intensidad son

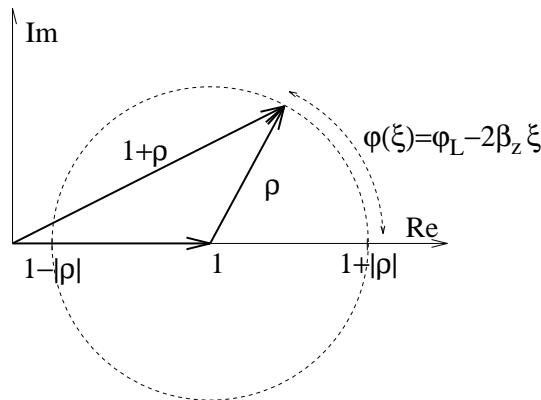


Figura E.22: Extremos de la tensión

$$|V(\xi)| = |V^i| |1 + \rho(\xi)| = |V^i| \left| 1 + |\rho_L| e^{j(\varphi_L - 2\beta_z \xi)} \right| \quad (\text{E.146a})$$

²⁷Se suele también anotar por VSWR (Voltage Standing-Wave Ratio).

$$|I(\xi)| = \frac{1}{Z_c} |V^i| \left| \{1 - |\rho_L| e^{j(\varphi_L - 2\beta_z \xi)}\} \right| \quad (\text{E.146b})$$

Los módulos de la tensión e intensidad, véase la figura E.22, son máximos en aquellos puntos donde $1 + \rho$ y $1 - \rho$ toman, respectivamente, el valor máximo $1 + |\rho_L|$ y son mínimos en aquellos para los cuales $1 + \rho$ y $1 - \rho$ toman el valor mínimo $1 - |\rho_L|$, es decir, los máximos de tensión y los mínimos de intensidad tienen lugar en los puntos ξ_{max} tales que

$$\varphi_L - 2\beta_z \xi_{max} = \pm 2m\pi \quad (\text{E.147})$$

Los mínimos de tensión y máximos de intensidad tienen lugar en los puntos ξ_{min} tales que

$$\varphi_L - 2\beta_z \xi_{min} = \pm(2m + 1)\pi \quad (\text{E.148})$$

La longitud de onda en la guía se mide convenientemente teniendo en cuenta que la distancia entre dos valores consecutivos de $|V|_{min}$ es $\lambda_z/2$ ²⁸.

$$s = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = \frac{Z(\xi)_{max}}{Z(\xi)_{min}} = \frac{Z_c}{Z(\xi)_{min}} \Rightarrow 1 \leq s \leq \infty \quad (\text{E.149})$$

Nótese que los extremos de la impedancia son reales y que la razón de onda estacionaria toma el valor mínimo en el caso de la guía perfectamente acoplada (toda la onda es incidente) y su valor máximo cuando $|\rho_L| = 1$ (toda la onda es estacionaria).

La fase se determina localizando las posiciones en las que la tensión toma el valor mínimo E.148, en particular, el primero

$$\varphi_L = 4\pi \frac{\xi_1}{\lambda_z} - \pi \quad (\text{E.150})$$

En la figura E.23 se representa a la parte esencial de un circuito experimental destinado a la medida del coeficiente de reflexión en guías que operan con el modo TE_{10} . Consiste en una pequeña antena que se introduce en la guía, a través de una ranura no radiativa, y en la que el campo eléctrico induce una corriente que es rectificada por un diodo. Este posee una característica tensión-intensidad de tipo cuadrático, de forma que la caída de tensión V_D en el diodo es proporcional al cuadrado de la intensidad I_D que circula por el mismo. Puesto que esta última es proporcional al campo medido, $V_D \sim E^2$. La penetración de la antena en la guía debe ser pequeña, para que no perturbe apreciablemente al modo que se quiere medir, pero suficiente para que la medida pueda llevarse a cabo. Esta antena está montada sobre un carro que puede deslizarse a lo largo de la guía, con lo que pueden detectarse las posiciones de los máximos y los mínimos y determinar el valor relativo de $|V(\xi)|_{max}$ con respecto a $|V(\xi)|_{min}$.

²⁸Es preferible medir en las posiciones de los mínimos de tensión porque en ellas el campo es también mínimo y la perturbación producida por la antena detectora la más pequeña posible.

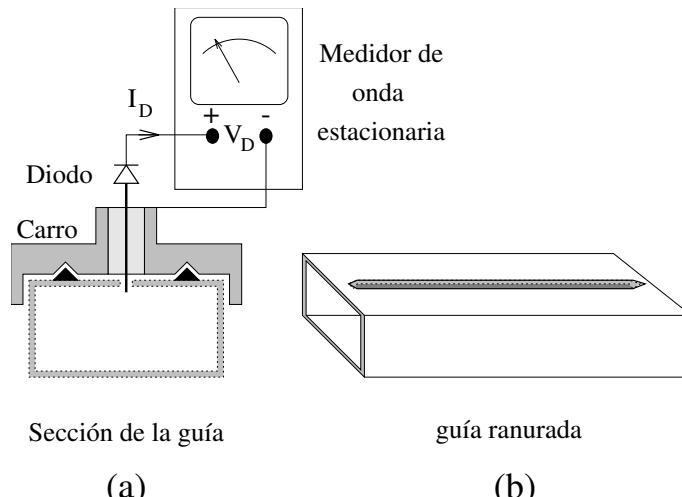


Figura E.23: Guía ranurada

E.1.11. Circuitos resonantes. Cavidades

Los elementos resonantes juegan un papel importante en los circuitos de microondas, como en los de radio y en los ópticos. Son utilizados básicamente en la medición de frecuencia, en osciladores y en amplificadores selectivos. Los circuitos de parámetros localizados de segundo orden resuenan a una sola frecuencia aunque admiten frecuencias situadas en una banda centrada en dicha frecuencia de resonancia. Esta banda es tanto más estrecha cuanto mayor sea su factor Q de calidad; para que el circuito sea fuertemente selectivo se requiere que $Q \gg 1$, por lo que el nombre de resonador se reserva para elementos que cumplen esta condición. En microondas, los elementos resonantes, segmentos de guía y cavidades, resuenan en una serie infinita de frecuencias, correspondiendo a cada una de ellas un factor de calidad distinto. Las cavidades, en particular, pueden diseñarse con una Q muy elevada y, por lo tanto, con un gran poder selectivo. En el límite superior de las microondas, en la banda milimétrica, las cavidades dejan de ser eficaces y es necesario acudir a técnicas interferenciales, como en los resonadores de Fabry-Perot.

Los principios básicos de este tipo de componente pueden ser ilustrados partiendo de la descripción de los circuitos RLC elementales, los cuales pueden ser utilizados como modelo de los circuitos de microondas en las proximidades de las resonancias. Como ejemplos típicos de resonadores en microondas, se analiza al segmento de línea de transmisión en cortocircuito y a las cavidades rectangulares.

E.1.11.1. Revisión de los circuitos RLC

Según se vio en su momento ([García Olmedo]), el circuito serie RLC de la figura E.24 responde a la ecuación diferencial²⁹

²⁹Una ecuación análoga rige para el circuito paralelo.

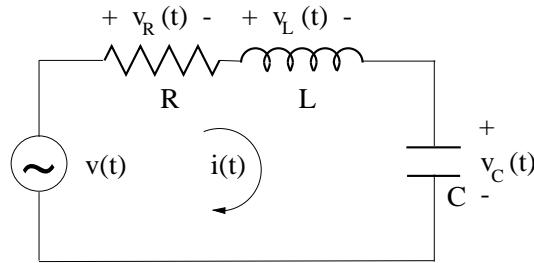


Figura E.24: Circuito resonante RLC

$$\frac{v}{L} = \frac{di}{dt} + \frac{\omega_0}{Q} i + \omega_0^2 \int i dt \quad , \quad \text{donde} \rightarrow \begin{cases} \omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q \equiv \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases} \quad (\text{E.151})$$

Su solución en el dominio de la frecuencia puede expresarse en función de la impedancia del circuito

$$Z = \frac{V}{I} = R \left[1 + j Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \quad (\text{E.152})$$

ω_0 es la frecuencia para la cual la impedancia del circuito es mínima

$$Z(\omega_0) = Z_{min} = R \quad (\text{E.153})$$

y se define como *Frecuencia de resonancia*. A esta frecuencia la potencia media disipada en el circuito es máxima.

$$\langle P_d \rangle = R \langle i^2 \rangle = \frac{1}{2} R \frac{|V|^2}{|Z|^2} \Rightarrow \langle P_d \rangle_{\omega_0} = \langle P_d \rangle_{max} = \frac{1}{2R} |V|^2 \quad (\text{E.154})$$

y los valores medios de la energía almacenada en forma de campo eléctrico, en el condensador, y de campo magnético, en la autoinducción, se igualan.

$$\langle W_L \rangle = \frac{1}{2} L \langle i^2 \rangle = \frac{1}{4} L \frac{|V|^2}{|Z|^2} \quad (\text{E.155a})$$

$$\langle W_L \rangle_{\omega_0} = \langle W_L \rangle_{max} = \frac{1}{4} \frac{Q}{R \omega_0} |V|^2 \quad (\text{E.155b})$$

$$\langle W_C \rangle = \frac{1}{2} C \langle v_C^2 \rangle = \frac{1}{4} C \omega^2 \frac{|V|^2}{|Z|^2} \quad (\text{E.155c})$$

$$\frac{\langle W_C \rangle}{\langle W_L \rangle} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow \langle W_C \rangle_{\omega_0} = \langle W_L \rangle_{\omega_0} \quad (\text{E.156})$$

Por debajo de la frecuencia de resonancia la energía se almacena predominantemente en el condensador y por encima de la misma en la autoinducción. De lo anterior se deduce que Q puede ser definido como³⁰

$$Q \equiv \omega_0 \frac{\langle W_{em} \rangle_{\omega_0}}{\langle P_d \rangle_{\omega_0}} = 2\pi \frac{\langle W_{em} \rangle_{\omega_0}}{\langle P_d \rangle_{\omega_0} T_0} \quad (\text{E.157})$$

donde $\langle W_{em} \rangle_{\omega_0} = \langle W_C \rangle_{\omega_0} + \langle W_L \rangle_{\omega_0} = 2 \langle W_L \rangle_{\omega_0}$ y T_0 es el periodo de la señal a la frecuencia de resonancia. Así, pues, Q es 2π veces la relación entre los valores medios de la energía electromagnética almacenada y la disipada en un ciclo a la frecuencia de resonancia. La energía total $\langle W_{em} \rangle$ no es máxima en la resonancia, aunque, como es fácil de demostrar, sí lo es aproximadamente en el caso que nos interesa, para el cual $Q \gg 1$.

En las proximidades de la resonancia, donde $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ y $\delta\omega/\omega_0 \ll 1$,

$$Z \simeq R [1 + jx] = R \sqrt{1 + x^2}, \quad /arctg(x) \quad , \quad x \equiv 2Q \frac{\delta\omega}{\omega_0} \quad (\text{E.158})$$

La potencia disipada y, aproximadamente, la almacenada, pueden escribirse de la forma

$$\frac{\langle P_d \rangle}{\langle P_d \rangle_{\omega_0}} = \frac{1}{1 + x^2} \quad (\text{E.159})$$

cuya representación puede verse en la figura E.25

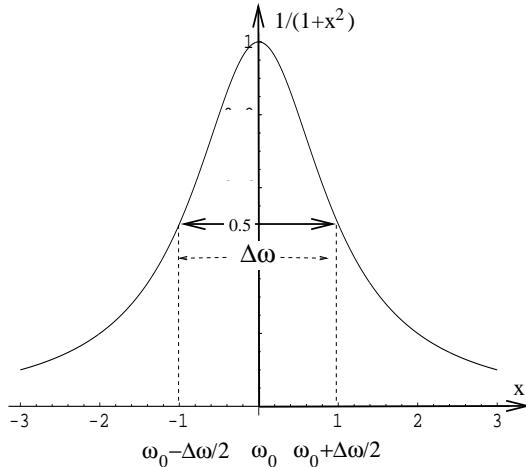


Figura E.25: Curva de resonancia

$\Delta\omega \equiv \omega(x = 1) - \omega(x = -1)$ se conoce como el *Ancho de banda* del circuito resonante. Es el intervalo comprendido entre las frecuencias para las cuales la potencia disipada se reduce a la mitad de su valor máximo (la amplitud de la intensidad se reduce por el factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$). De esto se deduce que

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad (\text{E.160})$$

³⁰Véase la definición 4.104.

Por último, resolviendo la ecuación del circuito para $Q \gg 1$ ³¹ y $v(t > 0) = 0$, se tiene la respuesta no forzada

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{t}{\tau_w}} \cos(\omega_0 t) , \quad \tau_w \equiv \frac{Q}{\omega_0} \quad (\text{E.161})$$

donde $i_0 = i(t = 0)$. Puesto que la energía, disipada o almacenada, es una magnitud cuadrática con respecto a la intensidad,

$$W(t) = W_0 e^{-\frac{t}{\tau_w}} \cos(2\omega_0 t) \quad (\text{E.162})$$

Para $Q \gg 1$, el argumento de la exponencial $\frac{t}{\tau_w} = \frac{2\pi t}{Q T_0}$ es pequeño, para un tiempo t del orden del periodo T_0 , y el exponencial puede considerarse constante durante dicho periodo. Promediando sobre el mismo se tiene que, aproximadamente,

$$\langle W \rangle = \langle W \rangle_0 e^{-\frac{t}{\tau_w}} \quad (\text{E.163})$$

por lo que, en un buen resonador, el valor medio de las energías decae con una constante de tiempo $\tau_w \gg T_0$.

E.1.11.2. El segmento de línea como resonador

De acuerdo con E.142, un segmento de línea cortocircuitada, operando a la frecuencia ω , presenta una impedancia nula a la distancia $\xi = \lambda/2$ del cortocircuito. Puede comprobarse que un segmento de línea real cortocircuitada, de longitud $L = \lambda_0/2$, donde $\lambda_0 \equiv \lambda(\omega_0)$, y con pérdidas pequeñas, se comporta como un circuito resonante RLC en las proximidades de ω_0 , es decir, para $\delta\omega \ll \omega_0$.

La inclusión de pérdidas en una guía implica que la constante de propagación es compleja ($j\beta \rightarrow \gamma = \alpha + j\beta$) y, según E.121

$$Z(\xi) \equiv \frac{V(\xi)}{I(\xi)} = Z_c \frac{V^i e^{\gamma \xi} + V^r e^{-\gamma \xi}}{V^i e^{\gamma \xi} - V^r e^{-\gamma \xi}}$$

Dado que, para una línea cortocircuitada, $V^r = -V^i$, haciendo $\xi = \frac{\lambda_0}{2}$

$$Z\left(\frac{\lambda_0}{2}\right) = Z_c \frac{e^{a+jb} - e^{-a-jb}}{e^{a+jb} + e^{-a-jb}} \quad (\text{E.164})$$

con

$$a = \alpha \frac{\lambda_0}{2} , \quad b = \beta \frac{\lambda_0}{2} = \pi \frac{\lambda_0}{\lambda} = \pi \frac{\omega}{\omega_0} = \pi \left(1 + \frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)$$

La hipótesis de pequeñas pérdidas puede concretarse en la condición $a \ll 1$. Si, por otra parte, se limita la frecuencia al entorno de la resonancia, entonces $\frac{\delta\omega}{\omega_0} \ll 1$, por lo pueden hacerse las aproximaciones

$$e^{\pm a} \simeq 1 \pm a , \quad e^{\pm jb} = e^{\pm j\pi} e^{\pm j\pi \frac{\delta\omega}{\omega_0}} \simeq -1 \mp j\pi \frac{\delta\omega}{\omega_0}$$

³¹Véanse los resultados obtenidos para el movimiento de cargas en C.16.

Despreciando los términos de segundo orden, se obtiene una aproximación para la impedancia

$$Z\left(\frac{\lambda_0}{2}\right) \simeq Z_c \frac{\alpha \lambda_0}{2} \left[1 + 2j \frac{\pi}{Z_c \alpha \lambda_0} \frac{\delta\omega}{\omega_0} \right] \quad (\text{E.165})$$

Comparando con E.158 se obtienen los parámetros equivalentes para la resonancia de esta línea

$$R_{eq} = Z_c \frac{\alpha \lambda_0}{2} , \quad Q_{eq} = \frac{\pi}{Z_c \alpha \lambda_0}$$

De forma análoga se comprueba que una línea cortocircuitada de longitud $L = \lambda_0/2$ se comporta en las proximidades de ω_0 como un circuito resonante paralelo.

E.1.11.3. Cavidades resonantes

En los circuitos de microondas es corriente el uso de ventanas y postes resonantes cuya selectividad es relativamente baja. En aplicaciones donde se requiere una Q elevada, suele ser necesario el recurso a las cavidades resonantes. El modelo más simple de cavidad corresponde a un volumen dieléctrico rodeado de paredes conductoras, ambos de carácter ideal. Al no incluir mecanismos de disipación de energía, a esta cavidad ideal le corresponde un factor de calidad infinito. En la práctica, la energía se pierde en el dieléctrico, si existe, en las paredes y a través de la ventana que interconecta a la cavidad con el resto del circuito.

La forma más utilizada en la construcción de cavidades es la de terminar los extremos $z = 0$ y $z = L$ de un segmento de guía con planos conductores, con lo que el campo queda también confinado longitudinalmente, formando una onda estacionaria en dicha dirección. Las nuevas fronteras, supuestas conductoras ideales, exigen que H_z y \vec{E}_t se anulen en dichos extremos. De acuerdo con esto, los campos en una cavidad de este tipo, como en las guías de las que derivan, pueden expresarse como combinación de modos TE y TM . Con objeto de ilustrar este proceso, en lo que sigue se estudiará la estructura de los modos resonantes TE y, en particular, la de los TE_{10} de una cavidad rectangular.

Modos TE :

En este caso basta con imponer la condición de contorno a la componente longitudinal H_z . Puesto que la onda es estacionaria en la dirección z , puede escribirse

$$H_z = A(q_1, q_2) \operatorname{sen}(\beta_z z) + B(q_1, q_2) \cos(\beta_z z)$$

La condición en $z = 0$ implica que $B = 0$ y la correspondiente a $z = L$ que

$$\beta_z = n \frac{\pi}{L} \Rightarrow \frac{\lambda_z}{2} = \frac{L}{n} \Rightarrow H_z = A(q_1, q_2) \operatorname{sen}(n\pi \frac{z}{L}) , \quad n = 1, 2 \dots \quad (\text{E.166})$$

Para calcular los campos transversales correspondientes, es necesario tener en cuenta que en la expresión anterior se incluyen ondas que viajan según las dos direcciones del eje z . Según E.28 y E.29 el campo magnético transversal es

$$\vec{H}_t^{TE} = \frac{1}{\beta_c^2} \nabla_t \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{n\pi}{\beta_c^2 L} \cos(n\pi \frac{z}{L}) \nabla_t A(q_1, q_2) \quad (\text{E.167})$$

El campo eléctrico se obtiene aplicando E.30

$$\vec{E}_t^{TE} = -\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \nabla_t \wedge \vec{H}_z = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \sin(n\pi \frac{z}{L}) \hat{z} \wedge \nabla_t A(q_1, q_2) \quad (\text{E.168})$$

Como puede comprobarse, \vec{E}_t cumple las condiciones de contorno puesto que se anula en $z = 0, L$.

Como se vio en su momento, el confinamiento transversal discretiza al espectro de β_c , por lo que solo son posibles los valores β_{clm} . El confinamiento longitudinal discretiza a β_z en un conjunto de valores que se han indicado con el subíndice n , por lo que la relación de dispersión se convierte en la relación de frecuencias de resonancia

$$\omega = \omega_{lmn} = v_0 \sqrt{\beta_{clmn}^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \quad (\text{E.169})$$

En el caso de una cavidad rectangular

$$f_{lmn} = \frac{1}{2} v_0 \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{L}\right)^2} \quad (\text{E.170})$$

Modos TE_{10n} rectangulares :

Para estos modos, $\beta_{10} = \frac{\pi}{a}$ y sus frecuencias de resonancia son

$$f_{10n} = \frac{1}{2} v_0 \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{n^2}{L^2}} \quad (\text{E.171})$$

El campo longitudinal correspondiente es

$$H_z = H_0 \cos\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{L}\right)$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$, $\nabla_t \rightarrow \hat{x} \frac{\partial}{\partial x}$, por lo que

$$H_x = -\frac{n a}{L} H_0 \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{L}\right) \quad (\text{E.172a})$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{L}\right) \quad (\text{E.172b})$$

Dado que la onda es estacionaria, al hallar la parte real de los campos, el término $e^{j\omega t} \rightarrow \cos(\omega t)$.

En la figura E.26b se representa a una cavidad rectangular alimentada por una línea coaxial en una posición favorable para la excitación del modo TE_{101} . En la figura E.26a se representan las líneas de campo y de corriente en la cara superior. Si se supone $L > a$, este modo será el fundamental: resuena a la frecuencia más baja posible.

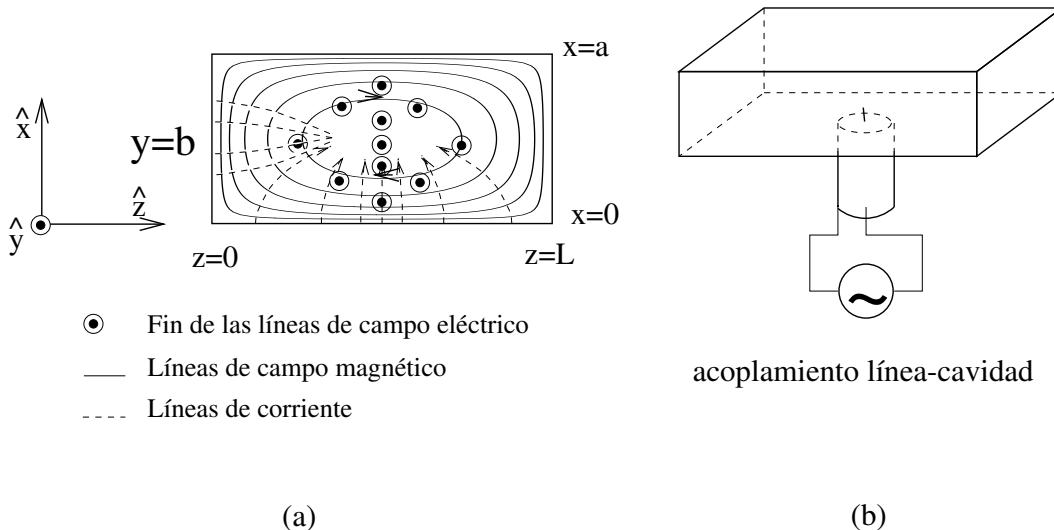


Figura E.26: Cavidad rectangular. Modo TE_{101}

E.1.11.4. Factor Q de una cavidad

Como en las líneas con pocas pérdidas, una cavidad con un alto factor de calidad puede ser modelada, en las proximidades de la resonancia, mediante circuitos RLC serie o paralelo. Pero ésto solo es posible si se tiene en cuenta a la ventana de comunicación entre la cavidad y el resto del circuito [Atwater]. En esta sección solo se abordará una parte de este problema, mostrando que la cavidad, como tal, se comporta de forma compatible con el modelo propuesto y calculando la aportación de la cavidad cerrada a la Q_{eq} de dicho circuito.

Factor Q ; atenuación de la energía :

En primer lugar se determinará la ley de atenuación temporal de la energía y la amplitud de los campos en una cavidad con pocas pérdidas y a la cual se le ha cortado la fuente de alimentación. Se comprobará que el comportamiento de dicha cavidad es análogo al del circuito RLC descrito en la sección E.1.11.1.

Para conseguir este objetivo no es necesario precisar los mecanismos de pérdidas – estas tendrán lugar a través de las paredes, de las ventanas con que se comunican con el resto del circuito o en el medio interno – sino que es suficiente con suponer que su comportamiento es lineal. Así, pues, la

existencia de pérdidas en una cavidad implica que, si se corta el suministro de energía, la almacenada se irá disipando a lo largo del tiempo. Si Q se define como en E.157, el valor de ésta será alto, debido a la pequeñez de las pérdidas, y el contenido espectral de la energía almacenada y disipada estará muy centrado alrededor de la frecuencia de resonancia. Bajo esta hipótesis, puede suponerse una relación lineal entre la energía almacenada, en un instante dado y a cualquier frecuencia, con la disipada durante un periodo T_0 ³²

$$\langle P_d \rangle T_0 \simeq \frac{2\pi}{Q} \langle W_{em} \rangle \ll \langle W_{em} \rangle$$

luego, en una escala de tiempo lenta, comparada con la de los campos resonantes T_0 , puede escribirse

$$\langle W_{em} \rangle = \langle W_{em} \rangle(t)$$

, es decir, el valor medio temporal de la energía almacenada (o de la potencia disipada), efectuado a la escala corta T_0 , es función del tiempo a escala grande. Haciendo uso, como en ocasiones anteriores, del principio de conservación, se tiene que

$$\langle P_d \rangle = -\frac{d \langle W_{em} \rangle(t)}{dt} \Rightarrow \frac{d \langle W_{em} \rangle(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_w} \langle W_{em} \rangle(t)$$

donde τ_w , definida de forma análoga a la expuesta en E.161, es la constante de tiempo de la energía o escala temporal grande. De la ecuación anterior se deduce que

$$\langle W_{em} \rangle(t) = \langle W_{em} \rangle_0 e^{-\frac{t}{\tau_w}}$$

En esta misma escala, las amplitudes de los campos pueden expresarse como

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{t}{\tau_w}}$$

y, dado que la cavidad solo admite frecuencias próximas a la de resonancia, incluyendo ambas escalas en la descripción de la evolución temporal de las amplitudes

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{t}{\tau_w}} e^{j\omega_0 t}$$

con lo que se comprueba que una cavidad altamente resonante se comporta como un circuito *RLC* en las proximidades de ω_0 .

Cálculo de Q :

En la mayoría de los casos prácticos, el interior de las cavidades resonantes es el aire, por lo que las pérdidas son despreciables en el dieléctrico y éstas pueden atribuirse a la conductividad finita de la pared metálica.

³²El considerar que las ondas en el interior de la cavidad tienen un espectro casi monocromático, centrado en la frecuencia de resonancia, permite suponer a Q aproximadamente independiente de la frecuencia.

Aunque en una cavidad las ondas son estacionarias, resultan de la superposición de modos que viajan en sentidos contrarios, el teorema complejo de Poynting C.91b asegura que las energías medias almacenadas por el campo eléctrico y por el magnético son iguales. Dado que, para el aire, $\varepsilon_{eq} = \varepsilon_0$ y $\mu' = \mu_0$ y el vector de Poynting es real, de lo que se deduce que

$$\langle W_{em} \rangle = \langle W_e \rangle + \langle W_m \rangle = 2 \langle W_m \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 \int_V |\vec{H}|^2 dv$$

Las pérdidas en las paredes se obtienen, de acuerdo con D.51 y teniendo en cuenta que $\vec{H}_T \simeq \vec{H}$ en la superficie de un buen conductor, mediante la resistencia superficial

$$\langle P_d \rangle = \frac{1}{2} R_s \int_S |\vec{H}|^2 ds \quad (\text{E.173})$$

Esto permite expresar la aportación de la cavidad cerrada a la Q_{eq} del circuito equivalente como

$$Q \equiv \omega_0 \frac{\langle W_{em} \rangle_{\omega_0}}{\langle P_d \rangle_{\omega_0}} = \frac{2}{\delta_0} \frac{\int_V |\vec{H}|^2 dv}{\int_S |\vec{H}|^2 ds} \quad (\text{E.174})$$

donde δ_0 es la profundidad pelicular a la frecuencia de resonancia.

Puede obtenerse una estimación sencilla de Q con las siguientes consideraciones: En primer lugar, como es fácil de comprobar, la resistencia superficial puede expresarse en función de la profundidad pelicular en la pared: $R_s = \frac{\omega_0 \mu_0}{2} \delta$. Por otra parte, $\langle W_{em} \rangle \sim \mu_0 |\vec{H}_0|^2 V$ y $\langle P_d \rangle \sim R_s |\vec{H}_0|^2 S$, de donde se deduce que el orden de magnitud de la Q de una cavidad, cerrada y vacía, viene dado por

$$Q \sim \frac{2V}{S\delta} \quad (\text{E.175})$$

, es decir, por la relación entre el volumen interior de la cavidad y el que "ocupan" las corrientes en la pared.

E.2. Problemas

e-1. Considerese la propagación de ondas planas, monocromáticas y homogéneas, entre dos planos conductores situados en $x = 0$ y $x = a$. Las direcciones de propagación están contenidas en el plano xz y la onda está polarizada en la dirección \hat{y} . Demostrar que en la dirección \hat{z} se propagan ondas planas no homogéneas de la forma:

$$E = E_0(x) e^{j(\omega t - \beta_z z)}$$

Hallar la relación de dispersión $\omega = \omega(\beta_z)$, la velocidad de fase y la de grupo de dicha onda y representarlas gráficamente.

SOLUCION :

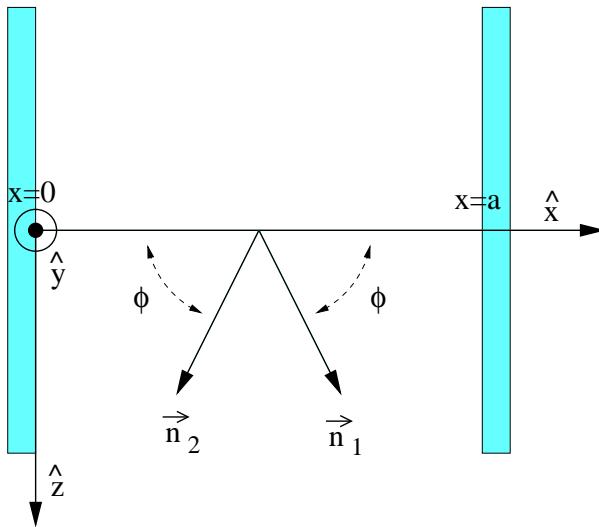


Figura E.27:

Pueden simplificarse los cálculos si se tiene en cuenta que, debido a la reflexión en las paredes, cada onda plana que viaje en la dirección \vec{n}_1 debe estar acompañada por otra que lo haga en la dirección \vec{n}_2 , simétrica con respecto al eje z (véase la figura E.27)

$$\vec{n}_1 = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{z}, \quad \vec{n}_2 = -\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{z}$$

El campo eléctrico puede escribirse de la forma

$$\vec{E} = \hat{y} \left(A e^{-jk\vec{n}_1 \cdot \vec{r}} + B e^{-jk\vec{n}_2 \cdot \vec{r}} \right) \equiv \hat{y} e^{-j\beta_z z} \left(A e^{-j\beta_x x} + B e^{-j\beta_x x} \right)$$

donde se han definido las constantes $\beta_z = k \sin \phi$ y $\beta_x = k \cos \phi$ y se ha omitido el factor común $e^{-j\omega t}$. Elevando al cuadrado y sumando, se tiene la siguiente relación

$$\beta_z^2 = k^2 - \beta_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta_x^2 \quad (\text{E.176})$$

El campo magnético se obtendría aplicando las relaciones de estructura a cada una de esta dos ondas, pero no es necesario para la resolución de este problema ya que las condiciones de contorno de este campo se cumplen automáticamente si se exigen al campo eléctrico. Dado que este último es tangencial a los conductores ideales, debe cumplirse que

$$E(x = 0) = 0 \Rightarrow B = -A \quad (\text{E.177})$$

$$E(x = a) = 0 \Rightarrow \sin \beta_x a = 0 \Rightarrow \beta_x = n\pi \frac{1}{a} \quad (\text{E.178})$$

La condición E.178 demuestra que las ondas resultantes son no homogéneas puesto que, en los planos de igual fase, los $z = \text{cte}$, la amplitud depende de x

$$E = E_0(x) e^{-j\omega t - \beta_z z}, \quad E_0(x) \sim \sin \beta_x x \quad (\text{E.179})$$

La existencia de este tipo de modos está determinada, por lo tanto, por la existencia de una sola de las paredes conductoras.

La segunda condición confinante E.178, junto con la anterior, discretiza al espectro de β_x

$$\beta_{xn} = n \pi \frac{1}{a} \quad , \quad n = 1, 2 \dots$$

Para una frecuencia dada, los ángulos de propagación posibles, para las ondas planas, también están discretizados

$$\cos \phi_n(\omega) = n \pi \frac{1}{k a} = n \pi \frac{c}{\omega a}$$

También lo están las constantes de propagación longitudinales, dadas por la relación de dispersión E.176

$$\beta_{zn}(\omega)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta_{xn}^2$$

donde se pone de manifiesto que para frecuencias

$$\omega \leq \omega_c \equiv c \beta_{xn}$$

β_{zn} se hace imaginaria y, como puede comprobarse, la expresión del campo E.179 no corresponde a una onda que se propaga; se dice que la onda está en corte y que ω_c es la frecuencia angular de corte (véase la sección E.1.1.1).

- e-2. Una guía dieléctrica planar está constituida por una lámina plana indefinida, limitada por los planos $x = 0$ y $x = a$ y con constante dieléctrica ϵ_g , que está sumergida en un medio menos denso de constante $\epsilon_a < \epsilon_g$. Plantear en este caso las mismas cuestiones que en el problema anterior pero suponiendo que las ondas inciden en las interfaces con un ángulo superior al crítico.
- e-3. Determinar si entre los planos conductores del problema e-1 pueden propagarse modos TM y TEM en la dirección del eje z e independientes de la variable y .

SOLUCION :

Ya se vió en el problema e-1 que podían propagarse modos TE.

Modos TM

Para ver si se pueden propagar modos TM, basta con seguir el método del potencial propuesto en la teoría

$$\Phi^{TM} = -\frac{j \beta_z}{\beta_c^2} E_z$$

Dado que los campos no dependen de y , el gradiente transversal es $\nabla_t = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x}$ y

$$\vec{E}_t^{TM} = \hat{x} \frac{\partial \Phi^{TM}}{\partial x} = -\frac{j \beta_z}{\beta_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{x}$$

El campo magnético se deduce de la relación de estructura

$$\vec{H}_t^{TM} = \frac{1}{Z^{TM}} \hat{z} \wedge \vec{E}_t^{TM} = -\frac{E_t^{TM}}{Z^{TM}} \hat{y} , , Z^{TM} = Z \frac{\beta_z}{\beta}$$

Dado que $\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow 0$, $\beta_c = \beta_x$ y $\beta_z = \sqrt{\beta^2 - \beta_x^2}$

La componente longitudinal es solución de la ecuación de Helmholtz unidimensional

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \beta_x^2 \right) E_z = 0$$

cuyas soluciones son bien conocidas

$$E_z = A \sin \beta_x x + B \cos \beta_x x$$

Para este tipo de modos, las condiciones de contorno exigen la anulación de la componente tangencial del campo eléctrico

$$E_z(x=0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow E_z = A \sin \beta_x x$$

$$E_z(x=a) = 0 \Rightarrow \beta_x a = n \pi \Rightarrow \beta_x = n \pi \frac{1}{a} , , n = 1, 2 \dots$$

Modos TEM

Considérese a un modo incidente cuyo potencial es $\Phi^{TEM}(z, t) = V_i e^{j(\omega t - \beta z)}$. El problema electrostático correspondiente sería el de un plano conductor, el $x = a$, a potencial V_i con respecto al plano $x = 0$. Los campos son

$$\vec{E}_0^{TEM} = -\frac{V_i}{a} \hat{x} , , \vec{H}_0^{TEM} = -\frac{V_i}{Z_0 a} \hat{y}$$

e-4. La frecuencia de corte de una guía es de 1 GHz. El dieléctrico que la llena es el vacío. Hallar:

- a) La longitud de onda de corte.
- b) La longitud de onda de la guía para 1.2 GHz.
- c) La profundidad de penetración δ_z para 0.8 GHz.

SOLUCION :

(a) -Dado que la guía está vacía, la longitud de onda de corte es

$$\lambda_c = \frac{c}{f_c} = 0,3 \text{ m}$$

(b) - La frecuencia $f = 1,2 \text{ GHz} > f_c$ por lo que la onda es propagativa. La longitud de onda a lo largo de la guía se deduce de la relación de dispersión

$$\beta_z^2 = \beta^2 - \beta_c^2$$

donde $\beta_z = \frac{2\pi}{\lambda_z}$, $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ y $\beta_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}$. Luego

$$\lambda_z = \frac{\lambda_0 \lambda_c}{\sqrt{\lambda_c^2 - \lambda_0^2}} = 45 \text{ cm}$$

(c) Esta frecuencia $f = 0,8 \text{ GHz}$ es inferior a la de corte por lo que la propagación no es posible.

$$e^{-j\beta_z z} = e^{-\frac{z}{\delta}} \Rightarrow \delta = \frac{1}{j\beta_z} = \frac{\lambda_0 \lambda_c}{2\pi \sqrt{\lambda_0^2 - \lambda_c^2}} = 8 \text{ cm}$$

e-5. Las guías diseñadas para operar en banda X tienen dimensiones $a = 2,286 \text{ cm}$, $b = 1,016 \text{ cm}$ y aire en su interior (su uso se recomienda para el modo dominante entre 8,2 y 12,4 GHz). Hallar:

- a) Frecuencia y longitud de onda de corte de los 5 primeros modos.
- b) Hallar velocidad de fase, de grupo y longitud de onda para los extremos y el centro de la banda recomendada.
- c) Distancias para las cuales los 2o, 3er, 4o y 5o modos se atenúan en un 99% (aproximadamente $5\delta_z$) para la frecuencia central.

SOLUCION :

En el aire, $v = c$.

(a) - Los cinco primeros modos son los TE_{10} , TE_{20} , TE_{01} , TE_{11} y TM_{11} . A los dos últimos les corresponde la misma frecuencia de corte porque ésta solo depende de los índices del modo.

Las frecuencias y longitudes de onda correspondientes son

$$f_{c_{lm}} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}, \quad \lambda_{c_{lm}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}}$$

Los valores concretos de estos parámetros son

$$f_{c_{10}} = 6,56 \text{ GHz}, \quad f_{c_{20}} = 13,1 \text{ GHz}, \quad f_{c_{01}} = 14,8 \text{ GHz}, \quad f_{c_{11}} = 16,2 \text{ GHz}$$

$$\lambda_{c_{10}} = 4,57 \text{ cm}, \quad \lambda_{c_{20}} = 2,28 \text{ cm}, \quad \lambda_{c_{01}} = 2,02 \text{ cm}, \quad \lambda_{c_{11}} = 1,85 \text{ cm}$$

(b) - Las frecuencias correspondientes a los límites recomendados para el modo fundamental y para su frecuencia central son

$$f_{inf} = 8,2 \text{ GHz}, \quad f_{cent} = 10,3 \text{ GHz}, \quad f_{sup} = 12,4 \text{ GHz}$$

Las velocidades de fase y de grupo se expresan, en función de la frecuencia, de la forma

$$v_f = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} , \quad v_g = \frac{c^2}{v_f}$$

Los valores pedidos son

$$v_{f_{inf}} = 1,7 c , \quad v_{f_{cent}} = 1,3 c , \quad v_{f_{sup}} = 1,18 c$$

$$v_{g_{inf}} = 0,6 c , \quad v_{g_{cent}} = 0,77 c , \quad v_{g_{sup}} = 0,85 c$$

(c) - Trabajando a la frecuencia central, las profundidades de penetración de los modos en corte son

$$\delta_{zc} = \frac{c}{2\pi \sqrt{f_c^2 - f_{cent}^2}}$$

Concretamente

$$\delta_{zc20} = 6 mm , \quad \delta_{zc01} = 4,5 mm , \quad \delta_{zc11} = 3,8 mm$$

En los apartados (b) y (c) se ve como, al recomendar unas frecuencias inferior y superior alejadas de los extremos de la banda, se limita la despersión de las velocidades en función de la frecuencia y se limita la penetración de los modos no propagativos en los segmentos uniformes de la guía.

e-6. Demostrar que, en una guía rectangular,

$$Z_{TM_{lm}} = Z \sqrt{1 - \left(\frac{l\lambda}{2a}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda}{2b}\right)^2}$$

¿ Cuál será el valor de esta impedancia para una frecuencia de 4 GHz si las dimensiones de la guía son de $a = 10 cm$ y $b = 6 cm$ y el modo es el TM_{11} ?

e-7. Un modo TE_{10} con una amplitud de pico $H_{z0} = 1 A \cdot m^{-1}$ viaja por una guía de $7,5x3,5 cm^2$ con una frecuencia de 3 GHz. Una pequeña espira conductora de $0.1 cm^2$ está situada en el centro de la sección transversal. ¿ Cuáles son las fuerzas electromotrices inducidas en la espira cuando su eje coincide con cada uno de los ejes coordinados ?

e-8. Hallar las cargas y corrientes superficiales para el modo TE_{10} de una guía rectangular y representarlas gráficamente junto con las líneas de campo.

SOLUCION :

En la figura E.28 se representa a una sección de guía rectangular y a la normal \vec{n}_s hacia afuera de la pared conductora. Como los campos en el interior del conductor ideal son nulos, las condiciones de contorno que deben exigírsele a los del interior de la guía son

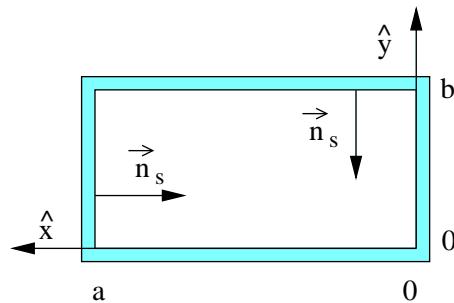


Figura E.28:

$$\vec{n}_s \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} , , \quad \vec{n}_s \wedge \vec{H} = \vec{j}_s \quad (\text{E.180})$$

Particularizando para $t = 0$, los campos del modo TE_{10} pueden escribirse como

$$H_z = A \cos(\pi \frac{x}{a}) \cos(2\pi \frac{z}{\lambda_z}) , , \quad A = H_0^i$$

$$H_x = B \sin(\pi \frac{x}{a}) \sin(2\pi \frac{z}{\lambda_z}) , , \quad B = A \beta_z \left(\frac{a}{\pi}\right)$$

$$E_y = -C \sin(\pi \frac{x}{a}) \sin(2\pi \frac{z}{\lambda_z}) , , \quad C = A \omega \mu_0 \left(\frac{a}{\pi}\right)$$

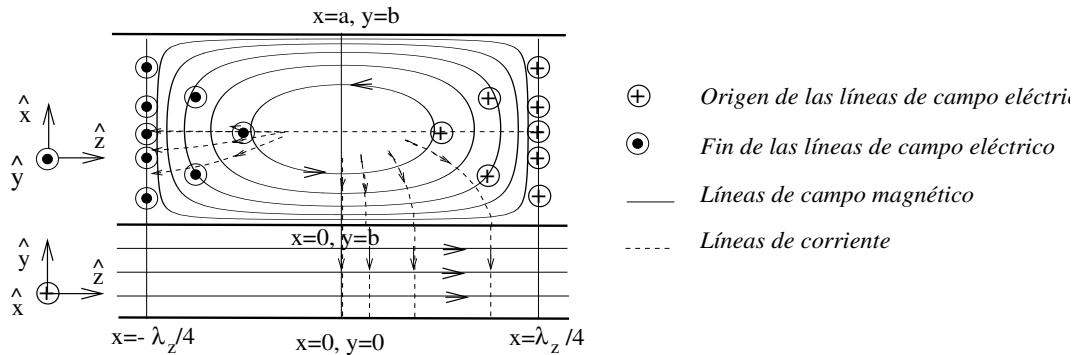
Si A se toma como real y positiva, también lo son B y C . Este modo no depende de la coordenada y , por lo que las componentes del campo son funciones $f(x, z)$. El campo eléctrico tiene dirección y ; sus líneas empiezan y terminan en las caras inferior $y = 0$ y superior $y = b$. Las líneas de campo magnético están contenidas en los planos $z = cte$. En la figura E.29 se representa a una sección de guía centrada en $z = 0$.

Para dibujar esquemáticamente las líneas de campo magnético es conveniente ver los signos que toman sus componentes en la región $0 < x < a$, , $-\frac{\lambda_z}{4} < z < \frac{\lambda_z}{4}$

$$z = 0 \rightarrow \begin{cases} H_z = A \cos(\pi \frac{x}{a}) & \Rightarrow \begin{cases} H_z > 0 & \text{para } x < \frac{a}{2} \\ H_z < 0 & \text{para } x > \frac{a}{2} \end{cases} \\ H_x = 0 \end{cases}$$

$$z = \pm \frac{\lambda_z}{4} \rightarrow \begin{cases} H_z = 0 \\ H_x = \pm B \sin(\pi \frac{x}{a}) > 0 & \Rightarrow \begin{cases} H_x > 0 & \text{para } z = \frac{\lambda_z}{4} \\ H_z < 0 & \text{para } z = -\frac{\lambda_z}{4} \end{cases} \end{cases}$$

Luego, como se muestra en la figura E.29, las líneas de campo magnético forman lazos con la orientación indicada. Las líneas de corriente son perpendiculares a las de campo magnético en las paredes, según la segunda de las condiciones E.180.



La componente del campo eléctrico es nula en $z = 0$. Sus valores máximos los alcanza para

$$z = \frac{\lambda_z}{4} \quad \Rightarrow \quad E_y = -C \operatorname{sen}(\pi \frac{z}{\lambda_z}) < 0$$

$$z = -\frac{\lambda_z}{4} \quad \Rightarrow \quad E_y = C \operatorname{sen}(\pi \frac{z}{\lambda_z}) > 0$$

Las cargas serán positivas en la cara de donde parten las líneas de campo eléctrico y negativas donde confluyen.

- e-9. Calcular la contribución α_{TEM} a la constante de atenuación de las paredes de una línea de transmisión coaxial con $a = 2\text{ mm}$, $b = 4,6\text{ mm}$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 5 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ y $f = 100\text{ MHz}$, $f = 1\text{ GHz}$ y $f = 10\text{ GHz}$.
- e-10. Hallar la constante de atenuación para una guía rectangular metálica vacía recorrida por modos TE_{l0} . Particularizar para el modo TE_{10} en la banda X, a la frecuencia media de la misma, y con paredes en las que $\sigma = 5'8 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

SOLUCION :

La constante de atenuación viene dada por E.113

$$\alpha_z = \frac{1}{2} \frac{R_s}{Z^M} \underbrace{\frac{\int_L |\vec{H}|^2 dl}{\int_{S_t} |\vec{H}_t|^2 ds}}_{(B)}$$

$$(A)$$

El problema se reduce al cálculo de las integrales (A) y (B).

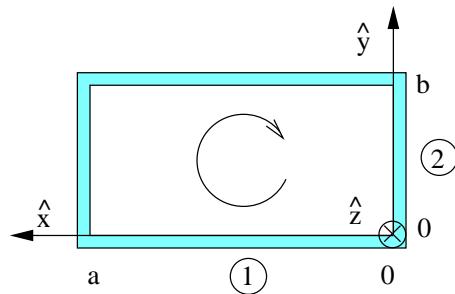


Figura E.30:

- (A) es la integral del cuadrado del campo magnético total sobre el contorno de la sección transversal de la guía (véase la figura E.30).

$$(A) = \oint_L |\vec{H}|^2 dl \quad , \quad dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad , \quad |\vec{H}|^2 = |H_x|^2 + |H_z|^2$$

Las componentes de \vec{H} pueden escribirse de la forma

$$H_z(x) = H_0 \cos \kappa \quad , \quad \kappa = \pi \frac{x}{a}$$

$$H_x(x) = j H_0 A_1 \sin \kappa \quad , \quad A_1 = \frac{\beta_{z10} a}{\pi}$$

De acuerdo con la figura, la integral puede evaluarse multiplicando por 2 las integrales sobre los dos primeros tramos.

$$\frac{(A)}{2} = \underbrace{\int_1 |\vec{H}|^2 dl}_{(1)} + \underbrace{\int_2 |\vec{H}|^2 dl}_{(2)}$$

La primera integral puede hacerse teniendo en cuenta que $d\kappa = \frac{\pi}{a} dx \quad , \quad y = 0 \Rightarrow dl = |dx|$

$$(1) = \frac{a}{\pi} \int_0^\pi (\cos^2 \kappa + A_1^2 \sin^2 \kappa) d\kappa = \frac{a}{2} (1 + A_1^2)$$

Para la segunda integral, $x = 0 \Rightarrow dl = |dy|$

$$(2) = \int_0^b |dy| = b$$

con lo que

$$(A) = H_0^2 (a + a A_1^2 + 2b) \quad (E.181)$$

- (B) es la integral, sobre la superficie transversal, del cuadrado del campo magnético transversal

$$(B) = \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a |H_x|^2 dx dy = \frac{ab}{2} A_1^2 H_0^2$$

Si se expresa la resistencia superficial, la impedancia del modo y la constante A_1 en función de la frecuencia normalizada $f_{n_{10}} = \frac{f}{f_{c_{10}}}$, el resultado toma la forma

$$\alpha_z = \frac{1}{120b} \sqrt{\frac{c\mu_0}{2\pi a\sigma}} \frac{f_{n_{10}}^{\frac{3}{2}} + 2\frac{b}{a} f_{n_{10}}^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{f_{n_{10}}^2 - 1}}$$

El resto se deja como ejercicio.

- e-11. Una guía de ondas rectangular tiene como dieléctrico en su interior aire y las dimensiones de su sección transversal son $a=10$ cm y $b=6$ cm. Encontrar las frecuencias de corte para los modos TE_{10} ; TE_{20} ; TE_{01} ; TE_{11} y TE_{21} .
- e-12. Una guía de ondas rectangular con aire en su interior tiene una sección transversal de dimensiones $a=10$ cm y $b=8$ cm.
 - a) ¿ Cuántos modos TE se podrán transmitir por la guía a frecuencias inferiores a 4 GHz?
 - b) ¿ Cuáles son sus frecuencias de corte?
- e-13. Encontrar la velocidad de fase y de grupo de los modos TE_{10} y TM_{12} a frecuencias 1.5 veces superiores a la correspondiente de corte.
- e-14. Expresar las impedancias Z^{TE} , Z^{TM} y Z^{TEM} en función de Z y las longitudes de onda λ y λ_z . Ordenar dichas impedancias por orden de magnitud.
- e-15. Escribir las ecuaciones de los campos para el modo TE_{12} en una guía de ondas cuadrada ($a=b$). Dibujar la variación de las componentes del campo en función de x e y .
- e-16. Demostrar que las soluciones para los campos \vec{E} y \vec{H} de una onda TE en una guía rectangular satisfacen las ecuaciones de Maxwell.
- e-17. Dada una guía dieléctrica, como la de la figura E.13, demostrar que B_x es continuo en $x = \pm d$.
- e-18. Demostrar que la ecuación característica para los modos pares TM de la guía del problema anterior es la dada en E.97.
- e-19. En una guía, del mismo tipo que las de los problemas anteriores, con $d = 0,5 \mu m$, $\epsilon_n = 1,01 \epsilon_0$ y $\epsilon_a = \epsilon_0$, se propaga el modo TE_0 a la frecuencia $\omega = 9 \times 10^{15} rad \cdot s^{-1}$. Determinar numéricamente la longitud de onda a lo largo de la guía.

SOLUCION :

De acuerdo con lo expuesto en la sección E.1.7, la longitud de onda a lo largo de la guía dieléctrica es

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta_n^2 - \kappa^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta_a^2 + \nu^2}}$$

donde

$$\beta_n = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{rn}} , \quad \beta_a = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{ra}} , \quad \kappa = \frac{a}{d} , \quad \nu = \frac{b}{d}$$

y

$$a^2 + b^2 = R^2 , \quad R = \frac{\omega d}{c} \sqrt{\varepsilon_{rn} - \varepsilon_{ra}} = 1,5$$

Para determinar a es necesario resolver la ecuación característica de la guía, la cual es transcendente. Como se indica en la figura E.31, esto puede llevarse a cabo buscando la intersección entre el círculo $b = \sqrt{R^2 - a^2}$ y la curva $b = a \operatorname{tg}(a)$, o, lo que es lo mismo, el cero de la función

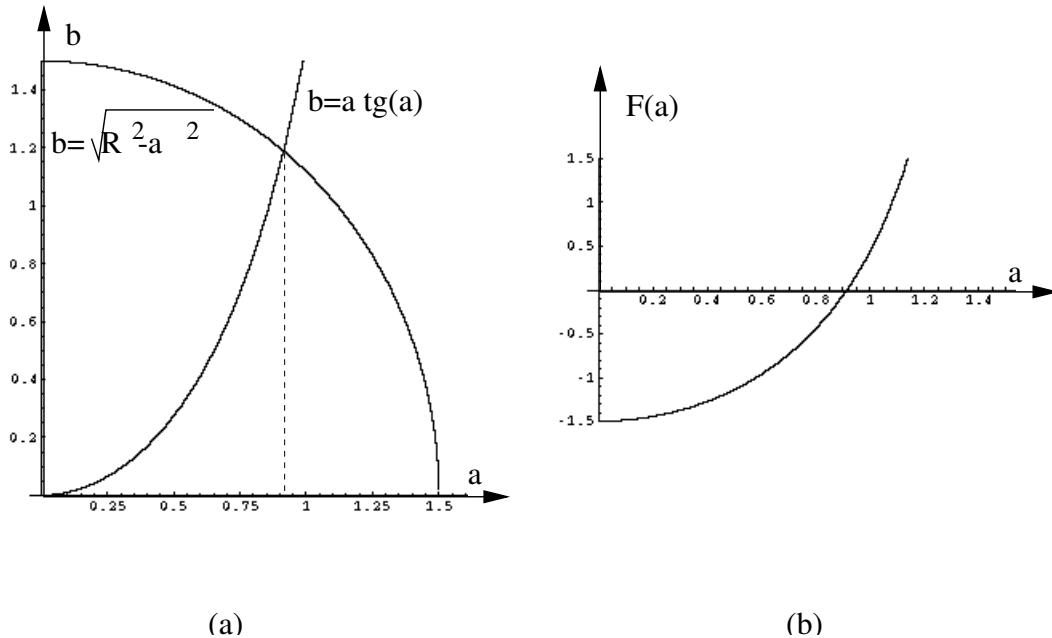


Figura E.31:

$$F(a) = a \operatorname{tg}(a) - \sqrt{R^2 - a^2}$$

La forma más fácil de hacerlo es con la ayuda de programas numéricos o gráficos. Aquí se hará con la ayuda de la calculadora y una estrategia sencilla:

- Se parte del punto medio del intervalo $0 \leq a \leq R$.
- Se determina el menor intervalo en que $F(a)$ cambia de signo y se elige el valor de a correspondiente a la mitad del mismo.

- Se finaliza cuando el cero queda acotado con el número de cifras que se estime suficiente (en este caso, con tres cifras significativas).

En la siguiente tabla se presentan las pruebas y los resultados sucesivos. Se toma como valor inicial (0) al $a = R$, para el cual, véase la figura, $F > 0$.

Nº de prueba	$a =$	$F \simeq$	Intervalo	Cotas
1	0,7500	-0,6	$0 \leftrightarrow 1$	
2	1,1250	+1,4	$1 \leftrightarrow 2$	
3	0,9375	+0,1	$1 \leftrightarrow 3$	
4	0,8437	-0,3	$3 \leftrightarrow 4$	
5	0,8906	-0,1	$3 \leftrightarrow 5$	
6	0,9140	-4×10^{-3}	$3 \leftrightarrow 6$	
7	0,9257	+0,05	$6 \leftrightarrow 7$	
8	0,9198	+0,02	$6 \leftrightarrow 8$	
9	0,9169	$+9 \times 10^{-3}$	$6 \leftrightarrow 9$	
10	0,9154	$+2,5 \times 10^{-3}$	$6 \leftrightarrow 10$	
11	0,9147	-7×10^{-4}	$10 \leftrightarrow 11$	
12	0,9150	$+6,5 \times 10^{-4}$	$11 \leftrightarrow 12$	Superior
13	0,9148	$-2,6 \times 10^{-4}$		Inferior

Como solución aproximada de a puede darse el valor intermedio de las dos últimas cotas

$$a = 0,9149 \Rightarrow b = 1,189 \Rightarrow \kappa = 1,830 \times 10^6 \text{ m}^{-1}, \nu = 2,377 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$$

y

$$\lambda_z = 0,2087 \mu\text{m}$$

e-20. Para ondas TEM que se propagan por una línea de transmisión y cuyas amplitudes son funciones arbitrarias del tiempo, calcular la fracción de energía incidente que es reflejada por una resistencia de carga R_L y la que es disipada por la misma.

e-21. Para la guía de la figura E.32, calcular, en función de la potencia media incidente P_{i1} , las potencias medias: reflejada en el primer tramo de la línea P_{r1} , incidente y reflejada en el segundo tramo, P_{i2} y P_{r2} y las disipadas por las impedancias Z_a y Z_L , P_a y P_L . Comprobar que se cumple el principio de conservación de la energía.

SOLUCION :

Téngase en cuenta que la impedancia Z_a está conectada en paralelo con la línea lo que implica la continuidad de la tensión y la discontinuidad de la intensidad.

e-22. Calcular la capacidad y la autoinducción equivalentes por unidad de longitud de una guía rectangular operando en el modo TE₁₀.

SOLUCION :

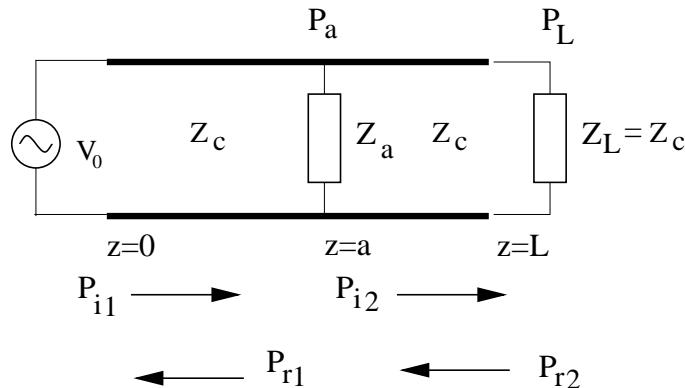


Figura E.32:

La capacidad y la autoinducción equivalentes por unidad de longitud de una guía pueden obtenerse a partir del número de onda longitudinal y de la impedancia característica que, de acuerdo con el convenio adoptado en este texto, es la del modo.

$$\beta_z = \omega \sqrt{\mathcal{L} \mathcal{C}} \quad , \quad Z_c = Z^{TE} = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}$$

de donde

$$\mathcal{L} = Z^{TE} \frac{\beta_z}{\omega} \quad , \quad \mathcal{C} = \frac{\beta_z}{\omega Z^{TE}}$$

y

$$\mathcal{L} = \frac{Z}{v} \quad , \quad \mathcal{C} = \frac{1}{v Z} \left(1 - \frac{f_{c10}^2}{f^2} \right)$$

- e-23. Calcular la capacidad y la autoinducción equivalentes por unidad de longitud de una línea coaxial y deducir a partir de estos parámetros la impedancia característica de la misma. Comprobar que $\mathcal{L} \mathcal{C} = \epsilon \mu$. Demostrar que la relación que deben cumplir el radio menor a y el mayor b para que una línea, con aire como dieléctrico, tenga una impedancia de 50Ω , es $b/a = 2/3$.

SOLUCION :

Cálculo de la capacidad :

En el caso de un modo *TEM*, la capacidad equivalente por unidad de longitud viene dada por

$$\mathcal{C} = \frac{Q(z, t)}{V(z, t)} = \frac{Q_0}{V_0}$$

donde

$$V(z, t) = V_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \quad \text{y} \quad Q(z, t) = Q_0 e^{j(\omega t - \beta z)}$$

son el potencial *TEM*, entre el conductor interno y el externo, y la carga por unidad de longitud que hay en la superficie interior del conductor externo (véase

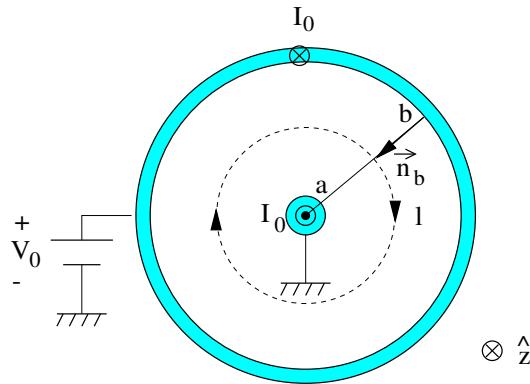


Figura E.33:

la figura E.33). Estas magnitudes pueden calcularse en función de la amplitud del campo eléctrico \vec{E}_0 .

Dado que el campo eléctrico deriva del potencial de la misma forma que lo hace el electrostático y que la simetría de la línea es cilíndrica

$$\vec{E}_0 = -A \frac{\hat{\rho}}{\rho}$$

El potencial se obtiene calculando la circulación del campo eléctrico

$$V_0 = - \int_a^b E_0 d\rho = A \ln \frac{b}{a} \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

y

$$\vec{E}_0 = -\frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \quad (\text{E.182})$$

Para calcular la carga se hace uso de la condición de contorno $\sigma_0 = \vec{D}(b) \cdot \vec{n}_b$, donde σ_0 es la densidad superficial de carga en $\rho = b$.

$$Q_0 = 2\pi b \sigma_0 = 2\pi \varepsilon_0 \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} \Rightarrow C = 2\pi \varepsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{b}{a}}$$

Cálculo de la autoinducción :

La autoinducción equivalente por unidad de longitud se calcula planteando un problema análogo al magnetostático.

$$\mathcal{L} = \frac{2 W_{m0}}{I_0^2}$$

donde W_{m0} es la energía magnética contenida en la unidad de longitud de la línea e I_0 la intensidad que recorre al conductor superior en la dirección positiva del eje z , como se muestra en la figura E.33.

Hallando la circulación del campo magnético a lo largo del camino l que rodea al conductor interno, se tiene que

$$\vec{B}_0 = -\frac{\mu I}{2\pi} \frac{\hat{\rho}}{\rho}$$

La densidad de energía y la energía por unidad de longitud son

$$\omega_{m0} = \frac{1}{2\mu} B_0^2 \quad , \quad W_{m0} = \int_v \omega_{m0} dv = \frac{\mu I_0^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

donde v es el volumen de una sección de línea de longitud unidad.

De los resultados anteriores se deduce que

$$\mathcal{L} \mathcal{C} = \mu \varepsilon$$

Impedancia característica :

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} = \frac{Z_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{E.183})$$

Para el aire, $Z_0 = 120\pi$, luego

$$\frac{b}{a} = e^{\frac{2\pi Z_c}{Z_0}} = 2,3$$

- e-24. El dieléctrico de una línea coaxial soporta sin ruptura un campo eléctrico máximo E_m . Hallar la impedancia característica óptima para que la línea transporte la máxima potencia. ¿Cuál es esta potencia máxima en función de E_m y el radio a del conductor interno? Supóngase que el radio externo tiene un valor fijo b pero que puede variarse la razón $x = b/a$, donde a es el radio del conductor interno.

SOLUCION :

El campo eléctrico, según se vio en E.182 del problema anterior, puede ser expresado en función de x

$$E_0 = \frac{V_0}{\ln(x)} \frac{\hat{\rho}}{\rho}$$

Su valor máximo se alcanza para $\rho = a$

$$E_{max} = \frac{x V_0}{b \ln(x)} \frac{\hat{\rho}}{\rho}$$

La potencia media transmitida por una onda que viaja en el sentido positivo del eje z es

$$\langle P \rangle = \int_{S_t} \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{s} = \frac{2\pi V_0^2}{Z_0 \ln(x)}$$

donde $d\vec{s} = \rho d\rho d\phi \hat{z}$.

Substituyendo V_0 por E_{max} ,

$$\langle P \rangle = \frac{2\pi b^2 E_{max}^2}{Z_0} \frac{\ln(x)}{x^2}$$

El valor x_{max} que hace máxima a la potencia transmitida es solución de la ecuación

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} \right) = 0 \quad \text{para} \quad 1 < x < \infty \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = 1,65$$

lo que, teniendo en cuenta que el dieléctrico es aire, corresponde a una impedancia característica (véase el problema anterior, expresión E.183) y a una potencia máxima

$$Z_c = 30 \Omega , \quad \langle P \rangle_{max} = 3 \times 10^{-3} b^2 E_{max}^2$$

- e-25. Suponer que en un punto $z=0$ de una guía, cuyo dieléctrico es el vacío, se genera una onda en el modo TE_{10} a una frecuencia inferior a la de corte. Calcular los valores instantáneo y medio del vector de Poynting y demostrar que la energía no se propaga hacia el interior de la guía.

SOLUCION :

A la frecuencia de trabajo, la onda está en corte por lo que hay que substituir $j\beta_{z10} = \frac{1}{\delta_{z10}}$

$$\delta_{z10} = \frac{1}{j\beta_{z10}} = \frac{a}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_{c10}}\right)^2}} \simeq 3a$$

Los valores instantáneo y medio de la componente longitudinal del vector de Poynting son

$$\mathcal{S}_z(t) = -E_y(t) H_x(t) , \quad \langle \mathcal{S}_z \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}[E_y H_x^*]$$

Para el modo TE_{10} , los campos complejos son

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{1}{\delta_{z10}} \left(\frac{a}{\pi} \right) H_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) e^{-\left(\frac{z}{\delta_{z10}}\right)} e^{j\omega t} \\ E_y &= -j\omega \mu_0 \left(\frac{a}{\pi} \right) H_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) e^{-\left(\frac{z}{\delta_{z10}}\right)} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

De las expresiones anteriores se deduce que

$$\langle \mathcal{S}_z \rangle = 0$$

Por otra parte, hallando la parte real de los campos y haciendo $\delta_{z10} = 3a$

$$\mathcal{S}_z(t) = \omega \mu_0 \left(\frac{a}{6\pi^2} \right) H_0^2 e^{-2\left(\frac{z}{\delta_{z10}}\right)} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{sen}(2\omega t)$$

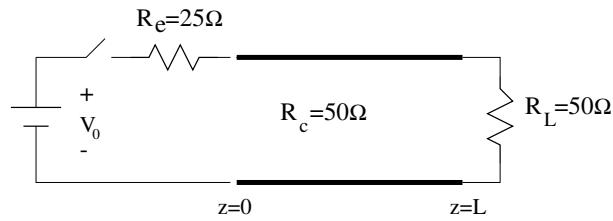


Figura E.34:

expresión de la que se deduce que la energía se desplaza de forma oscilante con media nula y que su amplitud se atenúa, sin disiparse, con una profundidad de penetración mitad de la correspondiente a las amplitudes.

- e-26. En la línea de la figura E.34 se cierra el interruptor en $t = 0$. Suponiendo que $v(z,0) = i(z,0) = 0$, hallar $v(z,t)$ e $i(z,t)$ para $t > 0$.

SOLUCION :

La solución general de la ecuación de onda en una línea sin pérdidas, se compone de dos términos, de forma arbitraria y que se mueven en direcciones opuestas con velocidad v , más un posible término constante

$$\begin{aligned} v(z, t) &= v_i(z - vt) + v_r(z + vt) + V_0 \\ i(z, t) &= \frac{1}{R_c} [v_i(z - vt) - v_r(z + vt)] + I_0 \end{aligned}$$

Dadas las condiciones iniciales del problema, $V_0 = 0$ e $I_0 = 0$.

Estas ondas se reflejan sucesivamente en ambos extremos de la línea y tardan en recorrer su longitud L un tiempo $T = \frac{L}{v}$. Se analizará dicha solución en el intervalo $0 \leq t < 2T$. Se empezará por la primera mitad del mismo

- (1) $\rightarrow 0 \leq t < T$.

Durante este intervalo, la onda que se genera al principio de la línea no ha llegado aún al final de la misma, por lo que no existe onda reflejada

$$\begin{aligned} v_1(z, t) &= v_{i1}(z - vt) \\ v_1(z, t) &= \frac{1}{R_c} v_{i1}(z - vt) \end{aligned}$$

La resistencia total que presenta la línea es

$$R_1(z, t) = \frac{v_1(z, t)}{i_1(z, t)} = R_c$$

Mientras no tenga lugar una reflexión, la resistencia presentada por la línea es independiente de la posición y del tiempo e igual a la resistencia característica.

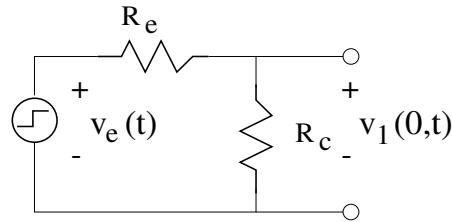


Figura E.35:

En consecuencia, para determinar v_{i1} solo es necesario aplicar la condición de frontera en el origen $z = 0$. La figura E.35 representa al circuito equivalente de esta condición, donde la tensión de entrada $v_e(t)$ es la función escalón

$$v_e(t) = V_0 u(t), \quad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

y

$$v_1(0, t) = v_{i1}(-vt) = \frac{2}{3} V_0 u(t)$$

Como $t = (t - \frac{z}{v})_{z=0}$

$$v_1(z, t) = \frac{2}{3} V_0 u(t - \frac{z}{v})$$

En la figura E.36a se representa a la función $v_1(0, t)$, en función de t , y en la E.36b a la función $v_1(z, t_0)$ en función de z .

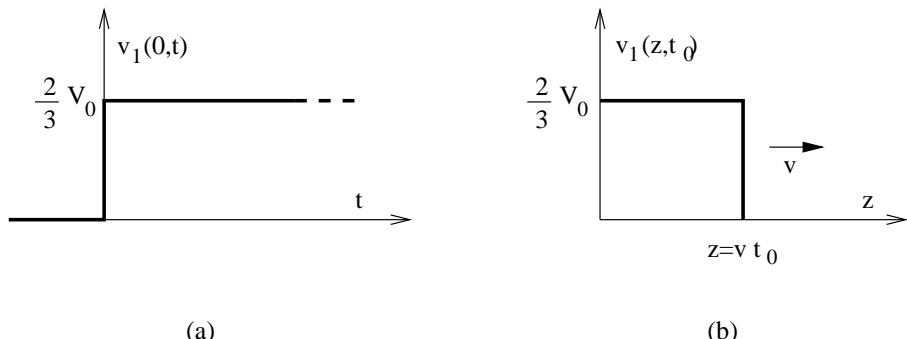


Figura E.36:

- (2) $\rightarrow T \leq t < 2T$.

La tensión incidente llega al extremo $z = L$ en el instante $t = T$, por lo que

$$v_{i1}(t) = \frac{2}{3} V_0 u(t - T)$$

y aparece una onda reflejada que se propaga en sentido negativo del eje z . La onda total puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned} v_2(z, t) &= v_{i1}(t) + v_{r2}(z, t) \\ i_2(z, t) &= \frac{1}{R_c}[v_{i1}(t) - v_{r2}(z, t)] \end{aligned}$$

Para determinar a la onda reflejada, se debe aplicar la condición de frontera en el extremo de carga $z = L$ (se hará primero para R_L arbitrario y, después se particularizará para el caso de "coplamiento perfecto" $R_L = R_c$)

$$R_L = \frac{v_2(L, t)}{i_2(L, t)} \Rightarrow v_{r2}(z = L, t) = \rho_L v_{i1}(t) = \rho_L \frac{2}{3} V_0 u(t - T)$$

donde

$$\rho_L \equiv \frac{R_L - R_c}{R_L + R_c}$$

Para obtener la expresión de la onda reflejada en un punto arbitrario de la guía, basta con tener en cuenta que se propaga en el sentido negativo del eje por lo que, en $v_{r2}(z = L, t)$,

$$t \rightarrow \left(t + \frac{z}{v} + t_0 \right)_{z=L} \Rightarrow t_0 = -T$$

y

$$v_{r2}(z, t) = \rho_L \frac{2}{3} V_0 u\left(t + \frac{z}{v} - 2T\right)$$

La constante t_0 es necesaria para ajustar el instante inicial ($t = T$) de partida de esta onda desde el extremo de carga.

El enunciado especifica una resistencia de carga igual a la característica, por lo que el coeficiente de reflexión es nulo y no tiene lugar la reflexión. Luego, para $R_L = R_c$,

$$v_{r2}(z, t) = 0 \Rightarrow v_2(z, t) = \frac{2}{3} V_0$$

- e-27. En la figura E.37 se muestra una línea de transmisión cuya carga está formada por una resistencia y un condensador. Calcular la diferencia de potencial entre las placas del condensador y dibujarla para el caso $R = R_c$. Suponer al condensador descargado inicialmente y $RC \ll T = L/v$, $t \leq 2T$.

SOLUCION :

Para simplificar, se supone que el interruptor se cierra en $t = -T$ de forma que el escalón de tensión llega al final de la línea en $t = 0$. Como en el problema anterior, se consideran dos intervalos:

- (1) $\rightarrow -T \leq t < 0$.

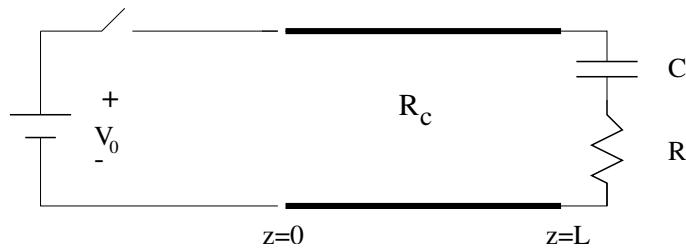


Figura E.37:

La onda no ha llegado todavía a $z = L$ y solo existe una onda incidente

$$v_1(z, t) = v_{i1}(z, t) = V_0 u(t - \frac{z}{c} + T)$$

- (2) $\rightarrow 0 \leq t < T$.

$$\begin{aligned} v_2(z, t) &= v_{i1}(z, t) + v_{r2}(z, t) \\ i_2(z, t) &= \frac{1}{R_c} [v_{i1}(z, t) - v_{r2}(z, t)] \end{aligned}$$

La onda incidente llega a $z = L$ en $t = 0$

$$v_{i1}(L, t) = V_0 u(t)$$

Simplificando la notación

$$\begin{aligned} v_2(L, t) &\rightarrow v_2(t) = V_0 u(t) + v_r(t) \\ i_2(L, t) &\rightarrow i_2(t) = \frac{1}{R_c} [V_0 u(t) - v_r(t)] \end{aligned}$$

La figura E.38a representa la condición de contorno que se aplica en $z = L$

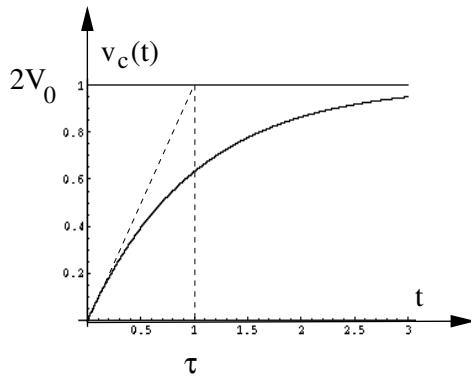
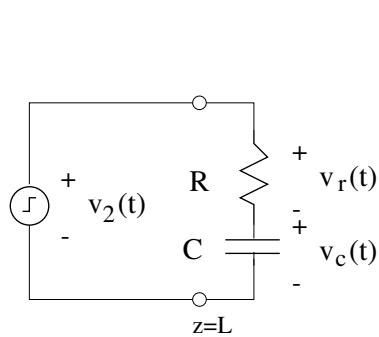
$$v_2(t) = i_2(t) R + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(t) dt$$

Derivando

$$\frac{d v_2(t)}{d t} = R \frac{d i_2(t)}{d t} + \frac{i_2(t)}{C}$$

donde, para $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{d v_2(t)}{d t} &= \frac{d v_r(t)}{d t} \\ \frac{d i_2(t)}{d t} &= -\frac{1}{R_c} \frac{d v_r(t)}{d t} \\ v_2(t) &= V_0 + v_r(t) \\ i_2(t) &= \frac{1}{R_c} [V_0 - v_r(t)] \end{aligned}$$



(a)

(b)

Figura E.38:

Substituyendo, la ecuación diferencial puede escribirse de la forma

$$\frac{d v_r(t)}{d t} + \frac{v_r(t)}{\tau} = \frac{V_0}{\tau} \quad , , \quad \tau \equiv (R + R_c) C$$

La solución general es

$$v_r(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + V_0 \quad \Rightarrow \quad v_2(t) = 2V_0 + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Para determinar la constante A basta con tener en cuenta que la caída de tensión en un condensador debe ser continua, por lo que

$$v_c(t=0_+) = v_c(t=0_-) = 0$$

y

$$v_2(t=0_+) = \begin{cases} V_0 - v_r(t=0_+) = 2V_0 + A \\ i_2(t=0_+) R = -A \frac{R}{R_c} \end{cases} \Rightarrow A = V_0 \quad \text{para} \quad R = R_c$$

De acuerdo esto

$$v_r(t) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$v_c(t) = 2V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

La figura E.38b representa a la tensión $v_c(t)$.

- e-28. Una línea de impedancia característica de 100Ω , longitud $L=30 \text{ cm}$ y cuyo dieléctrico es el vacío, está cortocircuitada en un extremo y tiene conectada en paralelo una capacidad en el

otro. Hallar el valor de dicha capacidad para que el conjunto resuene a la frecuencia $f_0 = 125 \text{ MHz}$.

SOLUCION :

El circuito de la figura E.39a puede representarse como en la figura E.39b, donde la impedancia equivalente de la línea cortocircuitada, vista desde la entrada, equivale a una autoinducción L (se emplea la misma notación que para la posición del extremo de la línea).

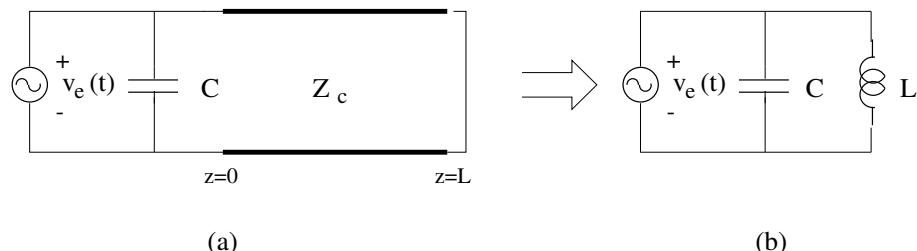


Figura E.39:

Escribiendo

$$Y_C = j\omega C$$

,la admitancia del condensador, e

$$Y_{cc0} = \frac{1}{Z_{cc0}} = \frac{1}{j\mathcal{Z}_c \operatorname{tg}(\beta L)}$$

,la admitancia equivalente de la línea vista desde $z = 0$, la admitancia total a la que se aplica la tensión de entrada es

$$Y_e = Y_C + Y_{cc0}$$

En resonancia, esta admitancia debe ser nula. Teniendo en cuenta que el dieléctrico es el vacío y, por lo tanto, $\beta = \beta_0 = \frac{\omega_0}{c}$

$$C = \frac{1}{\omega_0 \mathcal{Z}_c \operatorname{tg}(\beta_0 L)} = 12,7 \text{ pF}$$

La línea cortocircuitada equivale, en este caso, a una autoinducción, de forma que

$$Y_e(\omega) = j\omega C \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Y_e(\omega_0) = 0$$

- e-29. La línea de la figura E.40 tiene un dieléctrico con $\varepsilon_r = 1$ y $\mu_r = 1$, opera a 300 MHz y tiene una longitud de $1,2 \text{ m}$. $R_1 = R_2 = \mathcal{Z}_c = 50 \Omega$, $C = 1/(3\pi)10^{-10} \text{ F}$ y $V_0 = 10 \text{ V}$. Hallar:

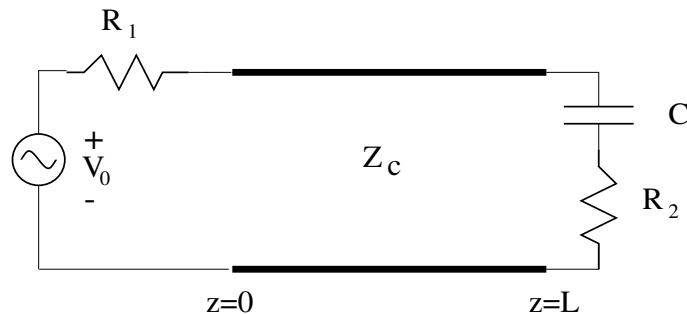


Figura E.40:

- a) *Amplitudes.*
- b) *Impedancia de entrada.*
- c) *Coeficiente ρ en los extremos.*
- d) *Potencias disipadas.*

SOLUCION :

Este tipo de problemas se reduce, básicamente, a la aplicación en la entrada $z = 0 \rightarrow \xi = L$ y en el extremo de carga $z = L \rightarrow \xi = 0$ de las condiciones establecidas

$$(A) \rightarrow \frac{V(\xi = 0)}{I(\xi = 0)} = Z_L \quad , \quad Z_L = R_2 + \frac{1}{j\omega C} = 50 - j50 \Omega$$

$$(B) \rightarrow V(\xi = L) = V_0 - I(\xi = L) R_1$$

Las amplitudes pueden calcularse directamente de la aplicación de las condiciones anteriores. El resto de las magnitudes solicitadas en el enunciado se deducen de dichas amplitudes.

(a) - La tensión y la intensidad vienen dadas por

$$V(\xi) = V^i e^{j\beta\xi} + V^r e^{-j\beta\xi}$$

$$I(\xi) = \frac{1}{Z_c} (V^i e^{j\beta\xi} - V^r e^{-j\beta\xi})$$

donde, por tratarse de una línea cuyo dieléctrico es el vacío, $\beta = \frac{\omega}{c}$

Substituyendo en (A) y (B) y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante

$$V^i = 1,55 - j4,76 V \quad , \quad V^r = -1,59 - j1,57 V$$

También puede solucionarse el problema desde otros puntos de partida como, por ejemplo,

(c) - Calculando primero el coeficiente de reflexión $\rho(\xi)$. En el extremo de carga

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = 0,2 - j 0,4$$

En el de entrada

$$\rho_e = |\rho_L| e^{j(\varphi_L - 2\beta L)} = -0,4 + j 0,21$$

donde φ_L es la fase de ρ_L .

(b) - Calculando la impedancia $Z(\xi = L)$

$$Z(\xi = L) = Z_c \frac{Z_L + j Z_c \operatorname{tg}(\beta L)}{Z_c + j Z_L \operatorname{tg}(\beta L)} = 20,1 + j 10,3 \Omega$$

(a) - Y calculando las amplitudes mediante el circuito equivalente de entrada que se muestra en la figura E.41

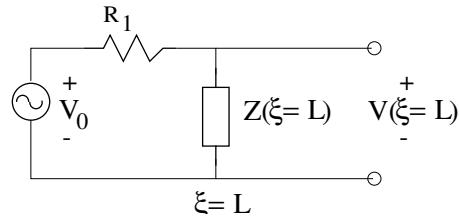


Figura E.41:

$$V(\xi = L) = \frac{V_0 Z(\xi = L)}{R_1 + Z(\xi = L)} = 3,02 + j 1,03 V$$

$$V^i = \frac{V(\xi = L) e^{-j\beta L}}{\rho_e + 1} = 1,55 - j 4,76 V$$

$$V^r = \rho_L V^i = -1,59 - j 1,57 V$$

(d) - La potencia media consumida por la resistencia R_1 es

$$\langle P_1 \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[I(\xi = L) V^*(\xi = L)] = \frac{1}{2} R_1 |I(\xi = L)|^2 = 0,50 \text{ watos}$$

y la consumida por R_2

$$\langle P_2 \rangle = \frac{1}{2} R_2 |I(\xi = 0)|^2 = 0,2 \text{ watos}$$

La potencia consumida por la totalidad del circuito es

$$\langle P_3 \rangle = \frac{1}{2} V_0 \operatorname{Re}[I(\xi = L)] = 0,7 \text{ watos}$$

Dado que la línea no tiene pérdidas, se comprueba que esta última es igual a la suma de las dos anteriores.

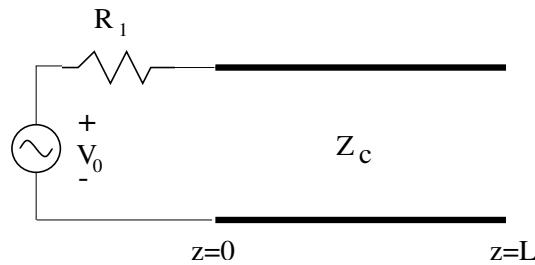


Figura E.42:

- e-30. Calcular la impedancia de carga de una línea de transmisión sabiendo que tiene una impedancia característica de 60Ω , que su razón de onda estacionaria es $S=4$ y que en la carga existe un mínimo de corriente.
- e-31. Sea una línea de transmisión en circuito abierto (E.42), $Z_c = 50\Omega$ y longitud $5/16 \lambda$. Calcular el voltaje en el extremo de carga si se alimenta con un generador de impedancia interna $R_1 = 20\Omega$ y $V_0 = 10 V$.
- e-32. Una línea de transmisión tiene $Z_c = 75\Omega$, $v_f = 200 m/\mu s$, $f=1 GHz$, $S=4$, $\xi_{min}=10 cm$. Hallar Z_L .
- e-33. Expresar la razón entre la potencia media reflejada y absorbida por la impedancia de carga de una línea de transmisión en función de la razón de onda estacionaria.
- e-34. Una línea de transmisión sin perdidas tiene una carga normalizada $\frac{Z_L}{Z_c} = 0,5+0,7j$. La longitud de onda sobre la línea de transmisión es de 40 mm. Calcular:
- Impedancia a 8 mm de la carga
 - Valor del coeficiente de reflexión en la carga
 - Valor de S
 - Distancia del primer mínimo
- e-35. En la figura E.43 se representa a una línea, de impedancia característica $Z_c = 50 \Omega$ y cargada con la impedancia $Z_L = 22 + 7,5j \Omega$, que está conectada en paralelo con un segmento del mismo tipo de guía en cortocircuito. Este último está situado a una distancia d de la carga y tiene una longitud l . Hallar los valores mínimos de d y l para que la guía quede perfectamente acoplada en su entrada, es decir, para que la impedancia de entrada sea igual a la impedancia característica.

SOLUCION :

Para resolver este problema, se trasladan las admitancias del cortocircuito y de la carga al punto $z = z_0$, véase la figura E.44, y se impone la condición

$$Y_{z0} = \mathcal{Y}_c = \frac{1}{Z_c} , , \quad Y_{z0} = Y_{cc0} + Y_{L0}$$

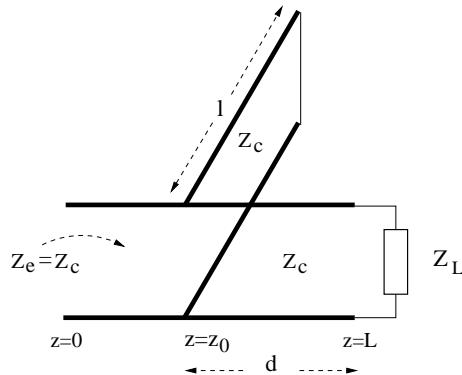


Figura E.43:

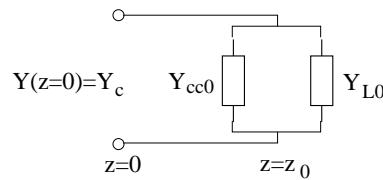


Figura E.44:

donde Y_{z_0} es la admitancia total en $z = z_0$ y Y_{cc0} y Y_{L0} las del cortocircuito y de la carga trasladadas a dicho punto. De esta forma, la línea queda perfectamente acoplada y $Z(z = 0) = \mathcal{Z}_c = \frac{1}{Y_c}$.

Si se normaliza la ecuación anterior, dividiendo por \mathcal{Y}_c , se emplea la notación

$$\alpha \equiv \frac{1}{tg(\beta l)} , , \quad \eta = tg(\beta d)$$

para las incógnitas y

$$Y_L^N = a + j b$$

para la admitancia normalizada de la carga, se tiene que

$$1 + j \alpha = \frac{1 + j(a + j b) \eta}{a + j b + j \eta}$$

Hallando la parte real y la imaginaria de esta ecuación y despejando se tiene

$$\alpha = \frac{\eta(a - 1) - b}{a}$$

$$\eta = \frac{1 - a + \alpha b}{b - \alpha}$$

Eliminando α entre las dos ecuaciones se tiene que

$$A \eta^2 + B \eta + C = 0$$

donde A , B y C son funciones de a y b .

Operando se obtiene el par de soluciones

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0,87 \quad , \quad \alpha_2 = 0,87 \\ \eta_1 &= 0,42 \quad , \quad \eta_2 = 0,95\end{aligned}$$

Los valores normalizados de las longitudes, son

$$l_1^N \equiv \frac{l_1}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{artg}\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) + 0,5 = -0,14 + 0,5 = 0,36$$

Se ha tenido en cuenta que la tangente inversa tiene una periodicidad de $\frac{1}{2}\lambda$. De forma análoga,

$$d_1^N \equiv \frac{d_1}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{artg}(\eta_1) = 0,0063$$

$$d_2^N \equiv \frac{d_2}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{artg}(\eta_2) + 0,5 = 0,39$$

e-36. ¿Cuál es el valor de Q para una cavidad cúbica vacía, con paredes de cobre y aristas de 3 cm, que trabaja a la frecuencia de resonancia del modo TE_{101} ? ($\sigma = 5'8 \cdot 10^7 S \cdot m^{-1}$). Comparar el resultado con la estimación que se obtiene en función de los volúmenes "ocupados" por los campos y por las corrientes.

SOLUCION :

De acuerdo con el texto, la frecuencia de resonancia del modo TE_{101} es $f_{101} \simeq 7 GHz$ y el campo magnético

$$H_z = H_0 \cos\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi \frac{z}{a}\right)$$

$$H_x = -H_0 \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi \frac{z}{a}\right)$$

El factor Q es

$$Q \equiv \omega_{101} \frac{\langle W_{em} \rangle_{\omega_{101}}}{\langle P_d \rangle_{\omega_{101}}} = \frac{2}{\delta_{101}} \frac{\int_V |\vec{H}|^2 dv}{\int_S |\vec{H}|^2 ds} = \frac{3}{\delta_{101}}$$

El orden de magnitud se estima con la ayuda de la expresión

$$Q_{101} \sim \frac{2V}{S\delta_{101}} = \frac{1}{\delta_{101}}$$

e-37. Hallar las cinco primeras frecuencias de resonancia para una cavidad rectangular vacía, de dimensiones $a = 3 cm$, $b = 1 cm$ y $L = 9 cm$. Estimar, de la misma forma que en el problema anterior, el valor de Q para cada una de estas frecuencias. Supuesto que, en un instante inicial, la energía almacenada se halle igualmente repartida en las proximidades de estas resonancias, ¿Cómo evolucionarán en el tiempo las relaciones entre las energías correspondientes a las últimas resonancias y la correspondiente a la fundamental ?

Apéndice F

Apéndice del capítulo 5

F.1. Ejemplos de multipolos radiantes

Los ejemplos siguientes ilustran como, en la naturaleza y en la práctica, existe una gran variedad de sistemas eléctricamente pequeños que radian predominantemente como multipolos simples. Parte de los ejemplos propuestos pueden ser tratados con más rigor en el seno de la mecánica cuántica o mediante los potenciales de Lienard-Wiechert. No obstante, dentro de las condiciones impuestas en cada caso, los resultados que se obtienen son siempre significativos.

F.1.1. Molécula apolar; dipolo con orientación fija

Como se muestra en la figura F.1, el modelo más simple que se puede hacer de una molécula apolar es el que la representa como una nube, esférica y uniforme, de carga negativa, que rodea a un núcleo positivo puntual. Se supone que un campo aplicado típico actúa perturbando ligeramente esta distribución, de forma que los centros de carga se desplazan una distancia \vec{r}_p que es muy inferior al radio de la distribución a . Puesto que el núcleo es mucho más masivo que la nube electrónica, se supone que éstos están prácticamente quietos y que los electrones se mueven con respecto al mismo. La fuerza sobre la nube electrónica es, por el principio de acción y reacción, igual y contraria a la que actúa sobre el núcleo. La figura F.1 muestra al núcleo desplazado una distancia $-\vec{r}_p$ con respecto al centro de cargas negativas. Suponiendo que los centros de carga están desplazados inicialmente una distancia \vec{r}_0 , se investigarán las características de la radiación emitida en la oscilación libre de una molécula de tipo hidrogenóide. Aplicando la ley de Gauss puede calcularse el campo en la posición del núcleo y la fuerza que las cargas negativas ejercen sobre las positivas \vec{f}_+ .

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho_- dv \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \vec{r}_p \quad , \quad \rho_- = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

donde ρ_- es la densidad de carga de la nube.

La fuerza sobre la carga negativa, referida al centro de carga positiva, es

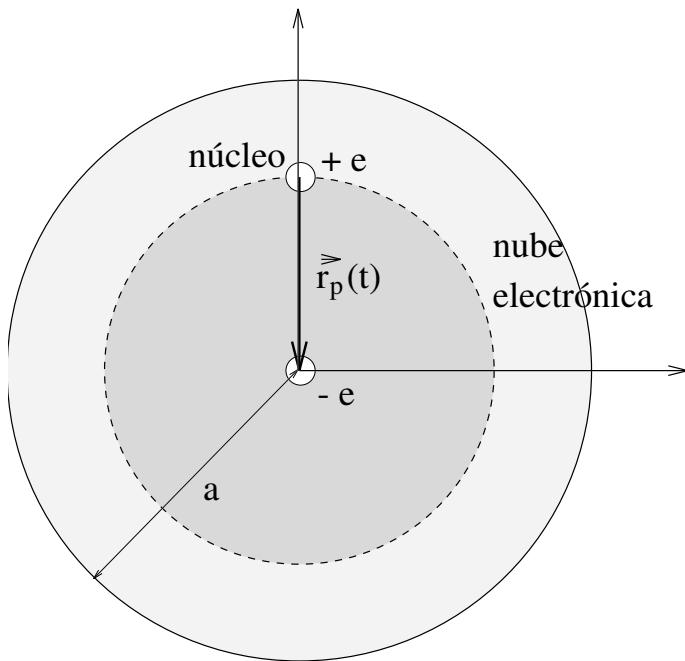


Figura F.1: Molécula apolar

$$\vec{f} = e\vec{E} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r}_p = -k \vec{r}_p \quad , \quad k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

La ecuación del movimiento del centro de carga negativa con respecto al núcleo corresponde a un movimiento armónico de frecuencia angular ω_0 y pulsación f_0 .

$$\frac{d^2 \vec{r}_p}{dt^2} = -\omega_0^2 \vec{r}_p \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f_0$$

El momento dipolar de la carga es, en consecuencia,

$$\vec{d} = -e r_0 \cos \omega_0 t \hat{r}_p \quad , \quad \vec{d}_{\omega_0} = -e \vec{r}_0$$

Tomando como valor típico del radio molecular $a \simeq 10^{-10} m$, se obtiene una frecuencia de radiación $f_0 \simeq 2,5 \cdot 10^{15} Hz$ y una longitud de onda $\lambda_0 \simeq 1,2 \cdot 10^{-7} m = 120 nm$ que corresponden al infrarrojo cercano.

F.1.2. Antena dipolar lineal

Es conveniente puntualizar que en la literatura de antenas se califica como *Antena dipolo*, o simplemente "dipolo", a sistemas radiantes que, por su dimensión, no son representables en términos

multipolares, salvo como agrupación de dipolos. La antena que aquí se trata corresponde a lo que en terminología de antenas se denomina "pequeño dipolo"; es una antena lineal de hilo conductor, alimentada en el centro, como se muestra en la figura F.2, cuya dimensión máxima L es eléctricamente pequeña. Se supone que el diámetro ϕ del hilo es, a su vez, mucho menor que L , lo que permite suponer que la corriente que la recorre es unidimensional. Dada la simetría del problema es de esperar que la carga acumulada en cada instante en la parte superior y en la inferior de la antena serán iguales y de distinto signo, por lo que el término más significativo de la radiación será dipolar eléctrico. Con las hipótesis de partida es posible determinar aproximadamente la forma en que la corriente se distribuye a lo largo de la antena y, aplicando la ecuación de continuidad, la distribución de carga y el momento dipolar. Considerando un segmento elemental de la antena, como se muestra en la figura F.2, que está recorrido por un intensidad $i(z', t)$ y que acumula una carga lineal ρ_L por unidad de longitud

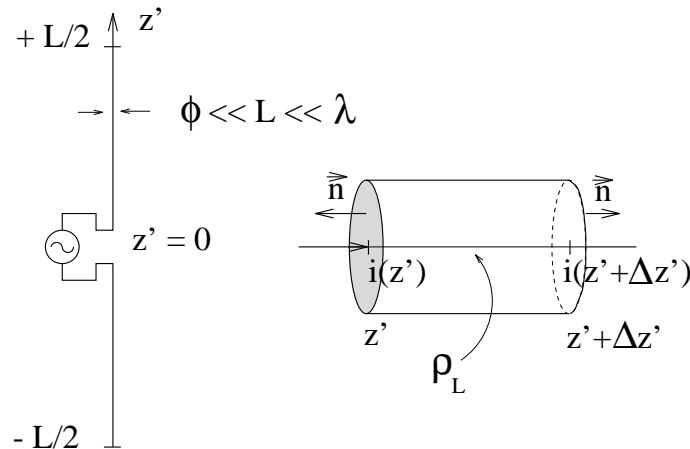


Figura F.2: Antena dipolar eléctrica

$$\int_{\Delta S} \vec{j} \cdot d\vec{r} = - \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad , , \quad i(z' + \Delta z', t) - i(z', t) \simeq \begin{cases} \frac{\partial i}{\partial z'} \Delta z' \\ - \frac{\partial \rho_L}{\partial t} \Delta z' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial i}{\partial z'} = - \frac{\partial \rho_L}{\partial t}$$

Si se supone que la corriente es armónica

$$I(z', t) = I_0(z') e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad \rho_{L\omega} = \frac{-1}{j\omega} \frac{\partial I_0(z')}{\partial z'}$$

En general, el cálculo de la distribución de corriente en una antena es un problema de contorno complicado. En el caso actual, $I_0(z')$ puede deducirse fácilmente mediante un desarrollo en serie alrededor del origen $z' = 0$

$$I_0(z') \simeq I_0 + \left(\frac{\partial I_0(z')}{\partial z'} \right)_{z'=0} z' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 I_0(z')}{\partial z'^2} \right)_{z'=0} z'^2 + \dots \simeq I_0 + Az'$$

donde A es una constante que puede estimarse como $A \sim I_0/\lambda$. λ debe ser una longitud próxima a la de las ondas en el medio exterior. Luego los términos despreciados son del orden $I_0/(z'/\lambda)^2 \ll I_0/(z'/\lambda)$ y la serie converge para $L \ll \lambda$. Además, la corriente debe ser continua en el origen y nula en los extremos de la antena

$$I_0 = \begin{cases} I_0(z' = 0) = I_0 \\ I_0(z' = \pm \frac{L}{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow I_0(z') = I_0 \left(1 - \frac{2}{L} |z'| \right)$$

por lo que se dispone de una expresión analítica aproximada de la distribución de la corriente en función de la amplitud I_0 . De aquí se deduce que

$$\rho_{L\omega} = \pm \frac{2I_0}{j\omega L} \quad \Rightarrow \quad d_\omega = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \rho_{L\omega} z' dz' = \frac{I_0 L}{2 j \omega}$$

F.1.3. Electrón en órbita circular; dipolo que gira

Ya se vió en su momento que un electrón atrapado en un campo magnético gira a la frecuencia ciclotrónica $\vec{\omega}_c = e\vec{B}_0/(\gamma_e m)$. Una carga puntual que gira con frecuencia $\vec{\omega}_0$ puede tomarse también como modelo clásico de electrón en un orbital atómico simétrico. Dado que la velocidad equivalente del electrón no es relativista en estos casos, se verá que la radiación emitida es principalmente de tipo dipolar eléctrico pero que también existen contribuciones cuadripolares significativas.

Radiación dipolar eléctrica :

De acuerdo con la figura F.3, la trayectoria de la partícula puede expresarse como

$$\vec{r}_p(t) = r_0 (\cos \omega_0 t \hat{x} + \sin \omega_0 t \hat{y}) \quad (\text{F.1})$$

En notación compleja

$$\vec{r}_p(t) = r_0 (\hat{x} - j \hat{y}) e^{j \omega t} \quad (\text{F.2})$$

El momento dipolar eléctrico resultante es

$$\vec{d}_{\omega_0} = -er_0 (\hat{x} - j \hat{y})$$

lo que corresponde a un dipolo que gira en un plano perpendicular a \hat{z} . La intensidad de la radiación dipolar eléctrica viene dada por 5.79, donde

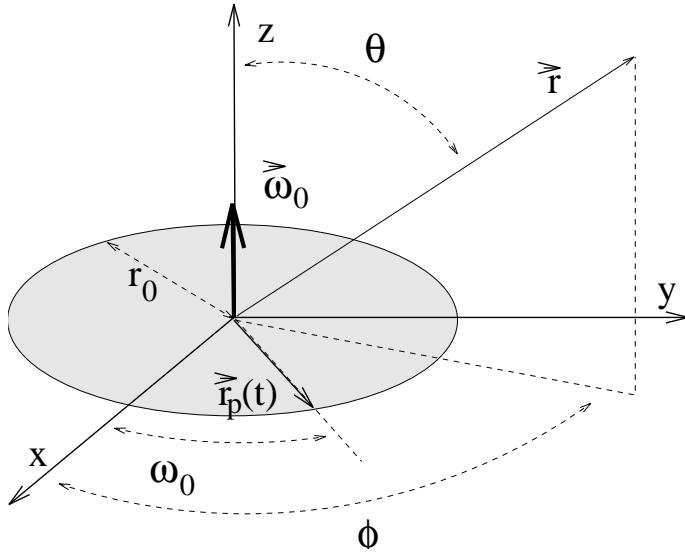


Figura F.3: Electrón en órbita circular

$$\vec{n} \wedge \vec{d}_{\omega_0} = -j e r_0 \{ (\hat{x} - j \hat{y}) \cos\theta - \hat{z} \sin\theta e^{j\varphi} \}$$

$$|\vec{n} \wedge \vec{d}_{\omega_0}|^2 = e^2 r_0^2 (1 + \cos^2\theta)$$

$$\frac{\langle \mathcal{I}(\theta) \rangle}{\langle \mathcal{I} \rangle_{max}} = f(\theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta)$$

La intensidad emitida en el plano que contiene al dipolo, ($\theta = \pi/2$), es igual a la máxima emitida por el dipolo fijo, mientras que en la dirección perpendicular al mismo, ($\theta = 0$), la intensidad es el doble de dicho máximo. Esto es así porque, como puede verse en la figura F.4, en el primer caso se observa un dipolo oscilante perpendicular — la proyección de \vec{d}_ω sobre \vec{n} no contribuye al campo observado — que produce un campo linealmente polarizado, y en el segundo se ve un dipolo giratorio transversal que equivale a dos dipolos oscilantes cruzados, los cuales producen un campo con polarización circular en la dirección de \vec{d}_ω . Visto desde esta última posición, el dipolo arrastra en su giro al campo de radiación con el retraso temporal correspondiente.

Momento magnético :

Puede comprobarse que el electrón en órbita circular tiene momento magnético estático y que, por lo tanto, no emite radiación dipolar magnética.

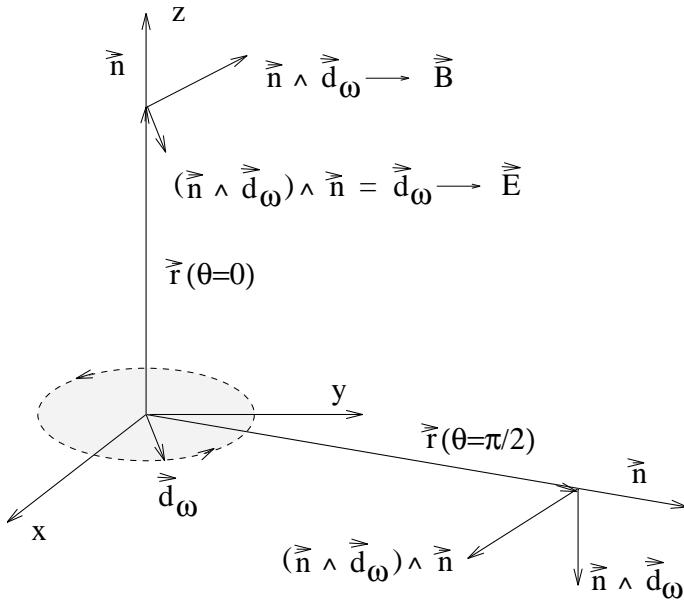


Figura F.4: Polarización de la radiación

$$\begin{aligned}\vec{m} &= \frac{1}{2} \int_{v'} \vec{r}' \wedge \vec{j} dv' = \frac{1}{2} e \int_{v'} \vec{r}' \wedge \vec{v} \delta\{\vec{r}' - \vec{r}_p(t)\} dv' \\ &= \frac{1}{2} e \vec{r}_p(t) \wedge \vec{v}(t) = \frac{1}{2} e r_0^2 \vec{\omega}_0\end{aligned}$$

Radiación cuadripolar eléctrica :

Además del campo de radiación dipolar eléctrico, de frecuencia ω_0 , el electrón orbital radia campos multipolares de orden superior. El cuadripolar eléctrico, aunque de menor importancia que el anterior, también es significativo y radia a la frecuencia $2\omega_0$. En el dominio del tiempo

$$Q_{\alpha\beta} = e \int_{v'} (3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2) \delta\{\vec{r}' - \vec{r}_p(t)\} dv' = e\{3r_\alpha r_\beta - \delta_{\alpha\beta} r_0^2\}$$

Sustituyendo para r_α y r_β los valores correspondientes para la trayectoria $\vec{r}_p(t)$ F.1, con $\alpha, \beta = x, y$

$$\begin{aligned}Q_{xx} &= -3 er_0^2 (\cos^2 \omega_0 t - \frac{1}{3}) \\ Q_{yy} &= -3 er_0^2 (\sin^2 \omega_0 t - \frac{1}{3}) \\ Q_{xy} &= Q_{yx} = -3 er_0^2 \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t\end{aligned}$$

Estas expresiones pueden desarrollarse en función de senos y cosenos de la frecuencia doble, con lo que las $Q_{\alpha\beta}$ tendrán componentes de frecuencia $2\omega_0$ e independientes del tiempo (estáticos o de frecuencia nula). Solo los términos de frecuencia doble contribuyen a la radiación. Escribiendo estos últimos con notación compleja

$$Q_{xx}^{2\omega_0} = -Q_{yy}^{2\omega_0} = -j Q_{xy}^{2\omega_0} \equiv Q_0 = -3 er_0^2 \cdot (e^{2j\omega_0 t})$$

se pone en evidencia que la radiación cuadripolar eléctrica del dipolo eléctrico giratorio tiene lugar a frecuencia $2\omega_0$. En forma matricial

$$\tilde{Q}_{2\omega_0} = Q_0 \begin{pmatrix} 1 & -j & 0 \\ -j & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$\tilde{Q}_{2\omega_0} \cdot \vec{n} = \frac{Q_0}{r} (x - j y) (\hat{x} - j \hat{y}) = -\frac{3}{2} r_0 \vec{d}_\omega \operatorname{sen}\theta e^{j\varphi}$$

y

$$|n\lambda(\tilde{Q}_{2\omega_0} \cdot \vec{n})|^2 = (Q_0)^2 \operatorname{sen}^2\theta (1 + \cos^2\theta) = (Q_0)^2 (1 - \cos^4\theta)$$

lo que hace que la radiación cuadripolar sea mucho más directiva que la dipolar. Puede comprobarse, además, que la relación entre las potencias radiadas en cada uno de estos términos puede ser estimada como

$$\frac{P_c}{P_d} \sim \left(\frac{\omega_0 r_0}{c}\right)^2 = (kr_0)^2 = \left(\frac{v_0}{c}\right)^2$$

donde v_0 es la velocidad de la carga en su giro. La aproximación dipolar empezará a ser ineficaz cuando la velocidad de la partícula se acerque a la de la luz, en cuyo caso la aproximación de los campos de radiación exigirá un número grande de términos multipolares.

En los átomos con velocidades muy inferiores a la de la luz, y en cualquier sistema radiante de cargas en órbita circular, la radiación dominante es la dipolar eléctrica. Se suele decir que las transiciones cuadripolares atómicas están prohibidas pero, de hecho, estas líneas de radiación pueden detectarse mediante medidas precisas y presentan un gran interés para la identificación de átomos y para la determinación de las condiciones de excitación de muchas fuentes de radiación.

F.1.4. Radiación de un momento magnético en precesión

La figura F.5 representa a un dipolo magnético rígido \vec{m} , como puedan ser los de spin u orbitales,¹ sometido a un campo externo \vec{B}_0 . El dipolo precede alrededor del campo, adquiriendo una proyección

¹Se entiende que un dipolo rígido es aquel que, sometido a un campo magnético externo moderado, no altera apreciablemente su magnitud

constante en su dirección y otra giratoria en el plano perpendicular. Esta última genera una radiación dipolar magnética análoga a la del dipolo eléctrico giratorio. El par \vec{T} que actúa sobre el dipolo y su ecuación del movimiento vienen dados por

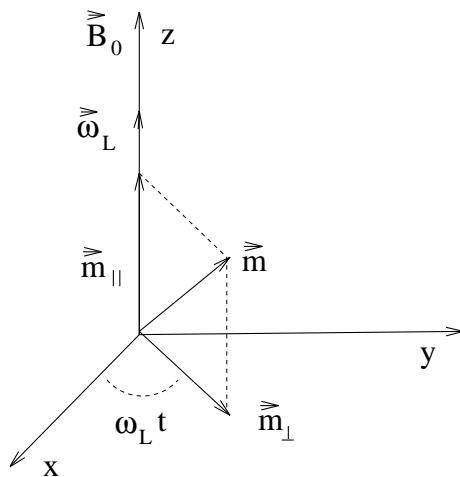


Figura F.5: Precesión del momento dipolar magnético

$$\vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0 = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{\Gamma} \frac{d\vec{m}}{dt}$$

donde Γ , la razón giromagnética, es el factor que relaciona al momento angular \vec{T} con el momento dipolar magnético. Escrita en función de la frecuencia de Larmor ω_L

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{\omega}_L \wedge \vec{m} \quad , \quad \vec{\omega}_L = -\Gamma \vec{B}_0$$

Esta es la ecuación típica de precesión del vector \vec{m} con velocidad angular $\vec{\omega}_L$. Dado que precede alrededor del campo aplicado, el momento dipolar tiene una componente paralela constante $\vec{m}_{||}$, que no radia, y una perpendicular giratoria

$$\vec{m}_{\perp} = m_{\perp 0} (\cos \omega_L t \hat{x} + \sin \omega_L t \hat{y})$$

que produce la radiación dipolar magnética mencionada más arriba. Esta energía radiante es de difícil detección porque los campos que pueden aplicarse en la práctica producen frecuencias de Larmor pequeñas y, consecuentemente, una baja intensidad de radiación. En los sistemas atómicos, la precesión se determina midiendo la frecuencia a la cual absorben energía, lo cual puede hacerse con mayor sensibilidad que para la emisión.

Efecto Zeeman :

Si al electrón en órbita circular que se ha considerado anteriormente se le somete a un campo magnético externo moderado, su momento magnético prececerá con una frecuencia de Larmor

$\omega_L \ll \omega_0$. Se puede demostrar que, bajo estas condiciones, la única alteración práctica que sufre la órbita, y su momento magnético, es el efecto de precesión. Sean \hat{x}_0 , \hat{y}_0 y \hat{z}_0 los vectores unitarios de un sistema de referencia solidario con la órbita y \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} los del sistema de laboratorio, en el que $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$. \hat{x}_0 se tomará de forma que gire en el plano $z = 0$ y se hará coincidir con \hat{x} en $t = 0$, mientras que \hat{y}'_0 es un vector unitario auxiliar en la dirección de la proyección de \hat{y}_0 sobre el mismo plano. α es el ángulo que \vec{m} y \hat{z}_0 forman con \hat{z} y el que \hat{y}_0 forma con el plano $z = 0$. Véase la figura F.6.

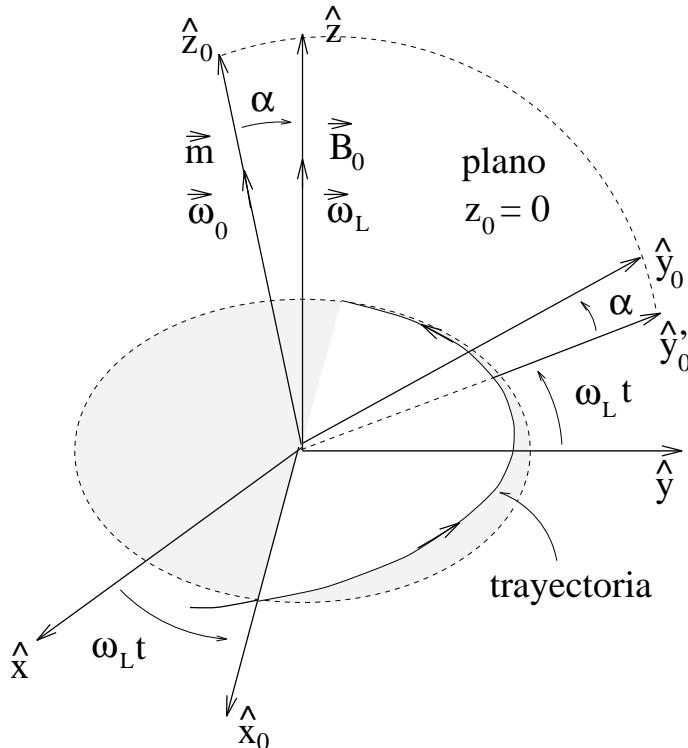


Figura F.6: Efecto Zeeman

Con respecto a sus ejes, la trayectoria del electrón es descrita por la ecuación

$$\vec{r}_p(t) = r_0(\cos \omega_0 t \hat{x}_0 + \sin \omega_0 t \hat{y}_0)$$

donde

$$\hat{x}_0 = \cos \omega_L t \hat{x} + \sin \omega_L t \hat{y}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_0 &= \cos \alpha \hat{y}'_0 + \sin \alpha \hat{z} \\ &= -\sin \omega_L t \cos \alpha \hat{x} + \cos \omega_L t \cos \alpha \hat{y} + \sin \alpha \hat{z} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\vec{r} = r_0 & [(\cos \omega_0 t \cos \omega_L t - \sin \omega_0 t \sin \omega_L t \cos \alpha) \hat{x} \\ & + (\cos \omega_0 t \sin \omega_L t + \sin \omega_0 t \cos \omega_L t \cos \alpha) \hat{y} \\ & + \sin \omega_0 t \sin \alpha \hat{z}]\end{aligned}$$

Los productos de senos y cosenos pueden desarrollarse en función de los arcos suma y diferencia, con lo que, el momento dipolar resultante es

$$\begin{aligned}\vec{d}(t) = -e\vec{r}_p(t) = -\frac{1}{2}er_0 & \{ (1 + \cos \alpha)[\cos(\omega_0 + \omega_L)t \hat{x} + \sin(\omega_0 + \omega_L)t \hat{y}] \\ & + (1 - \cos \alpha)[\cos(\omega_0 - \omega_L)t \hat{x} - \sin(\omega_0 - \omega_L)t \hat{y}] \\ & + 2 \sin \alpha \sin \omega_0 t \hat{z} \}\end{aligned}$$

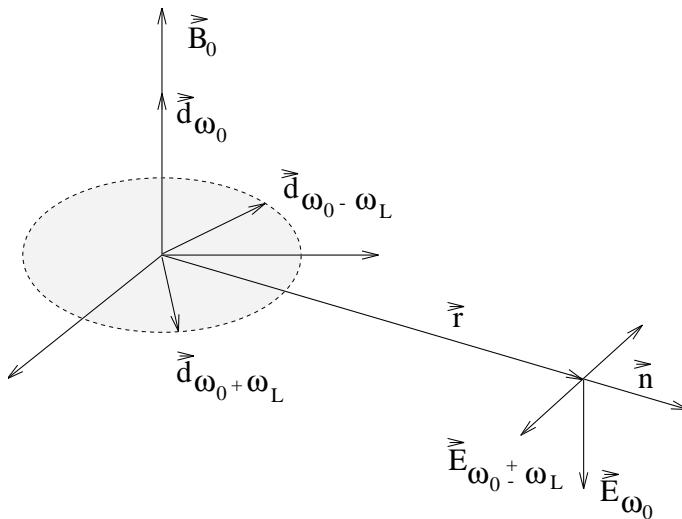


Figura F.7: Polarización de las líneas Zeeman

Contiene pues las componentes armónicas simples

$$\begin{aligned}\vec{d}_{\omega_0} &= -j er_0 \sin \alpha \hat{z} \\ \vec{d}_{\omega_0 \pm \omega_L} &= -\frac{1}{2}er_0 (1 \pm \cos \alpha)(\hat{x} \pm j \hat{y})\end{aligned}$$

La precesión introduce tres frecuencias dipolares eléctricas de radiación, además de la la dipolar magnética a ω_L . La frecuencia ω_0 es radiada por un dipolo oscilante orientado en la dirección \hat{z} y

produce radiación linealmente polarizada, como se muestra en la figura F.7. Las $\omega_0 \pm \omega_L$ proceden de dipolos que giran en el plano $z = 0$ en sentidos contrarios y producen radiación polarizada circularmente, cuando se observa desde el eje z , y linealmente, cuando se observa desde el plano $z = 0$. Así pues, en la dirección del campo magnético se detecta un *Doblete* con polarización circular y frecuencias $\omega_0 \pm \omega_L$ y en la dirección perpendicular se observa un *Triplete* con polarización lineal y a las frecuencias ω_0 y $\omega_0 \pm \omega_L$.

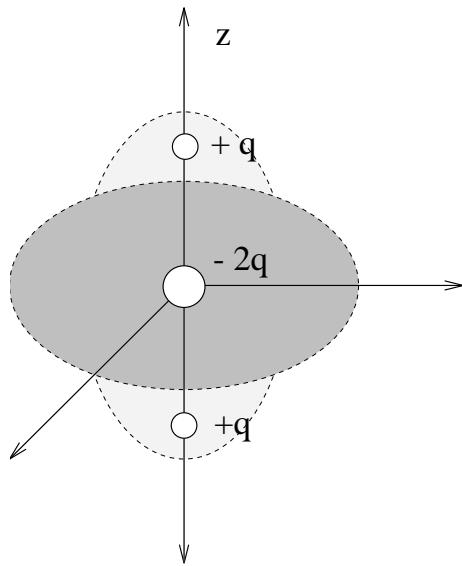


Figura F.8: Oscilación fundamental de un núcleo

F.1.5. Radiación γ

La radiación cuadripolar eléctrica es característica de la emisión γ nuclear. Los núcleos más simples pueden ser representados como esferas uniformemente cargadas, constituidas por un fluido nuclear prácticamente incompresible. La oscilación de orden inferior, que es predominante, presenta simetría con respecto a un eje y a su plano diametral — oscila entre las formas de elipsoide prolato de revolución (alargado) y oblato (achatado) — generando una estructura cuadripolar eléctrica lineal como se muestra en la figura F.8.

F.1.6. Ejemplos de multipolos artificiales

En la figura F.9 se presentan algunos ejemplos de antenas y agrupaciones de antenas cortas que pueden ser tratadas como multipolos. Sus reglas de generación son análogas a las de los multipolos estáticos: para generar un multipolo de un orden superior a uno dado, se desplaza el multipolo original una pequeña distancia y se sitúa en su posición de partida a un multipolo de igual magnitud y signo contrario. En (a) se muestra la antena dipolar magnética ya estudiada, en (b) a un dipolo hertziano cargado — las dos bolas que cargan sus extremos son, en definitiva, condensadores con una

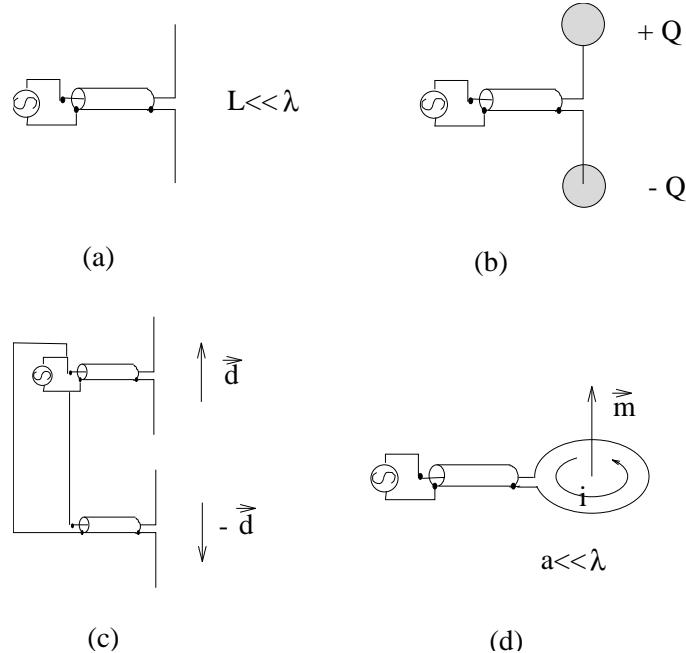


Figura F.9: Ejemplos de antenas multipolares

capacidad muy superior a la del hilo, con lo que la corriente a lo largo del mismo puede suponerse independiente de z —, (c) es una antena cuadripolar eléctrica y (d) una antena dipolar magnética.

F.2. Radiación, absorción y dispersión

F.2.1. Aceleradores de partículas

Es interesante analizar como los resultados obtenidos en la sección 5.3.2.2, para la intensidad (5.127)

$$\mathcal{I}_r(\hat{R}, t) = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{R} \wedge \{(\hat{R} - \vec{\beta}_p) \wedge \dot{\vec{\beta}}_p\}|^2}{(1 - \vec{\beta}_p \cdot \hat{R})^5} \quad (\text{F.3})$$

y la potencia total (5.138) radiadas por una partícula

$$\mathcal{P}_r = \frac{1}{6\pi \epsilon_0} \frac{e^4}{c^3 m^2} \gamma_p^2 \{(\vec{E} + c \vec{\beta}_p \wedge \vec{B})^2 - (\vec{\beta}_p \cdot \vec{E})^2\} = \quad (\text{F.4a})$$

$$= \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0} \frac{e^4}{c^7 m^4} \{(\vec{E} + c \vec{\beta}_p \wedge \vec{B})^2 - (\vec{\beta}_p \cdot \vec{E})^2\} \quad (\text{F.4b})$$

, se aplican en los casos típicos de los aceleradores lineales y circulares.

Aceleradores lineales

En este tipo de aceleradores, el campo magnético es nulo y un campo eléctrico \vec{E} , uniforme y constante, acelera a las partículas cargadas en su misma dirección.

Distribución angular de la radiación :

Situando al eje del acelerador en la dirección z (véase la figura F.10)

$$\vec{E} = E_0 \hat{z} \quad , , \quad \vec{\beta}_p = \beta_p \hat{z} \quad , , \quad \dot{\vec{\beta}}_p = \dot{\beta}_p \hat{z} \quad (\text{F.5})$$

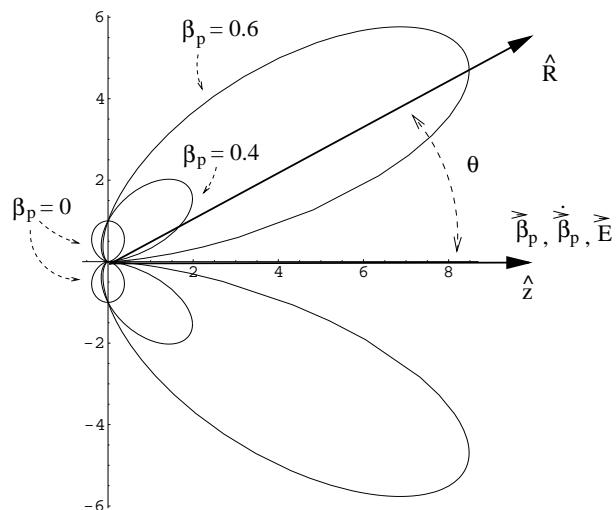


Figura F.10: Diagrama polar de radiación. Movimiento lineal

La dirección de observación \hat{R} forma un ángulo θ con el eje z y

$$\mathcal{I}_r(\hat{R}, t) = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \dot{\beta}_p^2 \sin^2 \theta \frac{1}{(1 - \beta_p \cos \theta)^5} \quad (\text{F.6})$$

La fórmula de Larmor para la intensidad radiada por partículas lentas se ve aquí modulada por el factor direccional σ^{-5} que, en el caso ultrarelativista ($\beta_p = 1 - x$, $x \ll 1$), acentúa fuertemente la radiación en la dirección frontal del movimiento. En el problema 5-23 se muestra como la intensidad de radiación en la dirección de la marcha es estrictamente nula ($\sim \sin \theta$) pero es máxima en direcciones próximas a la anterior, de forma que para $\gamma_p \gg 1$ la mayor parte de la energía se emite dentro de un semicono cuya apertura es del orden de $\Delta\theta = \frac{1}{\gamma_p}$.

Relación entre la potencia radiada y la suministrada por el acelerador :

En los aceleradores lineales, la fracción de la energía suministrada a las partículas que se pierde por radiación electromagnética suele ser despreciable: la potencia radiada F . 4 puede expresarse de la forma

$$\mathcal{P}_{rl} = \frac{1}{6\pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{c^3 m^2} (eE_0)^2 \quad (\text{F.7})$$

donde

$$eE_0 = \frac{d\mathcal{E}_{ac}}{dx}$$

es la fuerza aplicada (el trabajo que el campo acelerador realiza por unidad de longitud) sobre la partícula cargada. La intensidad radiada por ésta es, por lo tanto, independiente de su propia energía y función de la que el acelerador le cede por unidad de longitud.

Una medida inversa de la eficiencia energética en la aceleración de cargas puede darse por medio de la relación entre la potencia radiada y la suministrada por el acelerador

$$\frac{d\mathcal{E}_{ac}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_{ac}}{dx} \frac{dx}{dt} = eE_0 c \beta_p$$

, es decir, por

$$\frac{\mathcal{P}_{rl}}{\frac{d\mathcal{E}_{ac}}{dt}} = \frac{1}{6\pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{c^4 m^2} \frac{1}{\beta_p} \left(\frac{d\mathcal{E}_{ac}}{dx} \right)$$

Esta fracción tiende a infinito cuando $\beta_p \rightarrow 0$, pero, como se expuso en la sección 5.4.2 dicho límite queda excluido en este análisis. En el caso $\beta_p \rightarrow 1$,

$$\lim_{\beta_p \rightarrow 1} \frac{\mathcal{P}_{rl}}{\frac{d\mathcal{E}_{ac}}{dt}} = \frac{1}{6\pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{c^4 m^2} \left(\frac{d\mathcal{E}_{ac}}{dx} \right)$$

Un valor típico de $\frac{d\mathcal{E}_{ac}}{dx}$ puede ser el de $10 \text{ MeV} \cdot \text{m}^{-1}$, por lo que, en el caso más desfavorable, el del electrón, puede comprobarse que, incluso para partículas ultrarelativistas, la fracción de energía perdida por radiación es despreciable.

Aceleradores circulares :

Se ha visto que, en los aceleradores lineales, la energía radiada suele ser una pequeña fracción de la que se emplea en incrementar la energía de las partículas, por lo que, en la práctica, la primera no constituye un factor limitante en el diseño de los mismos. Por el contrario, en los aceleradores circulares es necesario, además, suministrar energía para mantener la de las partículas en un valor determinado. Efectivamente, una carga en movimiento circular uniforme está acelerada, lo que hace necesario compensar la energía que ésta pierde por radiación. El objetivo de los anillos de almacenamiento es, precisamente, el de conservar a las partículas en una órbita cerrada y a un cierto nivel energético. Se verá que este aporte de energía sí es un factor que, en la práctica, limita las cotas de energía alcanzables por este tipo de aceleradores. En lo que sigue se supone que un campo magnético uniforme mantiene a las cargas en una trayectoria aproximadamente circular. El campo, la velocidad y la aceleración forman en cada instante un triángulo rectángulo

$$\vec{\beta}_p \perp \dot{\vec{\beta}}_p \perp \vec{B} \perp \vec{\beta}_p$$

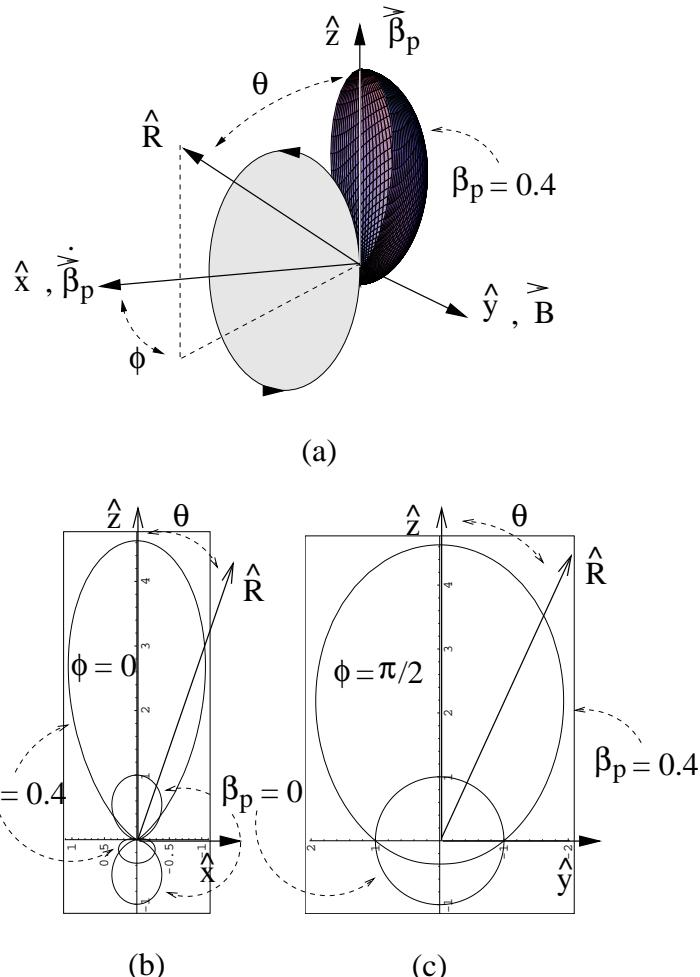


Figura F.11: Diagramas polares de radiación. Movimiento ciclotrónico

Distribución angular de la radiación :

Si se elige un sistema de coordenadas tal que, como se muestra en la figura F.11-a, el eje x coincide con la dirección de la aceleración instantánea, el y con la del campo y el z con el de la velocidad, se tiene que

$$\widehat{x} \uparrow\uparrow \dot{\vec{\beta}}_p \text{ , , } \widehat{y} \uparrow\uparrow \vec{B} \text{ , , } \widehat{z} \uparrow\uparrow \vec{\beta}_p$$

y

$$\hat{R} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

En la figura F.11-b se representa a la sección xz y en la F.11-c a la yz .

Desarrollando el triple producto vectorial que aparece en la expresión F.3, ésta se concreta en²

2 Problema 5-25.

$$\mathcal{I}_r(\hat{R}, t) = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{|\dot{\beta}_p|^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \left(\frac{\sin \theta \cos \phi}{\gamma_p (1 - \beta \cos \theta)} \right)^2 \right] \quad (\text{F.8})$$

lo que, como en el caso de los aceleradores lineales, supone que las cargas radian preferentemente en la dirección frontal, aunque la intensidad no se anula para $\theta = 0$, y que, como puede demostrarse, la mayor parte de la energía se emite dentro de un semicono cuya apertura es del orden de $\Delta\theta = \frac{1}{\gamma_p}$.

Pérdidas por radiación :

Para los aceleradores circulares, la potencia radiada F.4b toma la forma

$$\mathcal{P}_r = \frac{e^4 \vec{B}^2}{6\pi \varepsilon_0 c^5 m^4} \mathcal{E}^2 \beta_p^2 \quad (\text{F.9})$$

y, dadas las definiciones de la frecuencia y del radio ciclotrónicos B.12 y B.16, la energía que la partícula pierde en cada ciclo es

$$\Delta W_c = \mathcal{P}_r \frac{2\pi}{|\Omega_c|} = \frac{e^2}{3\varepsilon_0} \frac{\beta_p^3 \gamma_p^4}{r_c}$$

donde $2\pi/|\Omega_c|$ es el periodo y r_c el radio del movimiento ciclotrónico.

Para partículas ultrarelativistas $\beta_p \simeq 1$ y

$$\Delta W_c = \frac{e^2}{3\varepsilon_0 m^4 c^8} \frac{\mathcal{E}^4}{r_c}$$

lo que puede constituir una fracción apreciable de la propia energía de la partícula: para un electrón de 5 GeV , $\gamma_p \simeq 10^4$. En un acelerador con $r_c = 10 \text{ m}$, $\Delta W_c \simeq 6 \text{ MeV} \cdot \text{ciclo}$ y en otro con $r_c = 10 \text{ Km}$, $\Delta W_c \simeq 6 \text{ KeV} \cdot \text{ciclo}$. Las pérdidas crecen según \mathcal{E}^4 y decrecen como el radio r_c del acelerador, lo que hace muy costosa la aceleración de partículas a muy alta energía. Los grandes aceleradores actuales, y los que están en construcción, tienen radios kilométricos y requieren un esfuerzo económico multinacional.

Apéndice I

Tensores

El electromagnetismo se expone en este texto dentro del marco de la Relatividad Especial y se desarrolla a partir de principios básicos. La utilización de un espacio de Minkowski, con estructura matemática de espacio puntual afín euclídeo, referido a sistemas de coordenadas lineales, requiere el uso de una fracción de la teoría tensorial, la cual se supone que el alumno domina previamente. No obstante, dado que los enfoques y nomenclaturas empleados en los textos de tipo matemático o físico son muy diversos, a continuación se proporciona un resumen de dicha teoría con la extensión suficiente y necesaria y con la nomenclatura y notación que se emplearán en dicha exposición [Lichnerowicz, Lanczos].

I.1. Espacios vectoriales

I.1.1. Definición de espacio vectorial

Definición 7 (Espacio vectorial) *Se define como espacio vectorial al conjunto E , a cuyos elementos llamaremos vectores, en el cual están definidas dos leyes de composición: una de suma vectorial y otra de multiplicación por un número.*

La suma vectorial establece una correspondencia entre cada pareja de vectores $\vec{x}, \vec{y} \in E$ con un tercer vector $\vec{z} \in E$ de acuerdo con las siguientes propiedades:

a) *Propiedad conmutativa*

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

b) *Propiedad asociativa*

$$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$$

c) *E contiene a un vector nulo $\vec{0}$ tal que*

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$$

d) Todo vector $\vec{x} \in E$ tiene un opuesto $-\vec{x} \in E$ tal que

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$$

La multiplicación por un número¹ $\lambda \in \mathcal{R}$ hace corresponder a cada vector $\vec{x} \in E$ otro vector $\vec{z} = \lambda \vec{x} \in E$ de acuerdo con las siguientes propiedades:

e)

$$1\vec{x} = \vec{x}$$

f) Propiedad asociativa con respecto a la multiplicación por un número

$$\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$$

g) Propiedad distributiva con respecto a la suma de números

$$(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$$

h) Propiedad distributiva con respecto a la suma vectorial

$$\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$$

(De forma análoga puede definirse un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos \mathcal{C}).

I.1.2. Base de un espacio vectorial

Definición 8 (Sistema de vectores linealmente independientes) Es un conjunto de vectores $\vec{x}_i, i = 1, \dots, p$, tal que la ecuación

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \dots + \lambda_p\vec{x}_p = \vec{0}$$

solo se cumple si $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

p es el orden del sistema.

Definición 9 (Base de un espacio vectorial) Es cualquier sistema de vectores linealmente independientes $\vec{e}_i, i = 1, \dots, n$, cuyo orden n es máximo en E_n .

Diremos que E tiene **dimensión n** y lo anotaremos por E_n .²

¹Más adelante se definirá el concepto de escalar. Se considerará que λ es un escalar.

²En adelante solo se considerarán espacios de dimensión finita, p. ej.: $n = 4$.

I.1.3. Componentes de un vector

Puesto que n es el orden máximo de cualquier sistema de vectores linealmente independientes en E_n , añadiendo un vector \vec{x} , no nulo, a una combinación lineal de los elementos de una base \vec{e}_i , se obtiene

$$\vec{x} + \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}$$

donde al menos uno de los λ_i es distinto de cero puesto que en caso contrario el orden de la base sería $n+1$.

Despejando \vec{x} en la ecuación anterior

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + \dots + x^n \vec{e}_n$$

donde $x^i, i = 1, \dots, n$ se definen como las **componentes** del vector \vec{x} con respecto a la base \vec{e}_i .

En adelante haremos uso del convenio de Einstein ³ para la suma sobre índices repetidos

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i \equiv x^i \vec{e}_i \quad (\text{I.1})$$

Sean \vec{e}_i y \vec{e}'_j dos bases de E_n y escribamos

$$\vec{e}_i = a_i^j \vec{e}'_j \quad (\text{I.2})$$

donde las a_i^j son las componentes de los vectores de la base \vec{e}_i con respecto a la base \vec{e}'_j .

De igual manera, escribiendo las componentes de \vec{e}'_k con respecto a \vec{e}_i como b_k^i

$$\vec{e}'_k = b_k^i \vec{e}_i \quad (\text{I.3})$$

Con objeto de disponer de una identificación rápida de estas transformaciones, llamaremos "directa." a esta última e "inversa." a la primera, aunque una y otra son equivalentes dado que ambas son mutuamente recíprocas. Efectivamente, sustituyendo I.2 en I.3

$$\vec{e}'_k = b_k^i a_i^j \vec{e}'_j$$

y, puesto que los \vec{e}'_j son linealmente independientes

$$a_i^j b_k^i = \delta_k^j \equiv \begin{cases} 1 & : j = k \\ 0 & : j \neq k \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

³Según este convenio, un monomio en el que aparezcan parejas de índices repetidos representan a una suma sobre todos los posibles valores de dichos índices. En lo que sigue, cada pareja de índices repetidos contendrá a un subíndice y a un superíndice. En una expresión polinomial, los índices que se repiten en un monomio pueden cambiar de nombre con tal de que no tomen ninguno de los del resto de los índices del mismo monomio.

Este resultado se deduce del hecho de que las transformaciones directa e inversa constituyen dos sistemas de ecuaciones mutuamente recíprocas y, por lo tanto, las matrices de sus coeficientes son recíprocas entre sí

$$(b_j^i) = (a_j^i)^{-1}$$

luego sus determinantes son no singulares:

$$b = |b_j^i| = \frac{1}{|a_j^i|} = \frac{1}{a} \neq 0$$

La δ_j^i definida en I.4⁴ es la delta de Kronecker, la cual es simétrica ($\delta_j^i = \delta_i^j$), y cuya matriz

$$(\delta_k^j) = \tilde{I} = \begin{pmatrix} 1, \dots, 0 \\ \vdots, \ddots, \vdots \\ 0, \dots, 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz unitaria, o identidad⁵.

Cualquier vector \vec{x} puede ser expresado con respecto a ambas bases en función de sus componentes

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x^i a_i^j \vec{e}'_j = x'^j \vec{e}'_j$$

donde las x'^j son las componentes de \vec{x} con respecto a la base \vec{e}'_j . La ley de transformación directa para las componentes es, por lo tanto,

$$x'^j = a_i^j x^i \tag{I.5}$$

De la misma forma obtenemos la ley de transformación inversa para las coordenadas

$$x^i = b_j^i x'^j \tag{I.6}$$

Las x^i reciben el nombre de componentes contravariantes del vector puesto que sus leyes de transformación son las contrarias de las de los vectores de la base.

⁴El primer miembro es la suma de los n términos que resultan de darle al índice i todos los valores posibles. Dadas las propiedades de la suma, es posible alterar el orden del producto y cambiar el nombre a i: $b_k^l a_l^j = \delta_k^j$. También puede cambiarse el nombre de los índices no repetidos del monomio pero, en este caso, ha de cambiarse también en los demás monomios de la expresión: $a_i^m b_n^i = \delta_n^m$.

⁵Se recurrirá ocasionalmente a la notación matricial pero en general es preferible el uso directo de las expresiones indexadas.

I.1.4. Espacio vectorial Euclídeo

Definición 10 (Espacio vectorial Euclídeo) *Es un espacio vectorial en el cual se define una tercera ley de composición que llamaremos producto escalar y que a cada pareja de vectores \vec{x}, \vec{y} le hace corresponder un número real $\vec{x} \cdot \vec{y}$ con las siguientes propiedades:*

a) *Propiedad conmutativa*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$$

b) *Propiedad asociativa para la multiplicación por un número*

$$(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}) = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y})$$

c) *Propiedad distributiva con respecto a la suma vectorial*

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$$

d)

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \forall \vec{x} \quad \text{si y solo si} \quad \vec{y} = \vec{0}$$

Se dice que un espacio vectorial P_n es propiamente euclídeo⁶ cuando la norma de un vector

$$\|\vec{x}\| \equiv (\vec{x})^2 \equiv \vec{x} \cdot \vec{x} \quad (I.7)$$

es definida positiva ($\|\vec{x}\| > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$). En Relatividad no se utilizan espacios propiamente euclídeos.

I.1.5. Funciones métricas covariantes

Los productos escalares de los vectores de una base reciben el nombre de funciones métricas covariantes

$$g_{ij} \equiv \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ji} \quad (I.8)$$

Al cambiar de coordenadas mediante I.2

$$g_{kl} = \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = (a_k^i \vec{e}_i) \cdot (a_l^j \vec{e}_j)$$

con lo que las leyes de transformación inversa y directa son:

$$g_{kl} = a_k^i a_l^j g'_{ij} \quad , , \quad g'_{kl} = b_k^i b_l^j g_{ij} \quad (I.9)$$

Estas funciones métricas se dice que son covariantes porque las leyes de transformación de cada uno de sus índices son las mismas que las de los vectores de la base.

⁶En este caso, como en otros, la nomenclatura no es uniforme en todos los textos; aquí se sigue la de [Lichnerowicz].

El producto escalar entre dos vectores se expresa en función de las mismas como

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = g_{ij} x^i y^j \quad (\text{I.10})$$

donde se pone de manifiesto que el producto escalar de dos vectores es una forma bilineal y simétrica ($g_{ij} = g_{ji}$) con respecto a las componentes de ambos vectores. Es fácil de demostrar que, además, es no degenerada. Efectivamente, de acuerdo con la propiedad d) del producto escalar, $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \forall \vec{x} \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{0}$. En particular esto es cierto para $x^i = \delta_\alpha^i, \alpha = 1, 2, \dots, n$, con lo que

$$g_{ij} y^j = 0$$

y, puesto que este sistema de ecuaciones solo admite la solución $y^j = 0$, el determinante de sus coeficientes debe ser distinto de cero

$$g_{\text{cov}} \equiv |g_{ij}| \neq 0$$

I.1.6. Ortogonalidad

Se dice que dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ son ortogonales si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$. El proceso de ortogonalización de Smith asegura que en cualquier espacio euclídeo pueden encontrarse infinitas bases ortogonales definidas por las relaciones

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

En los espacios propiamente euclídeos es posible hallar bases ortonormales, tales que

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \delta_j^i$$

I.1.7. Base adjunta; funciones métricas contravariantes

Se pueden definir componentes covariantes y contravariantes de un vector en un espacio no euclídeo; para ello no es necesario recurrir al concepto de producto escalar. Sin embargo, dado que los espacios que se utilizarán son euclídeos, abordaremos este tema de forma específica para este tipo de espacios [Lanczos].

Definición 11 (Base adjunta) *Se dice que $\vec{e}^j \in E_n$ es una base adjunta a la base $\vec{e}_i \in E_n$, si*

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j \quad (\text{I.11})$$

Puesto que los vectores \vec{e}_i constituyen una base, los \vec{e}^j pueden expresarse como combinación lineal de los anteriores

$$\vec{e}^j = g^{ji} \vec{e}_i \quad (\text{I.12})$$

donde g^{ji} son las funciones métricas contravariantes (componentes de los vectores de la base adjunta con respecto a la base original). La matriz (g^{ij}) es la recíproca de la (g_{ij}) como puede comprobarse multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por \vec{e}_k

$$\vec{e}_k \cdot \vec{e}^j = g^{ji} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k$$

y haciendo uso de la definición de g_{ik}

$$g^{ji} g_{ik} = \delta_k^j \quad (\text{I.13})$$

de donde se deduce que

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} \quad \Rightarrow \quad g_{con} = |g^{ij}| = \frac{1}{g_{cov}}$$

y

$$g^{ij} = \frac{\Delta^{ji}}{g_{cov}}$$

donde Δ^{ji} es el cofactor o adjunto del elemento g_{ji} . Dada la simetría de las funciones métricas covariantes, las contravariantes también lo son.

Multiplicando I.12 por \vec{e}^k se obtiene una definición para las funciones métricas contravariantes análoga a la dada para las covariantes en la expresión I.8

$$g^{kj} \equiv \vec{e}^k \cdot \vec{e}^j \quad (\text{I.14})$$

Por otra parte, I.12 puede invertirse dando lugar a

$$\vec{e}_i = g_{ij} \vec{e}^j \quad (\text{I.15})$$

Las g_{ij} son, en consecuencia, las componentes de los vectores de la base \vec{e}_i con respecto a la base adjunta.

Como puede comprobarse haciendo uso de I.12, I.15 y I.13, la base adjunta de la base adjunta de una base dada es esta última, con lo que la propiedad de adjunción es mútua y la colocación de los índices en posición superior o inferior es cuestión de convenio.

Es fácil de comprobar que las funciones métricas contravariantes transforman sus índices como las componentes contravariantes de un vector.

$$g^{ij} = b_k^i b_l^j g'^{kl} \quad , , \quad g'^{ij} = a_k^i a_l^j g^{kl} \quad (\text{I.16})$$

y que los vectores de la base adjunta se transforman también de forma contravariante

$$\vec{e}^i = b_j^i \vec{e}'^j \quad , , \quad \vec{e}'^j = a_i^j \vec{e}^i \quad (\text{I.17})$$

I.1.8. Componentes covariantes de un vector

Como se ha visto, cualquier vector puede ser expresado con respecto a una base \vec{e}_i en función de sus componentes contravariantes x^i . Puesto que la base dual también es base de E_n , ese mismo vector puede representarse con respecto a esta última en función de unas componentes covariantes x_i de la forma

$$\vec{x} = x_i \vec{e}^i \quad (\text{I.18})$$

cuyas leyes de transformación son las mismas de \vec{e}_i

$$x'_j = b_j^i x_i \quad , , \quad x_i = a_i^j x'_j \quad (\text{I.19})$$

Sustituyendo I.12 en I.18 se comprueba que las funciones métricas también relacionan a las componentes covariantes y contravariantes de un vector

$$x_j = g_{ji} x^i \quad , , \quad x^i = g^{ij} x_j \quad (\text{I.20})$$

También es útil expresar las componentes co y contravariantes de un vector como proyecciones sobre las bases adjuntas

$$x_j = \vec{x} \cdot \vec{e}_j \quad , , \quad x^i = \vec{x} \cdot \vec{e}^i \quad (\text{I.21})$$

I.1.9. Invariantes

El producto escalar puede escribirse de las siguientes maneras:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = g_{ij} x^i y^j = g^{ij} x_i y_j = x_i y^i = x^j y_j \quad (\text{I.22})$$

Como puede comprobarse transformando cualquiera de estas expresiones, el producto escalar es una cantidad invariante frente a los cambios de base. En general, cualquier magnitud ϕ cuya ley de transformación de coordenadas sea

$$\phi' = \phi$$

recibirá el nombre de escalar. En particular, la norma $\|\vec{x}\|$ de un vector es un escalar.

Conviene distinguir entre un escalar, o tensor de orden 0, y una componente de un tensor que es invariante con respecto al cambio de base (en la relación de problemas se propone demostrar que el conjunto de los δ_j^i puede ser considerado como el de las componentes mixtas de un tensor y que éstas son invariantes).

I.2. Espacios tensoriales

I.2.1. Definiciones

Definición 12 (Producto tensorial) *El producto tensorial es una ley de composición que a cada pareja de vectores $\vec{x} \in E_n$ e $\vec{y} \in F_p$ les hace corresponder un tercer vector, que anotaremos como $\vec{x} \otimes \vec{y}$, perteneciente a un espacio $E_n \otimes F_p$ de dimensión np ⁷, según las siguientes reglas:*

a) Propiedad distributiva del producto tensorial

Para cualesquiera $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E_n$, $\vec{y}, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in F_p$ y $\vec{z} \in G_q$

$$\begin{aligned}\vec{x} \otimes (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) &= \vec{x} \otimes \vec{y}_1 + \vec{x} \otimes \vec{y}_2 \\ (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \otimes \vec{y} &= \vec{x}_1 \otimes \vec{y} + \vec{x}_2 \otimes \vec{y}\end{aligned}$$

b) Propiedad asociativa del producto por un escalar

Dado un $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario

$$\lambda \vec{x} \otimes \vec{y} = \vec{x} \otimes \lambda \vec{y} = \lambda (\vec{x} \otimes \vec{y})$$

c) Base del espacio producto

Si \vec{e}_i y \vec{f}_j son dos bases cualesquiera de E_n y F_p , los np elementos $\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j$ forman una base de $E_n \otimes F_p$.

d) Propiedad distributiva del producto múltiple

$$(\vec{x} \otimes \vec{y}) \otimes \vec{z} = \vec{x} \otimes (\vec{y} \otimes \vec{z}) = \vec{x} \otimes \vec{y} \otimes \vec{z}$$

El símbolo \otimes denominará, por lo tanto, al producto tensorial entre vectores o espacios vectoriales.

En adelante se denominará por $\vec{\pi}_{ij} = \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j$ a los elementos de una base del espacio producto $\Pi_{np} = E_n \otimes F_p$, con lo que el producto tensorial de dos vectores $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ e $\vec{y} = y^j \vec{f}_j$ se expresa como

$$\vec{x} \otimes \vec{y} = x^i y^j \vec{\pi}_{ij}$$

Lo mismo puede hacerse en función de las componentes covariantes o mixtas, aunque, de acuerdo con las limitaciones impuestas en este resumen, se pondrá el uso de estas componentes al momento en que se concrete el uso de espacios euclídeos.

⁷ $\vec{x} \otimes \vec{y}$ es el producto tensorial de los dos vectores y $E_n \otimes F_p$ el producto tensorial de los dos espacios vectoriales.

Se utilizará, para los elementos del espacio producto, la notación

$$\tilde{T} = T^{ij} \vec{\pi}_{ij} = T'^{kl} \vec{\pi}'_{kl}$$

donde

$$T^{ij} = x^i y^j \quad , , \quad T'^{kl} = x'^k y'^l$$

son sus componentes.

Definición 13 (Tensor) *Un tensor asociado a los espacios $E_n, F_p, G_q \dots$ es cualquier elemento \tilde{T} de $E_n \otimes F_p \otimes G_q \dots$ dotado de una estructura de producto tensorial.*

Definición 14 (Tensor afín euclídeo) *Se define como tensor afín euclídeo, de orden p y dimensión n , a cualquier elemento \tilde{T} del espacio*

$$E_n^{(p)} = \underbrace{E_n \otimes E_n \cdots \otimes E_n}_{p \text{ veces}}$$

potencia p -esima de un espacio euclídeo E_n .

Nota importante: En lo que sigue se sobreentenderá que los tensores utilizados son afines y euclídeos y que los espacios E_n estarán referidos a la base \vec{e}_i o su adjunta \vec{e}^j .

I.2.2. Componentes de un tensor euclídeo

Un tensor \tilde{T} de segundo orden ($p=2$)⁸ referido a una base, resultante del producto tensorial de la base \vec{e}_i , con sí misma o con su adjunta \vec{e}^j , puede ser expresado en función de componentes doblemente contravariantes T^{ij} , covariantes T_{ij} o mixtas T^i_j y T_i^j :

$$\tilde{T} = T^{ij} \vec{\pi}_{ij} \quad , , \quad \vec{\pi}_{ij} = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (\text{I.23})$$

$$\tilde{T} = T_{ij} \vec{\pi}^{ij} \quad , , \quad \vec{\pi}^{ij} = \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \quad (\text{I.24})$$

$$\tilde{T} = T^i_j \vec{\pi}_i^j \quad , , \quad \vec{\pi}_i^j = \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j \quad (\text{I.25})$$

$$\tilde{T} = T_i^j \vec{\pi}^i_j \quad , , \quad \vec{\pi}^i_j = \vec{e}^i \otimes \vec{e}_j \quad (\text{I.26})$$

En general, las componentes de un tensor no tienen por que ser el producto de componentes vectoriales sino elementos cuyas reglas de transformación en un cambio de coordenadas corresponden en cada índice a las de un vector del mismo tipo (contra o covariante). En consecuencia, para determinar si un conjunto de elementos indexados tienen el carácter de componentes de un tensor, es útil considerar la siguiente definición como regla de contraste tensorial:

⁸La generalización a ordenes superiores es inmediata.

Definición 15 (Componentes de un tensor) *El conjunto de n^p elementos $T^{i_1 \dots i_r \dots i_s}$, donde $p = r + s$, son las componentes r veces contravariantes y s veces covariantes de un tensor de orden p y dimensión n , si al cambiar de base se transforma como el conjunto de las componentes contravariantes de un vector de dimensión n , con respecto a cada uno de los índices superiores y como las componentes covariantes del mismo con respecto a los inferiores.*

$$T'^{i'_1 \dots i'_r \dots i'_s} = a_{i_1}^{i'_1} \dots b_{j'_1}^{j_1} \dots a_{i_r}^{i'_r} \dots b_{j'_s}^{j_s} T^{i_1 \dots i_r \dots i_s}$$

De las expresiones I.12 y I.15 se deduce que las funciones métricas relacionan a los distintos tipos de componentes actuando como operadores de subida y bajada de índices, de la misma forma que en la expresión I.20 para las componentes de un vector. Así, por ejemplo,

$$T_k^j = g_{ki} T^{ij} \quad , \quad T^{ij} = g^{ik} g^{jl} T_{kl} \quad (\text{I.27})$$

Según puede comprobarse por la expresión I.9, las funciones métricas constituyen las componentes de un tensor \tilde{g} de orden $p=2$, el cual recibe el nombre de Tensor Métrico o Fundamental.

Sustituyendo I.2 en I.23 se obtiene la ley de transformación para las componentes doblemente contravariantes de \tilde{T}

$$\tilde{T} = T^{ij} a_i^k a_j^l \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l = T'^{kl} \vec{\pi}'_{kl} \quad (\text{I.28})$$

y de forma análoga para las demás componentes:

$$T'^{kl} = a_i^k a_j^l T^{ij} \quad , \quad T^{ij} = b_k^i b_l^j T'^{kl} \quad (\text{I.29})$$

$$T'_{kl} = b_k^i b_l^j T_{ij} \quad , \quad T_{ij} = a_i^k a_j^l T'_{kl} \quad (\text{I.30})$$

$$T'_k{}^l = b_k^i a_j^l T_i{}^j \quad , \quad T_i{}^j = a_i^k b_l^j T'_k{}^l \quad (\text{I.31})$$

$$T'^k{}_l = a_i^k b_l^j T^i{}_j \quad , \quad T^i{}_j = b_k^i a_j^l T'^k{}_l \quad (\text{I.32})$$

Definición 16 (Escalar) *Se define como escalar, o tensor de orden $p=0$, a toda magnitud invariante frente a los cambios de base.*

$$\phi' = \phi$$

I.2.3. Algebra tensorial

Pueden definirse operaciones algebraicas sobre uno o más tensores cuyo resultado es otro tensor:

Definición 17 (Suma tensorial) *Dados dos tensores \tilde{P} y \tilde{Q} , de una misma dimensión n y un mismo orden p , se define como tensor suma a aquel \tilde{T} cuyas componentes son la suma de las de los sumandos.*

Por ejemplo

$$T^{ij} = P^{ij} + Q^{ij} \quad (\text{I.33})$$

Definición 18 (Producto tensorial) *Dados dos tensores $\tilde{P}^{(p)}$ y $\tilde{Q}^{(q)}$, de una misma dimensión n y de ordenes p y q , se define como tensor producto a aquel*

$$\tilde{T}^{(pq)} = \tilde{P}^{(p)} \otimes \tilde{Q}^{(q)}$$

*de orden pq resultante del producto tensorial de los dos primeros*⁹.

Por ejemplo

$$T^{ij}_{kl} = P^{ij}Q_{kl} \quad (\text{I.34})$$

Definición 19 (Contracción tensorial) *Dado un tensor $\tilde{P}^{(p)}$ de orden p , se define como tensor contraído del anterior a aquel $\tilde{T}^{(p-2)}$, de orden $p-2$, cuyas componentes resultan de igualar un índice contravariante y otro covariante de las componentes de $\tilde{P}^{(p)}$ y sumar sobre los mismos.*

Por ejemplo

$$P^{ij}Q_{jl} = T^{ij}_{jl} = R^i_l$$

La expresión anterior muestra también como el producto tensorial puede combinarse con la contracción para dar lugar al Producto tensorial contraído.

El producto escalar de dos vectores es el producto tensorial contraído de los mismos. También es un escalar el resultado de contraer los índices de un tensor de segundo orden o el de contraer todas las parejas de índices de un tensor de orden par.

En todos estos casos es fácil demostrar que, efectivamente, el resultado de estas operaciones con tensores es un tensor.

I.2.4. Regla algebraica de contraste tensorial

Dadas n^p cantidades indexadas es importante disponer de criterios que permitan discernir si éstas constituyen las componentes covariantes, contravariantes o mixtas de un tensor. Además del contraste tensorial básico, proporcionado por la definición 15, también es útil el uso de la siguiente regla que, por sencillez, se ilustrará mediante ejemplos concretos:

⁹Véase que esta definición se deduce de la 12.

Las cantidades indexadas $T(ij)$ son las componentes doblemente covariantes de un tensor de orden 2, si las cantidades $T(ij)x^j$, donde \vec{x} es arbitrario, son las componentes covariantes de un vector.

Cambiando de base, dado que el índice i es covariante, según I.19

$$T'(kl)x'^l = b_k^i\{T(ij)x^j\}$$

y, transformando x^j de acuerdo con I.6

$$\{T'(kl) - b_k^i b_l^j T(ij)\}x'^l = 0$$

Dado que x'^l es arbitrario,

$$T'(kl) = b_k^i b_l^j T(ij)$$

La regla anterior es fácilmente generalizable. Por ejemplo, $T(ij)$ serán las componentes doblemente contravariantes de un tensor si $T(ij)x_i y_j$ o $T(ij)P_{ij}$, donde \vec{x}, \vec{y} y \vec{P} son arbitrarios, es un escalar. Es interesante comprobar que si $T(ij)x_i x_j$ es un escalar, $T(ij)$ serán las componentes doblemente contravariantes de un tensor si $T(ij) = T(ji)$

I.3. Espacios puntuales

I.3.1. Definiciones

Definición 20 (Espacio puntual afín) *Es un conjunto \mathcal{E}_n , a cuyos elementos se denominará puntos, en el cual está definida una correspondencia entre cada pareja ordenada de elementos (A, B) y un vector $\vec{AB} \in E_n$ de acuerdo con las siguientes propiedades:*

a) *Propiedad reciproca*

$$\vec{AB} = -\vec{BA}$$

b) *Propiedad triangular*

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

c) *Unicidad*

Dado un punto $O \in \mathcal{E}_n$ arbitrario, a cada vector $\vec{a} \in E_n$ le corresponde un punto A y solo uno, tal que $\vec{OA} = \vec{a}$

Se dirá que E_n es el espacio vectorial asociado a \mathcal{E}_n .

Definición 21 (Espacio puntual euclídeo) *Es un espacio puntual afín cuyo espacio vectorial asociado es euclídeo.*

Definición 22 (Sistema de referencia de un espacio afín) *Se denomina Sistema de referencia de un espacio afín al conjunto de un punto arbitrario $O \in \mathcal{E}_n$, que se llamará origen de coordenadas, y una base $\vec{e}_i \in E_n$. Se anotará por $S = (O, \vec{e}_i)$.*

Definición 23 (Coordenadas rectilíneas de un punto) *Se definen como coordenadas rectilíneas de un punto $X \in \mathcal{E}_n$, con respecto al sistema S , a las componentes de $\vec{x} = O\vec{X} \in E_n$ (podrán ser, en consecuencia, de tipo covariante o contravariante).*

Definición 24 (Campo tensorial) *Es un tensor $\tilde{C} \in E_n^{(p)}$, de orden p y dimensión n , que es función de las coordenadas de los puntos $X \in \mathcal{E}_n$.*

$$\tilde{C} = \tilde{C}(X)$$

Los espacios puntuales que se considerarán en adelante son euclídeos. En éstos puede hablarse de distancia o, preferiblemente, de intervalo entre dos puntos X e Y, definido como

$$s_{XY} = \sqrt{\|\vec{X}\vec{Y}\|}$$

admitiendo que éste puede tomar valores imaginarios dado que la norma puede ser negativa.

Las componentes del vector $\vec{X}\vec{Y}$ vienen dadas por la diferencia entre las coordenadas de los puntos X e Y y son invariantes frente al cambio (traslación) del origen del sistema coordenado.

Sea $\underline{S} = (\underline{O}, \vec{e}_i)$ el sistema resultante de trasladar el origen de $S = (O, \vec{e}_i)$ desde el punto O al \underline{O} .

Con respecto a S

$$\vec{x} = O\vec{X} \quad , \quad \vec{y} = O\vec{Y}$$

y con respecto a S

$$\vec{x} = \underline{O}\vec{X} = \underline{O}\vec{O} + O\vec{X} = \underline{O}\vec{O} + \vec{x} \quad , \quad \vec{y} = \underline{O}\vec{Y} = \underline{O}\vec{O} + \vec{y}$$

con lo que

$$\begin{aligned} \vec{X}\vec{Y} &= \vec{X}\vec{O} + \vec{O}\vec{Y} = \vec{O}\vec{Y} - \vec{O}\vec{X} = (y^i - x^i) \vec{e}_i = \\ &\underline{O}\vec{Y} - \underline{O}\vec{X} = (y^i - \underline{x}^i) \vec{e}_i \end{aligned}$$

La norma de \vec{XY} puede escribirse de la forma

$$\vec{XY}^2 = g_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j) = g^{ij}(y_i - x_i)(y_j - x_j) = (y^i - x^i)(y_i - x_i) \quad (\text{I.35})$$

Los sistemas de referencia que se emplearán en la asignatura son rectilíneos¹⁰ y, según la definición anterior, todos los puntos del espacio puntual están referidos al mismo origen y a los mismos vectores de base. De esto se deduce que los vectores de la base \vec{e}_i , los coeficientes de la transformación de coordenadas a_j^i y las funciones métricas g^{ij} son constantes, independientes de las coordenadas del punto. En Relatividad General se utilizan coordenadas curvilíneas con lo que, por ejemplo, las g^{ij} son funciones de las coordenadas del punto y dependen de la distribución de masa en el Universo.

I.3.2. Transformaciones de coordenadas

Sean $S = (O, \vec{e}_i)$ y $S' = (O', \vec{e}'_i)$ dos sistemas de referencia. Las coordenadas contravariantes de un punto X con respecto a S son las componentes x^i de \vec{x} y con respecto a S' las x'^i de \vec{x}' .

$$\vec{x}' = O'\vec{X} = x'^j \vec{e}'_j = O'\vec{O} + \vec{x} = o'^j \vec{e}'_j + x^i \vec{e}_i = (o'^j + a_i^j x^i) \vec{e}'_j$$

donde o'^j son las componentes del vector $O'\vec{O}$ con respecto a S' y se ha hecho uso de I.2. Las transformaciones de coordenadas entre S y S' son pues

$$x'^j = o'^j + a_i^j x^i \quad , , \quad x^i = o^i + b_j^i x'^j \quad (\text{I.36})$$

$$x'_j = o'_j + b_j^i x_i \quad , , \quad x_i = o_i + a_i^j x'_j \quad (\text{I.37})$$

I.3.3. Análisis tensorial en coordenadas rectilíneas

I.3.3.1. Derivación de escalares y vectores

Dada una función escalar y diferenciable $\phi(\alpha)$, donde α es una variable continua, también son escalares su incremento

$$\Delta\phi \equiv \phi(\alpha) - \phi(\alpha + \Delta\alpha)$$

y su diferencial

$$d\phi = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \{\phi(\alpha) - \phi(\alpha + \Delta\alpha)\}$$

¹⁰Véanse las referencias generales para las definiciones de coordenadas curvilíneas, sistema de referencia natural, etc..

Dos escalares importantes son, el cuadrado del intervalo

$$\vec{XY}^2 = g_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j) = g^{ij}(y_i - x_i)(y_j - x_j) = (y^i - x^i)(y_i - x_i) \quad (\text{I.38})$$

y el cuadrado del intervalo entre dos puntos próximos de coordenadas x^i y $x^i + dx^i$

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = dx^i dx_i \quad (\text{I.39})$$

La derivada

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\phi(\alpha) - \phi(\alpha + \Delta\alpha)}{\Delta\alpha}$$

solo será escalar si α lo es.

De forma análoga, puede afirmarse que si \vec{u} es un vector, $\Delta\vec{u}$ y $d\vec{u}$ son vectores, mientras que $\frac{d\vec{u}(\alpha)}{d\alpha}$ solo es vector si α es escalar.

Para un campo escalar $\phi(X)$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i = (\vec{\text{grad}} \phi)_i dx^i = \vec{\text{grad}} \phi \cdot d\vec{x} \quad (\text{I.40})$$

Dado que $d\phi$ es un escalar y dx^i son las componentes contravariantes de un vector, $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ son las componentes covariantes de un vector, de acuerdo con la regla de contraste tensorial.

Definición 25 (Gradiente) Se define como gradiente de un escalar a un vector $\vec{\text{grad}} \phi$ cuyas componentes covariantes (contravariantes) son las derivadas parciales del escalar con respecto a las coordenadas contravariantes (covariantes). Se define al operador gradiente como

$$\vec{\text{grad}} \rightarrow \begin{cases} \vec{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{cases}$$

Puede confirmarse el carácter vectorial del gradiente teniendo en cuenta las reglas de derivación de función de función

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

y haciendo uso de I.36

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = b_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x'_i} = a_j^i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{I.41})$$

se obtienen las leyes de transformación de las componentes covariantes y contravariantes del operador gradiente.

Las componentes del gradiente pueden emplearse en operaciones tensoriales (operaciones cuyo resultado es un tensor) sobre tensores. En el curso se hará uso del las siguientes operaciones definidas sobre campos escalares $\phi(X)$, vectoriales $\vec{u}(X)$ y tensoriales $\tilde{T}(X)$ ¹¹:

- Operadores Laplaciano y D'Alambertiano: Se define el Laplaciano como el producto contraído de las componentes covariantes y contravariantes del gradiente (producto escalar de operador consigo mismo) en el espacio cartesiano tridimensional

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_i} , \quad x^i = x, y, z \quad (\text{I.42})$$

En el espacio de Minkowski utilizado en este texto, se define el D'Alambertiano como

$$\square = -\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_i} , \quad x^i = x^0, x^1, x^2, x^3 \quad (\text{I.43})$$

Es claramente invariante. Su aplicación sobre un escalar (vector) da como resultado a otro escalar (vector).

- Divergencia de un vector: Producto escalar del operador gradiente con el vector

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \quad (\text{I.44})$$

- Divergencia de un tensor de segundo orden:

$$(\operatorname{div} \tilde{T})^j = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} \quad (\text{I.45})$$

- Rotacional de un vector:

$$(rot \vec{u})_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \quad (\text{I.46})$$

Es fácil comprobar que las operaciones definidas anteriormente tienen carácter tensorial

I.3.4. Expresión de las leyes en forma manifiestamente invariante

Una ley física expresada tensorialmente como

$$\tilde{T} = \tilde{0} \quad (\text{I.47})$$

¹¹Las definiciones que siguen pueden aparecer de forma distinta en otros textos. Aquí se expresan para un cierto tipo de componentes y coordenadas pero, sin más que rotar índices, pueden obtenerse expresiones equivalentes.

, donde \tilde{T} es el tensor nulo, está expresada en forma invariante frente a los cambios de base vectorial.

Con respecto a un sistema de referencia determinado, para cada componente, se tiene que

$$T^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s} = 0$$

y, multiplicando por $a^{i'_1}_{i_1} \dots b^{j'_1}_{j_1} \dots a^{i'_r}_{i_r} \dots b^{j'_s}_{j_s}$, se obtiene

$$T'^{i'_1 \dots i'_r}{}_{j'_1 \dots j'_s} = 0$$

Si, además, \tilde{T} es invariante frente a los cambios de origen, dicha ley tendrá la misma expresión con respecto a todos los sistemas de coordenadas y se dirá que está expresada de forma manifiestamente invariante. Por esta razón, la expresión de las leyes en forma tensorial es de gran utilidad para el desarrollo de la teoría de la relatividad .

I.4. Problemas

Nota: Los espacios utilizados en los problemas son de dimensión $n = 4$, $i = 0 \dots 3$.

I-1. Sea \vec{e}_i una base del espacio vectorial E_n y \vec{e}'_j un conjunto de vectores cuyas componentes con respecto a la base anterior son:

$$\begin{aligned} e'_0^i &= (-1, 0, 0, 0) \\ e'_1^i &= (0, 1, 2, 0) \\ e'_2^i &= (0, 0, 1, 0) \\ e'_3^i &= (1, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

a) ¿ Pueden los \vec{e}'_j tomarse como nueva base ?

En caso afirmativo :

b) Expressar los vectores de la primera base en función de la segunda.

c) Hallar los coeficientes de las transformaciones directa e inversa así como los determinantes de las mismas.

d) Comprobar la reciprocidad de las transformaciones directa e inversa.

SOLUCION :

El conjunto de nuevos vectores puede expresarse de la forma dada en I.1

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}'_0 &= -\vec{e}_0 \\ \vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 &= \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 &= \vec{e}_0 + \vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \vec{x} = x^i \vec{e}_i$$

(a) - Para que este conjunto pueda constituir una nueva base, según I.3, $\vec{e}'_k = b_k^i \vec{e}_i$ siendo $|b_k^i| \neq 0$. Efectivamente, en forma matricial

$$(b_k^i) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |b_k^i| = -1$$

donde el índice superior denota a las filas y el inferior a las columnas.

(b) - Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene la transformación inversa

$$\begin{aligned} \vec{e}_0 &= -\vec{e}'_0 \\ \vec{e}_1 &= \vec{e}'_1 - 2\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}'_2 \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}'_0 + \vec{e}'_3 \end{aligned}$$

(c) - Los coeficientes de la misma son

$$(a_i^j) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |a_i^j| = \frac{1}{|b_k^i|} = -1$$

(d) - Multiplicando las dos matrices se comprueba su reciprocidad

$$b_k^i a_i^j = \delta_k^j \Rightarrow (b_k^i) \cdot (a_i^j) = (\delta_k^j)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I-2. Supóngase que E_4 y M_4 son espacios vectoriales euclídeos dotados de unas métricas que, con respecto a las bases \vec{e}_i y \vec{m}_i , vienen definidas por

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_e &= (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \\ \|\vec{x}\|_m &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \end{aligned}$$

donde $x^i \in \mathbb{R}$.

- a) ¿Qué tipo de espacios euclídeos son?
- b) Hallar las funciones métricas covariantes y contravariantes así como sus determinantes.
- c) Hallar las bases adjuntas.

- d) Dado un vector de componentes $x^i = (4, 3, 2, 1)$ en E_n y M_n , hallar las componentes covariantes y la norma en ambos espacios.

SOLUCION :

(a) - \mathcal{E}_4 es propiamente euclídeo y \mathcal{M}_4 euclídeo, según la nomenclatura seguida en el apéndice.

(b) -

$$\|\vec{x}\| = g_{ij} x^i x^j$$

Se hará solo la parte correspondiente a \mathcal{M}_4 .

La matriz de las componentes doblemente covariantes del tensor métrico se obtiene identificando a los coeficientes del polinomimio que define a la norma. El primer índice representa a las filas y el segundo a las columnas

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Las componentes doblemente contravariantes son , según I.13

$$g^{ji} g_{ik} = \delta_k^j \Rightarrow g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}} = g_{ii} \quad , \quad ii = 00, \dots, 33$$

.

De otra forma

$$(g^{ij}) = (g_{ij})$$

(c) - Segundo la definición de la base adjunta

$$\vec{e}^j \cdot \vec{e}_i = \delta_i^j \quad , \quad \vec{e}^j = g^{ji} \vec{e}_i \Rightarrow$$

$$\vec{e}^0 = \vec{e}_0 \quad , \quad \vec{e}^\alpha = -\vec{e}_\alpha \quad , \quad \alpha = 1, 2, 3$$

(d) - Bajando el índice de x^i

$$x_i = g_{ij} x^j = (4, -3, -2, -1)$$

I-3. Clasificar las bases $\{\vec{e}_i\}$ y $\{\vec{m}_i\}$ del problema anterior según los criterios de ortogonalidad y ortonormalidad y encontrar el tipo de transformaciones de base que dejan invariantes a las componentes de los tensores métricos del problema anterior.

SOLUCION :

Por definición, $g_{ij} \equiv \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$.

Como $\|\vec{e}_i\| = 1$, esta base es ortonormal. Por otra parte, $\|\vec{e}_0\| = 1$, $\|\vec{e}_\alpha\| = -1$, para $\alpha = 0, 1, 2, 3$, por lo que esta otra es simplemente ortogonal.

Dada la definición de las componentes g_{ij} , éstas serán invariantes en transformaciones a nuevas bases que tengan las mismas propiedades de ortogonalidad que la base de partida. En el primer caso las nuevas bases han de ser ortonormales y en el segundo ha de cumplirse que $\|\vec{e}'_0\| = 1$, $\|\vec{e}'_\alpha\| = -1$.

I-4. Demostrar que, para transformaciones entre bases ortogonales,

$$a_i^j = \frac{\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_i}{\|\vec{e}'_j\|}, \quad b_i^j = \frac{\vec{e}_j \cdot \vec{e}'_i}{\|\vec{e}_j\|}$$

SOLUCION :

$$\vec{e}_i = a_i^k \vec{e}'_k \Rightarrow \vec{e}'_j \cdot \vec{e}_i = a_i^k \vec{e}'_j \cdot \vec{e}'_k = a_i^j \|\vec{e}'_j\|$$

puesto que las bases son ortogonales.

I-5. Demostrar que el producto escalar entre dos vectores $\vec{x} \cdot \vec{y}$ es invariante frente a los cambios de base.

SOLUCION :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = g_{ij} x^i y^j = \underbrace{g_{ij} b_k^i b_l^j}_{x'^k y'^l} x'^k y'^l = g'_{kl} x'^k y'^l = (\vec{x} \cdot \vec{y})'$$

I-6. Demostrar que los δ_j^i pueden ser considerados como las componentes mixtas de un tensor de segundo orden y que éstas son invariantes con respecto al cambio de coordenadas.

SOLUCION :

De acuerdo con I.4

$$\delta_k^j = a_i^j b_k^i = a_i^j b_k^l \delta_l^i = \delta_k^j$$

I-7. En el espacio M_4 definido anteriormente se tienen dos vectores cuyas componentes son

$$\begin{aligned} x^i &= (4, 3, 2, 1) \\ y^i &= (1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

a) Hallar las componentes T^i_j y T_i^j del tensor $\tilde{T} = \vec{x} \otimes \vec{y}$.

b) Hallar las componentes T'_{kl} del tensor con respecto a la base $\vec{e}'_i = (-1)^i \vec{e}_i$

SOLUCION :

(a) -

$$\tilde{T} = \vec{x} \otimes \vec{y} = T_j^i \vec{\Pi}_i^j = T_{ij} \vec{\Pi}^{ij} \dots , , \quad \vec{\Pi}_i^j = \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j$$

$$x^i = (4, 3, 2, 1) \Rightarrow x^i = (4, -3, -2, -1)$$

$$y^j = (1, 2, 3, 4) \Rightarrow x^i = (1, -2, -3, -4)$$

$$(T^i{}_j) = (x^i y_j) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -12 & -16 \\ 3 & -6 & -9 & -12 \\ 2 & -4 & -6 & -8 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

De forma análoga se obtiene $(T_i{}^j)$.

(b) -

$$T'_{kl} = b_k^i b_l^j T'^{ij} = b_k^i b_l^j g^{jn} T_n^i$$

y, dado que,

$$\vec{e}'_i = (-1)^i \vec{e}_i = \underbrace{(-1)^i \delta_i^j}_{=b_i^j} \vec{e}_j \Rightarrow \begin{cases} b_k^i = (-1)^k \delta_k^i \\ b_l^j = (-1)^l \delta_l^j \end{cases} \Rightarrow$$

$$T'_{kl} = (-1)^{(k+l)} \delta_k^i \delta_l^j g^{jn} T_n^i = (-1)^{(k+l)} T_n^k g^{nl} = (-1)^{(k+l)} T_l^k g^{nl} \Rightarrow$$

puesto que g^{nl} es diagonal. Luego $T'_{00} = (-1)^0 T_0^0 g^{00} = 4 \dots$ y

$$(T'_{kl}) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 & -16 \\ -3 & 6 & -9 & 12 \\ 2 & -4 & 6 & -8 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

I-8. Dado un tensor \tilde{T} cuyas componentes doblemente covariantes son simétricas (antisimétricas), demostrar:

- a) Que las componentes doblemente contravariantes tienen el mismo tipo de simetría pero que ésto no es cierto para las componentes mixtas.
- b) Que las propiedades mencionadas se conservan en la transformación de base.

- I-9. Dado un tensor $\tilde{P}^{(p)}$, donde el orden $p > 1$, demostrar que de la contracción de una determinada pareja de índices de sus componentes resultan las componentes de otro tensor $\tilde{T}^{(p-2)}$ y que, si $p = 2n$, la contracción total de las parejas de índices del tensor es un escalar. ¿Cuál es el efecto de emparejar a los índices de distinta manera?
- I-10. Demostrar que si $T(ij)x_i x_j$ es un escalar, para \vec{x} arbitrario, solo puede asegurarse que $T(ij)$ sean las componentes doblemente contravariantes de un tensor si $T(ij) = T(ji)$.
- I-11. En el espacio puntual euclídeo \mathcal{E}_4 , asociado al M_4 definido anteriormente, se considera a los puntos A y B , cuyas componentes contravariantes con respecto al sistema de referencia $S=(O, \vec{e}_i)$ son $\overline{OA}^i = (1, 2, 3, 4)$ y $\overline{OB}^i = (4, 3, 2, 1)$.
- a- Hallar las coordenadas covariantes de dichos puntos con respecto al sistema de referencia $S'=(O', \vec{e}'_i)$, donde $\overline{OO'} = \sum_i \vec{e}_i$ y $\vec{e}'_i = (-1)^i \vec{e}_i$.
- b- Demostrar que $\|\overline{OA}\| \neq \|\overline{O'A}\|$ y que $\|\overline{AB}\|$ es invariante frente al cambio de sistema de referencia.
- I-12. Probar que los operadores Laplaciano, divergencia y rotacional definidos anteriormente son tensoriales (Aplicados sobre los tensores correspondientes dan como resultados a otros tensores).

Apéndice II

Mecánica Analítica no relativista

Este apéndice resume los fundamentos de las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana del movimiento de un sistema de partículas [Leech, Goldstein, Landau y Lifchitz CA].

II.1. Formalismo lagrangiano

El formalismo lagrangiano permite expresar las leyes del movimiento, en función de coordenadas generalizadas, de una forma canónica que es aplicable tanto en sistemas de referencia inerciales como acelerados. En primer lugar se deducen las expresiones generales de las ecuaciones de Lagrange y, a continuación, se trata el caso particular, pero frecuente, en que las fuerzas aplicadas pueden derivarse de funciones potenciales.

II.1.1. Ecuaciones de Lagrange; expresión general

Considérese a un sistema S_N de N partículas sometido a un campo de fuerzas ¹ y representado en un espacio, denominado espacio de configuración, de $3N + 1$ coordenadas. En este espacio, cada partícula viene referida espacialmente por tres de estas coordenadas y la evolución temporal de S_N se representa por una curva o trayectoria de $3N + 1$ dimensiones.

Si se parte de un sistema de referencia inercial y se utilizan coordenadas cartesianas $(x_i, t) \equiv (x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_N, t)$, las ecuaciones del movimiento pueden escribirse de la forma

$$F_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) = m_i \ddot{x}_i \quad , \quad \dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt} \quad , \quad i = 1, \dots, 3N \quad (\text{II.1})$$

¹No se incluyen en este resumen a las fuerzas de ligadura y, en cualquier caso, se supone que las fuerzas aplicadas son continuas

donde F_i es la i-esima componente de la fuerza aplicada a S_N . Puesto que en el espacio ordinario cada partícula de masa m_α viene representada por tres coordenadas de posición, el valor de m_α se repite para tres valores de i en el espacio de configuración. Estas ecuaciones son de segundo grado en las variables de posición, por lo que por cada punto (x_{i0}, t_0) del espacio de configuración pasan infinitas trayectorias de S_N ; cada una corresponde a un valor inicial distinto de la velocidad \dot{x}_{i0} .

En adelante se hará uso del convenio de Einstein de suma sobre los subíndices repetidos en las variables ², de acuerdo con el cual la energía cinética de S_N viene dada por

$$T = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (\text{II.2})$$

y II.1 puede expresarse como ³

$$F_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \quad , , \quad T = T(\dot{x}) \quad (\text{II.3})$$

A partir de estas ecuaciones, válidas para sistemas de referencia inerciales y cartesianos, se buscarán otras equivalentes utilizables en sistemas de referencia de tipo más general. Para ello se consideran las transformaciones de coordenadas

$$q_i = q_i(x, t) \quad , , \quad i = 1, \dots, 3N \quad (\text{II.4})$$

donde q_i es una función continua, derivable e inversible salvo, posiblemente, en las fronteras del dominio del problema ⁴. Las transformaciones inversas son

$$x_j = x_j(q, t) \quad , , \quad j = 1, \dots, 3N \quad (\text{II.5})$$

La aparición de t como variable explícita en la transformación indica que el sistema (q, t) está en movimiento con respecto a (x, t) y puede no ser inercial.

Para expresar II.3 con respecto al nuevo sistema de coordenadas, se procederá de la siguiente forma:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}$$

donde $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$. Derivando II.5

$$\dot{x}_j = \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} \quad (\text{II.6})$$

²para esta regla no cuentan los índices de las masas m_i .

³La dependencia de una función de las variables x_i y \dot{x}_i , para $i = 1, \dots, 3N$, se anotará por $f(x, \dot{x})$.

⁴Estas condiciones se cumplen en la mayor parte de los casos prácticos como, por ejemplo, en las transformaciones a coordenadas esféricas, cilíndricas, etc..

de donde se deduce que

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad (\text{II.7})$$

porque $\frac{\partial x_j}{\partial t}$ no es función de \dot{q}_i . Luego

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}$$

Derivando temporalmente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \underbrace{m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}}_a + \underbrace{m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right)}_b$$

El término (a) del segundo miembro se denomina componente de la fuerza generalizada, actuante sobre S_N , y se escribe, de acuerdo con II.1

$$Q_i = F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad (\text{II.8})$$

Por lo que respecta a (b), el orden de derivación de $\frac{d}{dt}$ y $\frac{\partial}{\partial q_i}$ puede invertirse, con lo que

$$(b) = m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

De acuerdo con esto y con II.8, las ecuaciones del movimiento II.3 quedan expresadas en la forma general de Lagrange

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad , , \quad T = T(\dot{q}, q, t) \quad (\text{II.9})$$

que, como es fácil de ver, se reduce a II.3 para coordenadas iniciales y cartesianas. El término $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ está ligado a la curvatura de las superficies coordenadas y, por lo tanto, se anula en el caso de las coordenadas cartesianas; físicamente corresponde a las fuerzas ficticias: de Coriolis, centrífuga, etc.

II.1.2. Ecuaciones de Lagrange para fuerzas que derivan de un potencial

Las fuerzas pueden derivarse de energías potenciales en dos casos importantes. En primer lugar, las fuerzas conservativas pueden derivarse de una energía potencial $W(x)$ que solo depende de las coordenadas de posición.

$$F_i = - \frac{\partial W}{\partial x_i} \Rightarrow Q_i = - \frac{\partial W}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = - \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (\text{II.10})$$

Por otra parte, aunque la fuerza electromagnética sobre una partícula ⁵ cargada depende de la velocidad de ésta, es posible encontrar una energía potencial $U(x, \dot{x}, t)$ de la que derivarla. La fuerza de Lorentz ⁶

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{II.11})$$

puede expresarse en función de los potenciales electromagnéticos, el escalar $\phi(x, t)$ y el vector $\vec{A}(x, t)$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Teniendo en cuenta que

$$\nabla(\vec{v}(t) \cdot \vec{A}(x, t)) = (\vec{v}(t) \cdot \nabla)\vec{A}(x, t) + \underbrace{(\vec{A}(x, t) \cdot \nabla)\vec{v}(t)}_{=0} + \vec{v}(t) \times (\nabla \times \vec{A}(x, t)) + \underbrace{\vec{A}(x, t) \times (\nabla \times \vec{v}(t))}_{=0}$$

, puesto que \vec{v} no depende de las coordenadas x, luego

$$\vec{v} \times \vec{B} = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}$$

y

$$F_i = e \left[-\frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial(\vec{v} \cdot \vec{A})}{\partial x_i} - (\vec{v} \cdot \nabla)A_i \right] = -e \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) - e \frac{dA_i}{dt}$$

dado que $\frac{df(x,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)f$. Expresando explícitamente $\vec{v} \cdot \vec{A} = \dot{x}_j A_j$, el último término de la ecuación anterior puede escribirse como

$$\frac{dA_i(x, t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

por lo que, si se define como energía potencial electromagnética ⁷ a

⁵Se consideran sistemas de una sola partícula. La interacción entre partículas cargadas, incluso en el marco prerelativista, se propaga con velocidad finita lo que complica su tratamiento más allá de los objetivos de la asignatura. En el caso relativista estas consideraciones se extienden a todo tipo de interacciones.

⁶E. J. Konopinski, "Electromagnetic fields and relativistic particles", McGraw-Hill

⁷Aquí se emplea para U la denominación de 'energía potencial' porque es una función, con dimensión de energía, de la cual puede derivarse la fuerza, pero hay que tener en cuenta que, al depender de la velocidad, representa a una fuerza no conservativa.

$$U(x, \dot{x}, t) = e(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (\text{II.13})$$

las fuerzas pueden derivarse de ésta según la expresión

$$F_i = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) U(x, \dot{x}, t) \quad (\text{II.14})$$

Las fuerzas generalizadas son, en este caso,

$$\begin{aligned} Q_i &= F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta II.7

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right)$$

y dado que $U = U(x, \dot{x}, t)$ y $x_j = x_j(q_i, t)$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}$$

y

$$Q_i = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) U(q, \dot{q}, t) \quad (\text{II.15})$$

Tanto en el caso de las fuerzas conservativas como en las de Lorentz se define la función Lagrangiana como la diferencia entre la energía cinética y la potencial

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - W(q, t) \quad , , \quad L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, \dot{q}, t) \quad (\text{II.16})$$

lo que permite escribir las ecuaciones de Lagrange en la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (\text{II.17})$$

II.2. Formalismo hamiltoniano

El formalismo hamiltoniano se desarrolla en el espacio de las fases, el cual tiene $6N + 1$ dimensiones. Además de las $3N$ coordenadas generalizadas q_i del espacio de configuración⁸, en el de las fases se definen otras $3N$ coordenadas independientes p_i , denominadas cantidades de movimiento generalizadas o momentos conjugados

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (\text{II.18})$$

Se dice que q_i y p_i son un par de variables conjugadas.

Introduciendo la definición de p_i en las ecuaciones de Lagrange II.17

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (\text{II.19})$$

A diferencia de lo que ocurre en el espacio de configuración, por un punto (q_{i0}, p_{i0}, t_0) pasa una sola trayectoria de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ ⁹.

En sistemas inerciales y coordenadas cartesianas, los momentos conjugados de un sistema de una partícula cargada, de masa m y carga e , son

$$p_i = m\dot{x}_i + eA_i \quad (\text{II.20})$$

El primer término del segundo miembro es la cantidad de movimiento cinética de la partícula y el segundo la cantidad de movimiento electromagnética. Esta última, en ciertos casos, puede interpretarse como momento potencial.

II.2.1. Ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones de Hamilton representan una alternativa, en el espacio de las fases, a las ecuaciones de Lagrange. Si se deriva $L(q, \dot{q}, t)$ con respecto al tiempo, se reagrupan los términos y se hace uso de II.19, se obtiene

$$\frac{d}{dt} [\dot{q}_i p_i - L] = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Definiendo como función de Hamilton o hamiltoniano a

$$H(q, p, t) \equiv p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (\text{II.21})$$

⁸Las \dot{q}_i son variables dependientes en el espacio de configuración, aunque aparezcan de forma explícita en las expresiones.

⁹Esta circunstancia es útil para el desarrollo canónico de la mecánica estadística.

el resultado anterior puede escribirse como

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (\text{II.22})$$

lo que pone de manifiesto que el hamiltoniano es una constante del movimiento para aquellos sistemas cuyo lagrangiano no depende explícitamente del tiempo.

Las ecuaciones del movimiento en el espacio de las fases pueden obtenerse de la siguiente forma:

Diferenciando $H(q, p, t)$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Haciendo lo mismo sobre la definición II.21 y teniendo en cuenta II.18 y II.19

$$dH = -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

De la comparación de las dos expresiones de dH se obtienen las ecuaciones de Hamilton o ecuaciones canónicas del movimiento

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} &&, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

De esta última ecuación y de II.22 se deduce que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (\text{II.24})$$

La comparación de esta ecuación con el segundo grupo de las ecuaciones canónicas sugiere la interpretación de H y $-t$ como variables conjugadas. Este sistema de $6N + 1$ ecuaciones puede reducirse en el caso de que existan variables ignorables o cílicas, aquellas q_i o p_i que no aparecen explícitamente en el hamiltoniano. En este caso sus variables conjugadas p_i o q_i son constantes del movimiento.

II.2.2. Expresiones particulares del hamiltoniano

Las funciones L y H tienen dimensiones de energía y H , en particular, puede ser interpretada en muchos casos de interés como la energía total del sistema. Esto no es siempre cierto por lo que, en cada caso, se hace necesario analizar con cuidado las ecuaciones de balance energético. Como ya se ha visto, el hamiltoniano solo es una constante del movimiento si no depende explícitamente del tiempo, circunstancia que

no se da en el caso general electromagnético. A continuación se exponen las expresiones de \mathbf{H} en los casos más usuales.

Si solo se consideran transformaciones de coordenadas independientes del tiempo, del tipo $x_i = x_i(q)$, sustituyendo II.6 en II.2

$$T = A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k , \quad A_{jk}(q) = \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

Derivando T con respecto a \dot{q}_i y multiplicando por la misma, se obtiene

$$\dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

Para fuerzas conservativas y transformaciones independientes del tiempo, $W = W(q)$ y

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

con lo que de II.21 y II.18

$$H(q, \dot{q}) = T + W$$

que puede ser interpretado como la energía total del sistema. Efectivamente, el trabajo realizado por las fuerzas conservativas entre dos puntos de la trayectoria es

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta T = -\Delta W \quad (\text{II.25})$$

y $\Delta H = \Delta T + \Delta W = 0$

Las fuerzas electromagnéticas no son conservativas en el caso general y, para potenciales $V(x, t)$ y $\vec{A}(x, t)$, $\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0$ por lo que \mathbf{H} no es una constante del movimiento. Operando en coordenadas cartesianas en II.20

$$p_i \dot{x}_i = m \dot{x}_i^2 + e \dot{x}_i A_i = 2T + e \vec{v} \cdot \vec{A}$$

de donde

$$H(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - e \vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2 + e \phi(\vec{r}, t) \quad (\text{II.26})$$

II.3. Principios variacionales

Los principios variacionales permiten el desarrollo compacto y elegante de muchas de las teorías físicas. De entre los muchos posibles, aquí se trata exclusivamente del principio de Hamilton, el cual constituye una alternativa para la deducción de las ecuaciones de Lagrange.

II.3.1. Cálculo de variaciones

Como paso previo al enunciado del principio de Hamilton se plantea el problema matemático de la búsqueda de las condiciones de estacionariedad de la integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x}, t) dt \quad (\text{II.27})$$

donde F es una función conocida y diferenciable, t es la variable independiente, $x = x(t)$ la curva o camino a lo largo de la cual se realiza la integral, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ y t_1 y t_2 los extremos fijos de la integración. Las curvas $x(t)$ son arbitrarias, salvo en sus puntos extremos $x_1 = x(t_1)$ y $x_2 = x(t_2)$, y derivables.

Se trata de encontrar aquellos caminos, curvas extremales, a lo largo de los cuales I se hace estacionaria (toma un valor máximo o mínimo local). La determinación de si la curva extremal corresponde a un máximo o mínimo es un problema más complejo pero puede ser resuelto empleando criterios de tipo físico.

Supóngase que $x(t)$ es extremal y considérese la integración a lo largo del camino

$$\underline{x}(t) = x(t) + a \eta(t) \quad (\text{II.28})$$

donde a es un parámetro y $\eta(t)$ es una función derivable y tal que

$$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0 \quad (\text{II.29})$$

pero, por lo demás, arbitraria.

Derivando II.28 con respecto a la variable independiente t

$$\dot{\underline{x}} = \dot{x} + a \dot{\eta}$$

La integral II.27 es ahora función de a .

$$I(a) = \int_{t_1}^{t_2} F(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) dt$$

y

$$\frac{\partial I(a)}{\partial a} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial a} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{x}}} \dot{\eta} \right] dt$$

Integrando por partes el segundo término del integrando y teniendo en cuenta que η es nula en los extremos,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{x}}} \dot{\eta} dt = \underbrace{\left[\eta \frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{x}}} \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{x}}} \right) dt$$

Luego

$$\frac{\partial I(a)}{\partial a} = \int_{t_1}^{t_2} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{x}}} \right) \right] dt$$

Puesto que $\underline{x} = (\underline{x})_{a=0}$ es una curva extremal

$$\left[\frac{\partial I(a)}{\partial a} \right]_{a=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{x}}} \right) \right] dt = 0$$

y como $\eta(t)$ es arbitraria, los caminos extremales deben cumplir la ecuación de Euler

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{x}}} \right) = 0 \quad (\text{II.30})$$

junto con las condiciones de frontera $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1$ y $\underline{x}(t_2) = \underline{x}_2$. $F(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t)$ es una función conocida. Si se toma $F = L(q, \dot{q}, t)$ las ecuaciones de Euler resultan idénticas a las de Lagrange, las cuales, por ser de segundo orden, tienen solución única con las condiciones impuestas.

II.3.2. Principio de Hamilton

De lo visto en el apartado anterior, para los sistemas de partículas sometidos a fuerzas que pueden ser derivadas de un potencial, la acción hamiltoniana, definida como

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (\text{II.31})$$

toma un valor extremo para una trayectoria real que pase por los puntos $q_i(t_1) = q_{i1}$ y $q_i(t_2) = q_{i2}$.

El principio de Hamilton suele expresarse en la forma

$$\delta \mathcal{A} = 0 \quad (\text{II.32})$$

donde $\delta \mathcal{A}$ es la variación de primer orden alrededor del valor de \mathcal{A} para una trayectoria real. El resultado anterior, que aparece como última consecuencia de las leyes de Newton, puede ser tomado como principio si se postula la forma del lagrangiano. Esta es una vía muy conveniente para reposutar la mecánica y el electromagnetismo, en forma manifiestamente invariantes, dentro del marco de la relatividad de Einstein.

Apéndice III

Formulario de series y transformadas de Fourier

III.1. Introducción

En este apéndice se fijan los convenios y notaciones utilizados en el texto para los desarrollos y transformadas de Fourier y se recojen las principales propiedades de los mismos [Arfken y Weber], [Spiegel et al.].

III.2. Desarrollo en series de Fourier

Desarrollo en función de senos y cosenos :

En el espacio de Hilbert L^2 , $\sin n\zeta$ y $\cos n\zeta$, donde $n = 0, 1 \dots$, forman una base completa de las funciones que son de cuadrado integrable en el intervalo $I = \zeta \in [\zeta_0, \zeta_0 + 2\pi]$. Esto permite aproximar a estas funciones, dentro de dicho intervalo, mediante un desarrollo en serie de Fourier¹. Una de las expresiones más comunes de este desarrollo es

$$f(\zeta) = f_{sf}(\zeta) \equiv \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\zeta , \quad \zeta \in I \quad (\text{III.1})$$

$f_{sf}(\zeta) = f_{sf}(\zeta + 2\pi)$ es una función periódica, con periodo 2π , que representa a $f(\zeta)$ en I .

Dado que las funciones de base son ortogonales

¹Es necesario y suficiente que la función que se aproxima tenga un número finito de discontinuidades finitas y un número finito de máximos y mínimos en I [Arfken y Weber].

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi} \sin n\zeta \sin n'\zeta d\zeta = \begin{cases} \pi\delta_{nn'} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases} \quad (\text{III.2a})$$

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi} \cos n\zeta \cos n'\zeta d\zeta = \begin{cases} \pi\delta_{nn'} & n \neq 0 \\ 2\pi & n = n' = 0 \end{cases} \quad (\text{III.2b})$$

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi} \sin n\zeta \cos n'\zeta d\zeta = 0 \quad , , \quad \forall n, n' \quad (\text{III.2c})$$

, los coeficientes del desarrollo se obtienen de la forma:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi} f(\zeta) \cos n\zeta d\zeta \quad , , \quad n = 0, 1, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi} f(\zeta) \sin n\zeta d\zeta \quad , , \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

por lo que $a_0/2$ es el valor medio de la función en I

$$\frac{a_0}{2} = \langle f(\zeta) \rangle_I \quad (\text{III.4})$$

Desarrollo en función de exponentiales complejos :

Una forma más compacta de esta serie se obtiene haciendo uso de las fórmulas de Euler para los senos y cosenos

$$f_{sf}(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\zeta} \quad (\text{III.5})$$

donde

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad , , \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n) \quad , , \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j b_n) \quad , , \quad n > 0 \quad (\text{III.6})$$

o

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi} f(\zeta) e^{jn\zeta} d\zeta \quad , , \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (\text{III.7})$$

Las expresiones de ortogonalidad se reducen a

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi} e^{jn\zeta} e^{-jn'\zeta} d\zeta = 2\pi \delta_{nn'} \quad (\text{III.8})$$

En la práctica las series deben truncarse puesto que solo es posible utilizar a un número finito de términos. Puede demostrarse que la función

$$f_N(\zeta) \equiv \sum_{n=-N}^N d_n e^{jn\zeta}$$

minimiza al error cuadrático medio

$$\mathcal{E}^2(d_n) \equiv \int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi} [f(\zeta) - f_N(\zeta)]^2 d\zeta$$

cuando $d_n = c_n$, por lo que f_N representa a la mejor aproximación cuadrática en función de los $2N + 1$ primeros términos de f_s .

Otras notaciones :

Para las variables temporales y espaciales se emplearán las notaciones

$$\zeta = \begin{cases} \omega_0 t & \Rightarrow d\zeta = \omega_0 dt , \quad I_t = t \in [t_1, t_1 + T_0] \\ k_0 x & \Rightarrow d\zeta = k_0 dx , \quad I_x = x \in [x_1, x_1 + \lambda_0] \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

ω_0 es la frecuencia angular fundamental, $f_0 = \omega_0/2\pi$ la frecuencia y $T_0 = 1/f_0$ el periodo. k_0 = es el número de onda y $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ el periodo espacial en la dirección x .

III.3. Transformadas de Fourier

En el texto se aplica la transformada de Fourier a funciones $f(\vec{r}, t)$ que dependen de las coordenadas temporales y espaciales.

Transformadas temporales :

Una condición suficiente para que una función sea transformable por Fourier es que sea de cuadrado sumable. En el dominio del tiempo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\vec{r}, t)|^2 dt = \text{finita} \quad (\text{III.10})$$

Salvo en el caso de funciones armónicas, se supone que, en lo que sigue, todas las funciones son de cuadrado sumable.

Aquí se convendrá en utilizar la siguiente versión del *Par de transformadas de Fourier temporales*²:

$$\mathcal{F}\{f(\vec{r}, t)\} \equiv f(\vec{r}, \omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt , , \text{ Transformación directa} \quad (\text{III.11a})$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{f(\vec{r}, \omega)\} \equiv f(\vec{r}, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega , , \text{ Transformación inversa} \quad (\text{III.11b})$$

ω , la *Frecuencia angular o, simplemente, frecuencia*, es la *variable conjugada del tiempo t en la transformación*. Puede escribirse como

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

donde f es la *Frecuencia* y T el *Periodo del armónico*. $f(\vec{r}, \omega)$ ³ es la *Densidad espectral de f(r, t)* (amplitud del armónico $e^{-j\omega t}$ contenido por $f(\vec{r}, t)$ por unidad de intervalo de ω)

Magnitudes armónicas :

Las magnitudes armónicas tienen una densidad espectral singular, solo es distinta de cero para un solo valor ω_0 de la frecuencia, y una amplitud f_0 finita:

$$f(\vec{r}, t) = f_0(\vec{r}) e^{j\omega_0 t} \quad (\text{III.12})$$

por lo que, de acuerdo con III.11b y III.30a,

$$f(\vec{r}, \omega) = f_0(\vec{r}) \delta(\omega - \omega_0) \quad (\text{III.13})$$

y

$$f_0(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, \omega) d\omega \quad (\text{III.14})$$

²La constante de normalización $1/(2\pi)$ puede repartirse de forma arbitraria entre la transformada directa y la inversa y el signo del núcleo también es materia de convención, por lo que ha de verificarse con cuidado la notación empleada en otros textos y tablas. La que aquí se utiliza es la extensión de la empleada para las series.

³Aunque $f(\vec{r}, \omega)$ y $f(\vec{r}, t)$ son funciones distintas, se anotarán con el mismo nombre. Se distinguirán por el argumento o por el contexto en que se empleen.

Transformadas espaciales :

En el núcleo de las transformadas espaciales se tomará el signo contrario al utilizado para las temporales.

$$f(\vec{k}, t) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{r^3} f(\vec{r}, t) e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 r \quad (\text{III.15a})$$

$$f(\vec{r}, t) \equiv \int_{k^3} f(\vec{k}, t) e^{-j(\vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 k \quad (\text{III.15b})$$

$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ es el vector de las variables conjugadas de $\vec{r} = (x, y, z)$. Aunque $f(\vec{k}, t)$ no corresponde necesariamente a una onda, \vec{k} se denominará *Vector de onda*. $d^3 r \equiv dx dy dz$ es el elemento del volumen espacial infinito de integración r^3 y $d^3 k \equiv dk_x dk_y dk_z$ el del volumen de integración infinito del espacio de los números de onda k^3 . \vec{k} puede escribirse de la forma

$$\vec{k} = k \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} \quad , \quad \vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$$

donde k es el *Número de onda*, \vec{n} el *Vector unitario de onda* y λ la *Longitud de onda*.

Transformadas espacio-temporales :

De acuerdo con los convenios establecidos

$$f(\vec{k}, \omega) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{r^3, t} f(\vec{r}, t) e^{-j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 r dt \quad (\text{III.16a})$$

$$f(\vec{r}, t) \equiv \int_{k^3, \omega} f(\vec{k}, \omega) e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 k d\omega \quad (\text{III.16b})$$

Esta doble transformación equivale a la descomposición de $f(\vec{r}, t)$ en un espectro continuo de *Ondas monocromáticas planas* con una densidad espectral $f(\vec{k}, \omega)$. Los parámetros \vec{k} , \vec{n} , f , ω y λ adquieren propiamente el apelativo "de onda". Se define como *Fase de la onda plana monocromática a*

$$\varphi \equiv \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t - k \vec{n} \cdot \vec{r} = \omega t - k\xi = 2\pi (ft - \frac{\xi}{\lambda}) = \omega (t - \frac{\xi}{v_f}) \quad (\text{III.17})$$

ξ es la distancia a lo largo de la dirección de propagación \vec{n} y v_f es la *Velocidad de fase* definida como

$$v_f \equiv \left(\frac{d\xi}{dt} \right)_{\varphi=cte} = \frac{\omega}{k} \quad (\text{III.18})$$

Transformadas de funciones reales :

Conjugando (*) a las transformadas inversas es fácil de comprobar que, para funciones reales $f(\vec{r}, t)$, se cumple

$$f^*(\vec{r}, \omega) = f(\vec{r}, -\omega) , , \quad f^*(\vec{k}, t) = f(-\vec{k}, t) , , \quad f^*(\omega, \vec{k}) = f(-\omega, -\vec{k}) \quad (\text{III.19})$$

En particular, si $f_r(\vec{r}, \omega)$ y $f_i(\vec{r}, \omega)$ son las partes real e imaginaria de $f(\vec{r}, \omega)$,

$$f_r(\vec{r}, \omega) = f_r(\vec{r}, -\omega) , , \quad \text{función par de } \omega \quad (\text{III.20a})$$

$$f_i(\vec{r}, \omega) = -f_i(\vec{r}, -\omega) , , \quad \text{función impar de } \omega \quad (\text{III.20b})$$

En este caso, aunque no es necesario, el dominio de la frecuencia puede limitarse al rango positivo:

$$f(\vec{r}, \omega) = |f(\vec{r}, \omega)| e^{j\phi(\vec{r}, \omega)} \Rightarrow f(\vec{r}, t) = 2 \int_0^\infty |f(\vec{r}, \omega)| \cos [\omega t - \phi(\vec{r}, \omega)] d\omega \quad (\text{III.21})$$

III.4. Propiedades

Las transformadas de Fourier son obviamente lineales. Otras propiedades útiles son

Transformada de la derivada :

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial f[t]}{\partial t} \right\} = j\omega f(\omega) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega , \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -jk_x , \quad \nabla \rightarrow -j\vec{k} = -j k \vec{n} \quad (\text{III.22})$$

Transformada de la integral :

$$\mathcal{F} \left\{ \int f[t] dt \right\} = \frac{1}{j\omega} f(\omega) \Rightarrow \int () dt \rightarrow \frac{1}{j\omega} \quad (\text{III.23})$$

Traslación en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia :

$$cF \{ f(t - t_0) \} = f(\omega) e^{-j\omega t_0} , , \quad cF^{-1} \{ f(\omega - \omega_0) \} = f[t] e^{j\omega_0 t} \quad (\text{III.24})$$

Teorema de Parseval :

Para $f[t]$ y $g[t]$ reales

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f[t] g[t] dt &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) g^*(\omega) d\omega = 2\pi \int_0^{\infty} [f(\omega) g^*(\omega) + f(-\omega) g^*(-\omega)] d\omega \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} [f(\omega) g^*(\omega) + f^*(\omega) g(\omega)] d\omega = \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[f(\omega) g^*(\omega)] d\omega \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

Valor medio de funciones armónicas :

$$\langle \operatorname{Re}[f[t]] \operatorname{Re}[g[t]] \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Re}[f[t]] \operatorname{Re}[g[t]] dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[f[t] g^*[t]] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[f_0 g_0^*] \quad (\text{III.26})$$

Teorema de la convolución :

Sean $f[t]$ y $g[t]$ reales

$$\mathcal{F}\{f[t] * g[t]\} \equiv \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') g(t') dt'\right\} = 2\pi f(\omega) g(\omega) \quad (\text{III.27})$$

Relaciones de dispersión de Kronig-Kramers :

Para una función $f[t]$ real que cumple, por lo tanto, las relaciones III.20 y que además es nula para $t < 0$, sus partes, real $f_r(\omega)$ e imaginaria $f_i(\omega)$, están relacionadas mediante las *Relaciones de dispersión de Kronig-Kramers*

$$f_r(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} f_i(\omega') d\omega' \quad (\text{III.28a})$$

$$f_i(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega'^2 - \omega^2} f_r(\omega') d\omega' \quad (\text{III.28b})$$

donde

$$P \int_0^{\infty} \equiv \int_{\omega' \rightarrow 0, \omega' > 0}^{\infty}$$

es la parte principal de Cauchy de la integral \int_0^{∞} .

Relación de incertidumbre :

Si $(\alpha, \beta) = (t, \omega), (x, k_x), (y, k_y), (z, k_z)$ **son dos variables conjugadas, las anchuras** $\Delta\alpha$ **y** $\Delta\beta$ **de las funciones** $f(\alpha)$ **y** $f(\beta)$ **cumplen la relación de incertidumbre que en mecánica cuántica recibe el nombre de Heisenberg:**

$$\Delta\alpha \Delta\beta \geq \frac{1}{2} \quad (\text{III.29a})$$

$$(\Delta\alpha)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 |f(\alpha)|^2 d\alpha}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(\alpha)|^2 d\alpha} \quad (\text{III.29b})$$

Transformada y expresiones de la Delta de Dirac :

$$\mathcal{F}\{\delta(\xi - \xi_0)\} = \frac{e^{-j\omega\xi_0}}{2\pi}$$

por lo que de acuerdo con III.11

$$\delta(\xi - \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\xi - \xi_0)\eta} d\eta = \delta(\xi_0 - \xi) \quad (\text{III.30a})$$

$$\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\zeta^3} e^{-j(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0) \cdot \vec{\zeta}} d^3\zeta \quad (\text{III.30b})$$

III.5. Problemas

III-1. Desarrollar por series de Fourier las funciones periódicas de la figura III.1. Representar los módulos y las fases en funciones de ω .

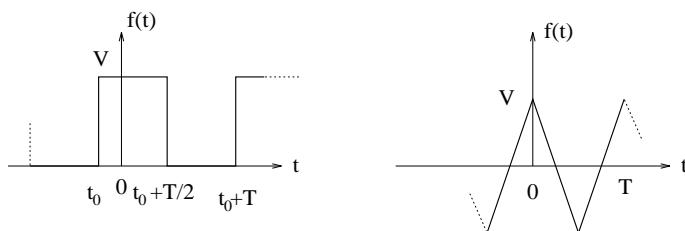


Figura III.1:

III-2. Demostrar las siguientes propiedades de la transformada de Fourier:

- a) $\mathcal{F}[f[t]] = F(j\omega) = F(s)$, $s = j\omega$
- b) $\mathcal{F}[Af[t] + Bg[t]] = AF(s) + BG(s)$, donde $G(s) = \mathcal{F}[g[t]]$
- c) $\mathcal{F}\left[\frac{df[t]}{dt}\right] = j\omega F(s) = sF(s)$
- d) $\mathcal{F}\left[\int f[t]dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$

III-3. Demostrar el teorema de la transformada de Fourier de la convolución y el de Parseval.

SOLUCION :

Teorema de la convolución

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\omega) &= \mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{t'=-\infty}^{\infty} f(t-t') g(t') dt'\right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \left[\int_{t'=-\infty}^{\infty} f(t-t') g(t') dt' \right] e^{-j\omega t} dt\end{aligned}$$

Intercambiando el orden de integración

$$\mathcal{C}(\omega) = \int_{t'=-\infty}^{\infty} g(t') \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t-t') e^{-j\omega t} dt \right]}_I dt'$$

Para realizar la integral (I), se hace el cambio variable

$$\begin{aligned}t &= \tau + t' \quad , \quad dt = \tau \Rightarrow \\ I &= \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t'} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\omega \tau} d\tau = e^{j\omega t'} f(\omega) \Rightarrow \\ \mathcal{C}(\omega) &= 2\pi f(\omega) \frac{1}{2\pi} \int_{t'=-\infty}^{\infty} g(t) e^{j\omega t} dt = 2\pi f(\omega) g(\omega)\end{aligned}$$

Teorema de Parseval

Sean $f(t)$ y $g(t)$ reales y transformables

$$\begin{aligned}I &= \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} g(t) \left[\int_{\omega=-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= 2\pi \int_{\omega=-\infty}^{\infty} f(\omega) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} g(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = 2\pi \int_{\omega=-\infty}^{\infty} f(\omega) g^*(\omega) d\omega\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que, por ser $g(t)$ real,

$$g^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} g(t) e^{+j\omega t} dt$$

III-4. Calcular y representar la transformada directa de Fourier, o inversa, de las siguientes funciones:

a)

$$f_1(t) = \delta[t] , , g_1(t) = \delta(t - t_0)$$

b)

$$f_2(t) = f(t - t_0) , , g_2(\omega) = g(\omega - \omega_0)$$

c)

$$f_3(t) = \begin{cases} 1 & ; -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & ; t < -T/2, t > T/2 \end{cases}$$

d)

$$f_4(t) = f_3(t) \cos(\omega_0 t)$$

e)

$$f_5(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & ; 0 \leq t \leq N T_0 \\ 0 & ; t < 0, t > N T_0 \end{cases} , , \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

f)

$$f_6(t) = \frac{1}{2} (1 + \cos \omega_0 t) f_3(t) , , T = T_0$$

SOLUCION :

(a) -

$$g_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega t_0}$$

Para representar a una función compleja caben dos alternativas: representar la parte real y la imaginaria o el módulo y la fase.

$$\begin{aligned} Re[g_1(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \cos(\omega t_0) , , Im[g_1(\omega)] = -\frac{1}{2\pi} \sin(\omega t_0) \\ |g_1(\omega)| &= \frac{1}{2\pi} , , arg(g_1(\omega)) = -\operatorname{arctg}(\omega t_0) \end{aligned}$$

La delta de Dirac tiene un espectro plano (de módulo plano). El factor $e^{-j\omega t_0}$ en el espectro, se corresponde en este caso con un retraso t_0 en la función temporal. Esto es cierto para cualquier otra función transformable. Efectivamente :

(b) - Haciendo el cambio de variable $\alpha = t - t_0$

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{-j\omega \alpha} d\alpha = f(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

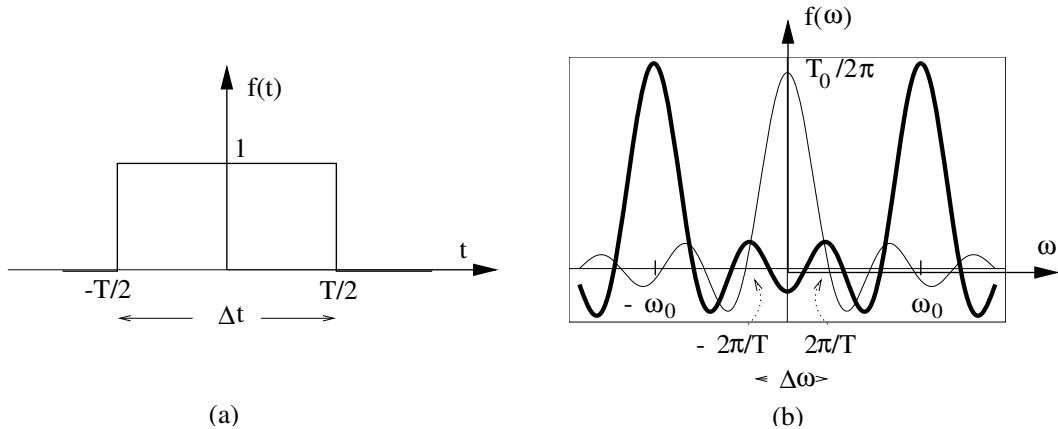


Figura III.2:

(c) - La función a transformar es un pulso cuadrado, de duración T , y simétrico con respecto al origen. Su transformada es

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j\omega t} dt = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

Su espectro, representado en línea de trazo fino en la figura III.2-b, es real y simétrico. Si se define como anchura temporal a $\Delta t = T$ y como anchura de frecuencia a la distancia entre los dos primeros ceros del espectro $\Delta\omega = \frac{4\pi}{T}$, se pone de manifiesto la complementariedad existente entre ambas anchuras

$$\Delta t \Delta\omega = 4\pi$$

de forma que un pulso de poca duración es ancho espectralmente y viceversa (Estas definiciones de anchura no coinciden rigurosamente con las del principio de incertidumbre).

(d) - El efecto inverso al descrito en (b) se logra multiplicando por el factor temporal $e^{-j\omega_0 t}$. El espectro sufre un desplazamiento de ω_0 . En este ejemplo, se multiplica f_3 por un coseno ($\cos x = \frac{1}{2} [e^{jx} - e^{-jx}]$), con lo que el espectro de dicha función se desplaza en ω_0 y $-\omega_0$ y se semisuma, como se muestra en trazo grueso en la figura III.2-b.

(e) - Compruébese que cuanto mayor es el número de periodos que incluye la función, más estrecho es el espectro alrededor de la frecuencia ω_0 .

(f) - Véase que esta función temporal tiene las pendientes continuas, lo que implica que su espectro es mucho más limitado en frecuencia que el de f_3 .

III.6. Ejemplos con Mathematica

4

Existen "paquetes" de Mathematica, dedicados a la transformada de Fourier, que son más completos y eficaces que lo que se ofrece en esta sección. Solo se pretende ilustrar, de forma simple y directa, algunas de las relaciones fundamentales entre las representaciones en los dominios del tiempo y de la frecuencia. El factor $\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, utilizado en el resto de este texto, se reparte aquí entre las transformadas directa e inversa y el signo de las exponenciales se invierte, con objeto de ajustarse al convenio seguido por Mathematica.

III.6.1. Transformada analítica

III.6.1.1. Ejemplo 1º

Relación entre la pendiente temporal de la función y el agrupamiento de su espectro :

Se utiliza como función de referencia al coseno levantado o ventana de Hanning que es nula fuera del intervalo $I_t = t \in [-T/2, T/2]$, tiene una pendiente continua y suave dentro del mismo.

$$h[t] := \frac{1}{2} \left(\cos \left[\frac{2\pi t}{T} \right] + 1 \right) \quad (\text{M.III.1})$$

$$\begin{aligned} hGraf = & \text{Plot}[h[t]/.T \rightarrow 1, \{t, -0.5, 0.5\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \\ & \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[1, 0, 0]\}] \end{aligned} \quad (\text{M.III.2})$$

Estas características se traducen, en el dominio de la frecuencia, en un espectro muy agrupado alrededor de la frecuencia central. Además, como $h[t]$ es real y simétrica, su espectro es también real y simétrico. Dicha transformada es

$$Trh = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Simplify} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h[t] (\cos[2\pi f t] + i \sin[2\pi f t]) dt \right] \quad (\text{M.III.3})$$

A continuación se representa para $T = 1$

$$\begin{aligned} TrhGraf = & \text{Plot}[Trh/.T \rightarrow 1, \{f, -20, 20\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \\ & \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[1, 0, 0]\}] \end{aligned} \quad (\text{M.III.4})$$

⁴Basados en un programa de A.Salinas .

Obsérvese que el espectro se extiende a $\omega \in (-\infty, \infty)$ pero está muy centrado en el origen $\omega = 0$.

La función $f[t]$ es parecida a la anterior

$$f[t_-] := \frac{1}{2} \left(1 - \text{Cos} \left[\frac{2\pi t}{T} \right] \right) \quad (\text{M.III.5})$$

$$\begin{aligned} fGraf = \text{Plot}[f[t]/.T \rightarrow 1, \{t, -0.5, 0.5\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \\ \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[0, 1, 0]\}] \end{aligned} \quad (\text{M.III.6})$$

pero tiene pendiente infinita en los extremos del intervalo $I - t$.

$$\text{Show}[hGraf, fGraf] \quad (\text{M.III.7})$$

Como puede comprobarse, su espectro está mucho más disperso que el de $h[t]$:

$$\text{Trf} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Simplify} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f[t] (\text{Cos}[2\pi f t] + i \text{Sin}[2\pi f t]) dt \right] \quad (\text{M.III.8})$$

$$\begin{aligned} \text{TrfGraf} = \text{Plot}[\text{Trf}/.T \rightarrow 1, \{f, -20, 20\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \\ \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[0, 1, 0]\}] \end{aligned} \quad (\text{M.III.9})$$

$$\text{Show}[trhGraf, trfGraf] \quad (\text{M.III.10})$$

III.6.1.2. Ejemplo 2º

Desplazamiento de un espectro a la frecuencia $\omega = \frac{2\pi}{T_0}$:

Como se muestra en el problema III-4, al multiplicar una función temporal por el $\cos(\omega_0 t)$

$$hd[t_-] := h[t] \text{Cos} \left[\frac{2\pi t}{T_0} \right] \quad (\text{M.III.11})$$

el espectro de la función resultante es la semisuma de los espectros originales desplazados a las frecuencias $\pm\omega_0$. Esto se debe a los términos $e^{\pm j\omega_0 t}$ que componen al $\cos(\omega_0 t)$.

hd1 es el resultado de modular $h[t]$ con una frecuencia $f_0 = \frac{1}{T_0} = 10$

$$\begin{aligned} \text{hd1Graf} = \text{Plot}[\{hd[t]/.\{T \rightarrow 1, T0 \rightarrow 0.1\}\}, \{t, -0.5, 0.5\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \\ \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[0, 0, 1]\}] \end{aligned} \quad (\text{M.III.12})$$

Las partes positiva y negativa del espectro apenas se solapan:

$$\text{Trhd} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Simplify}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{hd}[t] (\cos[2\pi f t] + i \sin[2\pi f t]) dt\right] \quad (\text{M.III.13})$$

$$\text{Trhd1Graf} = \text{Plot}[\text{Trhd}/.\{T \rightarrow 1, T0 \rightarrow 0,1\}, \{f, -20, 20\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[0, 0, 1]\}] \quad (\text{M.III.14})$$

Si la frecuencia de modulación se reduce a $f_0 \simeq 1,43$

$$\text{hd7Graf} = \text{Plot}[\{\text{hd}[t]/.\{T \rightarrow 1, T0 \rightarrow 0,7\}\}, \{t, -0,5, 0,5\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[1, 0, 1]\}] \quad (\text{M.III.15})$$

$$\text{Show}[\text{hd1Graf}, \text{hd7Graf}] \quad (\text{M.III.16})$$

el solapamiento es notable:

$$\text{Trhd7Graf} = \text{Plot}[\text{Trhd}/.\{T \rightarrow 1, T0 \rightarrow 0,7\}, \{f, -20, 20\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[1, 0, 1]\}] \quad (\text{M.III.17})$$

III.6.1.3. Ejemplo 3º

La delta de Dirac :

La función Delta de Dirac puede representarse como límite de funciones de área unidad y anchura decreciente, como las $h(t)$, una vez normalizadas, o los pulsos gaussianos.

$$\text{pulso}(t) := \frac{e^{-(\frac{t}{a})^2}}{a\sqrt{\pi}} \quad (\text{M.III.18})$$

donde a es la semianchura del mismo. Dando a este parámetro el valor $a = 1$

$$\text{pul1Graf} = \text{Plot}[\text{pulso}[t]/.a \rightarrow 1, \{t, -3, 3\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[0, 0, 1]\}] \quad (\text{M.III.19})$$

Los pulsos de anchura decreciente $a = 1$, $a = 0,5$ y $a = 0,1$, tienen alturas crecientes $\frac{1}{a\sqrt{\pi}}$

```
pul123Graf = Plot[{pulso[t]/.a -> 1,
                    pulso[t]/.a -> 0.5, pulso[t]/.a -> 0.1}, {t, -3, 3}, PlotRange -> All,
                    PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[1, 0, 0]}] (M.III.20)
```

pero su área es independiente de la anchura y unitaria:

$$\text{intPul} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{pulso}[t] dt \quad (\text{M.III.21})$$

```
intPulGraf =
Plot[intPul, {a, 0.5, 5}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1]}, PlotRange -> {0, 2}] (M.III.22)
```

Las transformadas de estos pulsos tienen la misma amplitud máxima $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ pero su semianchura es $\frac{2}{a}$, con lo que $\Delta t \Delta \omega \simeq 2$

$$\text{TrPul} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{pulso}[t] (\text{Cos}[\omega t] + i \text{Sin}[\omega t]) dt \quad (\text{M.III.23})$$

```
TrPul123Graf = Plot[{TrPul/.a -> 1, TrPul/.a -> 0.5, TrPul/.a -> 0.1},
                      {w, -20, 20}, PlotRange -> All,
                      PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[1, 0, 0]}] (M.III.24)
```

Como se aprecia en la gráfica, cuando la anchura $2a \rightarrow 0$, la anchura de la transformada $\frac{1}{a} \rightarrow \infty$ y la densidad espectral se hace constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, como corresponde a la Delta de Dirac.

Apéndice IV

Relaciones vectoriales y diádicas

IV.1. Productos

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad (\text{IV.1})$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\text{IV.2})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} , , (\vec{a} \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (\text{IV.3})$$

$$\vec{a} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I} = \vec{a} \quad (\text{IV.4})$$

IV.2. Gradiente

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad (\text{IV.5})$$

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f \quad (\text{IV.6})$$

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) \quad (\text{IV.7})$$

$$\nabla f(\vec{r}) = \hat{r} \frac{df}{dr} , , \nabla r = \hat{r} , , \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \hat{r} \quad (\text{IV.8})$$

IV.3. Divergencia

$$\nabla \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \nabla \cdot \vec{a} + \nabla \cdot \vec{b} \quad (\text{IV.9})$$

$$\nabla \cdot (f \vec{a}) = f \nabla \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla f \quad (\text{IV.10})$$

$$\nabla \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \wedge \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \wedge \vec{b} \quad (\text{IV.11})$$

$$\nabla \cdot \nabla \wedge \vec{a} = 0 \quad (\text{IV.12})$$

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f \quad (\text{IV.13})$$

$$\nabla \cdot \vec{r} = 3 \quad (\text{IV.14})$$

IV.4. Rotacional

$$\nabla \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \nabla \wedge \vec{a} + \nabla \wedge \vec{b} \quad (\text{IV.15})$$

$$\nabla \wedge (f \vec{a}) = f \nabla \wedge \vec{a} + \nabla f \wedge \vec{a} \quad (\text{IV.16})$$

$$\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \nabla \cdot \vec{b} - \vec{b} \nabla \cdot \vec{a} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \quad (\text{IV.17})$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a} \quad (\text{IV.18})$$

$$\nabla \wedge (\nabla f) = 0 , , \quad \nabla \wedge \vec{r} = 0 \quad (\text{IV.19})$$

$$\nabla \wedge \vec{a}(u) = \nabla u \wedge \frac{d\vec{a}}{du} \quad (\text{IV.20})$$

IV.5. Laplaciano

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}) \quad (\text{IV.21})$$

$$\nabla^2 \vec{a} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) \quad (\text{IV.22})$$

$$\nabla^2 \vec{a} = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} , , \quad (\text{Solo en cartesianas})$$

IV.6. Teoremas integrales

$$\int_V \nabla \cdot \vec{a} dv = \oint_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds \quad (\text{IV.23})$$

$$\int_V \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{T} dv = \oint_S \vec{n} \cdot \overset{\leftrightarrow}{T} ds \quad (\text{IV.24})$$

$$\int_S (\nabla \wedge \vec{a}) \cdot \vec{n} ds = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} \quad (\text{IV.25})$$

$$\int_V \nabla f dv = \oint_S f \vec{n} ds \quad (\text{IV.26})$$

$$\int_V \nabla \wedge \vec{a} dv = \oint_S \vec{n} \wedge \vec{a} ds \quad (\text{IV.27})$$

$$\int_S \vec{n} \wedge \nabla f ds = \oint_L f d\vec{l} \quad (\text{IV.28})$$

Bibliografía

- [Akhiezer] A. AKHIEZER E I. AKHIEZER, *Eletromagnétisme et Ondes Electro-magnétiques*, Mir, Moscou, 1988.
- [Arfken y Weber] G. B. ARFKEN Y H. J. WEBER, *Mathematical Methods for Physicists, International Edition*, Academic Press, San Diego, Cal. , 1996.
- [Atwater] H. A. ATWATER, *Introduction to Microwave Theory*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- [Beam] W. R. BEAM, *Electronics of Solids*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [Bergmann] P. G. BERGMANN, *Introduction to the Theory of Relativity*, Prentice-Hall, 1960.
- [Bleaney y Bleaney] B. I. BLEANEY Y B. BLEANEY, *Electricity and Magnetism* Tercera edición, Oxford University Press, Londres, 1976.
- [Born y Wolf] M. BORN Y E. WOLF, *Principles of Optics*, Quinta edición, Pergamon Press, Oxford, 1973.
- [Brédov et al.] M. BRÉDOV, V. RUMIÁNTSEV E I. TOPTIGUIN, *Electrodinámica Clásica*, Mir, Moscú, 1986.
- [Chen] F. F. CHEN, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Volume 1: Plasma Physics*, McGraw-Hill, New York, 1985.
- [Collin] R. E. COLLIN, *Field Theory of guided waves*, Second Edition, IEEE Press, New York, 1991.
- [Condon] E. U. CONDON, *Electromagnetic Waves*, en: E. U. CONDON Y H. ODISHAW EDS., *Handbook of Physics*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [D'Inverno] R. D'INVERNO, *Introducing Einstein's Relativity*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

- [García Olmedo] B. GARCÍA OLMEDO, *Fundamentos de Electromagnetismo*, Departamento de Electromagnetismo y Física de la Materia, Fac. Ciencias, Univ. de Granada, Granada, 2005.
- [Goldstein] H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1959.
- [Gómez-a] R. GÓMEZ MARTÍN, *Apuntes de clase*, Universidad de Granada, Granada.
- [Gómez] R. GÓMEZ MARTÍN, *Campo Electromagnético. Propagación y Radiación*, Secretariado de Publicaciones, Universidad de Granada, Granada, 1984.
- [Jackson] J. D. JACKSON, *Electrodinámica Clásica*, Alhambra, Madrid, 1980.
- [Kong] J. A. KONG, *Electromagnetic Wave Theory*, J. Wiley, New York, 1986.
- [Konopinski] E. J. KONOPINSKI, *Electromagnetic Fields and Relativistic Particles*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- [Lanczos] C. LANCZOS, *Tensor Calculus*, en: E. U. CONDON Y H. ODISHAW EDS., *Handbook of Physics*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [Landau y Lifchitz CA] L. LANDAU Y E. LIFCHITZ, *Curso Abreviado de Física Teórica; libro 1: Mecánica y Electrodinámica*, Mir, Moscú, 1979.
- [Landau y Lifchitz FT] L. LANDAU Y E. LIFCHITZ, *Theorie des Champs. Physique Théorique, Tome 2*, Mir, Moscou, 1989.
- [Landau y Lifchitz MC] L. LANDAU Y E. LIFCHITZ, *Electrodynamique des Milieux Continus. Physique Théorique, Tome 8*, Mir, Moscou, 1990.
- [Leech] J. W. LEECH, *Eléments de Mécanique Analytique*, Dunod, Paris, 1961.
- [Liboff] R. L. LIBOFF, *Kinetic Theory. Classical, Quantum and Relativistic Descriptions*, Prentice Hall, Englewood cliffs, New Jersey, 1990.
- [Lichnerowicz] A. LICHNEROWICZ, *Éléments de Calcul Tensoriel*, Armand Colin, Paris, 1960.
- [Matveyev] A. N. MATVEYEV, *Principles of Electrodynamics*, Reinhold, New York, 1966.
- [Nicholson] D. R. NICHOLSON, *Introduction to Plasma Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

- [Ohanian] H. C. OHANIAN, *Classical Electrodynamics*, Allyn and Bacon, Boston, 1988.
- [Panofsky y Phillips] W. K. H. PANOFSKY Y M. PHILLIPS, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.
- [Quemada] D. QUEMADA, *Ondes dans les Plasmas*, Hermann, Paris, 1968.
- [Ramo et al.] S. RAMO, J. R. WHINNERY Y T. VAN DUZER, *Fields and Waves in Comunication Electronics*, Third Edition, John Wiley, New York, 1994.
- [Reitz et al.] J. R. REITZ, F. J. MILFORD Y R. W. CHRISTY, *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, Addison-Wesley Iberoamericana, Argentina, 1996.
- [Spiegel et al.] M. R. SPIEGEL Y L. ABELLANAS, *Fórmulas y tablas de Matemática Aplicada*, McGraw-Hill, Madrid, 1988.
- [Stratton] J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, Nueva York, 1941.
- [Vanderlinde] J. VANDERLINDE, *Classical Electromagnetic Theory*, Wiley, New York, 1993.
- [Whittaker] E. WHITTAKER , *A History of the Theories of Aether and Electricity*, Tomash Publishers, American Institute of Physics, 1987.